文章编号: 1004-4353(2016)02-0103-05

一个半线性椭圆型变分不等式最优控制问题的近似解序列的收敛性

姜今锡, 金艳, 金元峰
(延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 讨论了一个半线性椭圆型变分不等式近似最优控制问题. 首先,利用分解法和对偶方法将原始问题转化成带有线性状态方程和对于状态是非凸限制的最优控制问题;然后,在此基础上,给出了该问题近似解序列的收敛性.

关键词: 椭圆型变分不等式; 最优控制; 分解法; 对偶方法
中图分类号: O177.92　　**文献标识码:** A

The convergence of the approximate solution sequence of optimal control problem for a semi-linear elliptic variational inequality

JIANG Jinxi, JIN Yan, JIN Yuanfeng
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: In this paper, an approximate solution of the optimal control problem for a semi-linear elliptic variational inequality is considered. First of all, the primal problem is transformed into an optimal control problem with linear state equation and non-convex constraints on the state by means of decomposition and dual method; secondly, the convergence of the solution sequence of the approximate problem for it are proposed.

Keywords: elliptic variational inequality; optimal control; decomposition method; dual method

0 引言

微分或变分不等式广泛应用于力学、控制论、经济数学、对策论等领域,而且在最优化中也有较多应用,如最优控制问题、弹性问题、渗流问题以及处理非线性奇异摄动问题等. 尽管变分不等式可看作是非线性微分方程的一个特殊类型,但因其具有非线性、不确定或自由边界条件以及解的不可微性等原因,其最优控制问题比起微分方程的讨论有时更为困难[1-2];所以,讨论最优化条件和开发更为有效的一些算法受到人们的关注. 文献[3-12]基于罚技术(penalty technique)、对偶方法等讨论了多种类型的控制问题的近似解法,并得到了许多有价值的研究成果,但其中大多数研究侧重于其目标泛函相对于状态可微分的特殊情形. 本文作者在文献[13]中讨论了一个半线性椭圆型变分不等式约束下的最优控制问题解的存在性,但实际上,很多最优控制问题的精确解是难以求出的,鉴于此,本文基于已有的研究成果,讨论了一个半线性椭圆型变分不等式最优控制问题的近似解法,并给出了近似解序列的收敛性和近似最优化条件.

收稿日期: 2016-04-02　　**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(413010030)
作者简介: 姜今锡(1959—),男,博士,教授,研究方向为应用概率统计、最优化理论.

1 问题设定和等价问题

1.1 问题设定

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是有界开区域,Γ 为李普希茨连续的 Ω 的边界.“$a:=b$”表示 a 定义为 b;$W_+:=\{v\in W \mid v\geqslant 0\}$,这里 W 为由函数构成的线性空间;$a^+:=\begin{cases} a,\ a\geqslant 0; \\ 0,\ a<0, \end{cases}$ $a^-:=\begin{cases} 0,\ a\geqslant 0; \\ -a,\ a<0. \end{cases}$

状态函数 u 满足的半线性椭圆型变分不等式如下:

$$u\in K;\ \int_\Omega \lambda\ \nabla u\ \nabla(v-u)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{1,2}} G(u)(v-u)\mathrm{d}\Gamma \geqslant \int_{\Gamma_3} \varphi(v-u)\mathrm{d}\Gamma,\ \forall\, v\in K, \tag{1}$$

其中 $K:=\{v\in H^1(\Omega) \mid$ 在 Ω 上 $v\geqslant 0$,在 Γ_1 上 $v\geqslant u_*\}$,$u_*>0$,$\lambda\in W_+^{1,\infty}(\Omega)$,$\lambda\geqslant\lambda_0>0$,$\varphi\in L^2(\Gamma_3)_+$,$G(u)=\alpha u+\beta u^4+g$,$g\in\mathbf{R}_+^1$,$\Gamma_{12}=\Gamma_1\cup\Gamma_2$,$\Gamma=\sum_{i=1}^{3}\Gamma_i$.不等式(1) 在 $H^{3/2}(\Omega)$ 上存在唯一的解 u.

假定不等式(1) 的解 u 受 φ 的控制,即 $u=u(\varphi)$,则目标泛函如下:

$$J(\varphi)=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}(\chi_{F(u)}-\chi_{F_d})^2\mathrm{d}\Gamma+\frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_1}\varphi^2\mathrm{d}\Gamma,\ \gamma>0.$$

这里 χ_A 表示集合 A 的特征函数,$F(u):=\{(x,y)\in\Gamma_1 \mid u(x,y)=u_*$,在 Γ_1 上$\}$,$F_d\subset\Gamma_1$ 表示给定的 Γ_1 的子集.

本文给出的最优控制问题如下:

$$(\mathrm{P}):\begin{cases} \inf\limits_{\varphi\in U_{ad}} J(\varphi), \\ U_{ad}=L^2(\Gamma_3)_+ \text{ 为容许控制集合.} \end{cases}$$

1.2 等价问题

引理 1 u 是不等式(1) 的解当且仅当 u 为如下问题的解:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\lambda\ \nabla u)=0,\ u\geqslant 0,\ \text{在 } \Omega \text{ 上}; \\ \lambda\dfrac{\partial u}{\partial n}+G(u)\geqslant 0,\ u-u_*\geqslant 0,\ (\lambda\dfrac{\partial u}{\partial n}+G(u))(u-u_*)=0,\ \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}; \\ \lambda\dfrac{\partial u}{\partial n}+G(u)=0,\ \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}; \\ \lambda\dfrac{\partial u}{\partial n}+\varphi=0,\ \text{在 } \Gamma_3 \text{ 上}. \end{cases} \tag{2}$$

注:利用变分不等式的半梯度表示及其性质即可得到引理 1 和下面引理 2 的证明.

为方便起见,引入如下函数:

$$\left.\begin{aligned} &\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上},\ \xi_1:=\lambda\frac{\partial u}{\partial n}+G(u) \\ &\text{在 } \Gamma_{12} \text{ 上},\ \xi_2:=\beta u^4 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

引理 2 u 是不等式(1) 的解当且仅当 $\exists\,\xi_1\in L^2(\Gamma_1)$,$\xi_2\in L^2(\Gamma_{12})$,满足如下关系式:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla u)=0,\ \text{在 } \Omega \text{ 上}; \\ \lambda\dfrac{\partial u}{\partial n}+\alpha u=\xi_1-\xi_2+g,\ \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}; \\ \lambda\dfrac{\partial u}{\partial n}+\alpha u=g-\xi_2,\ \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}; \\ \lambda\dfrac{\partial u}{\partial n}=\varphi,\ \text{在 } \Gamma_3 \text{ 上}. \end{cases} \tag{4}$$

其限制条件为

$$\begin{cases}\xi_1 \geqslant 0,\ u-u_* \geqslant 0,\ \xi_1(u-u_*)=0,\ \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上；}\\ \xi_2=\beta u^4,\ \xi_2 \geqslant 0,\ \text{在 } \Gamma_{12}=\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ 上.}\end{cases}$$

由引理 2 可知，问题(P) 等价于如下的问题：

$$(\mathrm{P})_0:\ \inf_{(\xi_1,\xi_2,\varphi)\in U_0} J(\xi_1,\xi_2,\varphi).$$

这里，$J(\xi_1,\xi_2,\varphi):=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}(\chi_{F(u(\xi_1,\xi_2,\varphi))}-\chi_{F_d})^2\mathrm{d}\Gamma+\frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_3}\varphi^2\mathrm{d}\Gamma$，$U_0:=\{(\xi_1,\xi_2,\varphi)\in L^2(\Gamma_1)\times L^2(\Gamma_{12})\times U_{ad} \mid$ 在 Γ_1 上 $\xi_1\geqslant 0$，$\xi_1(u-u_*)=0$，$u-u_*\geqslant 0$；在 Γ_{12} 上 $\xi_2\geqslant 0$，$\xi_2=\beta u^4$；$u=u(\xi_1,\xi_2,\varphi)$ 是式(4) 的唯一解$\}$. 问题$(\mathrm{P})_0$ 是控制与状态受限制的线性系最优控制问题.

2　近似最优控制问题及其收敛性

由于问题$(\mathrm{P})_0$ 中的不可微项$\frac{1}{2}|\chi_{F(u(\xi_1,\xi_2,\varphi))}-\chi_{F_d}|^2$ 会给讨论最优化条件和计算带来不便，故用正规化后的近似量来替代，并利用罚方法处理具有非凸的限制条件.

$$E_\eta(u):=\frac{\eta}{\eta+u-u_*},\ \eta\in\mathbf{R}^1_+.$$

显然，$\lim\limits_{\eta\to 0}E_\eta(u)=\chi_{F(u)}=\begin{cases}1,\ (x,y)\in F(u);\\ 0,\ (x,y)\notin F(u);\end{cases}$

$$J^\eta(\xi_1,\xi_2,\varphi):=\frac{1}{2}\left|E_\eta(u(\xi_1,\xi_2,\varphi))-\chi_{F_d}\right|^2_{\Gamma_1},$$

$$J^\varepsilon(\xi_1,\xi_2,\varphi):=\frac{1}{2\varepsilon}|\xi_1(u-u_*)|^2_{\Gamma_1}+\frac{1}{2\varepsilon}|\beta u^4-\xi_2|^2_{\Gamma_{12}}+\frac{1}{2\varepsilon}|(u-u_*)^-|^2_{\Gamma_1}+$$

$$\frac{\varepsilon}{2}|\xi_1|^2_{\Gamma_1}+\frac{\varepsilon}{2}|\xi_2|^2_{\Gamma_{12}},$$

$$J^\eta_\varepsilon(\xi_1,\xi_2,\varphi):=J^\eta+J^\varepsilon+\frac{\nu}{2}|\varphi|^2_{\Gamma_3}.$$

由此，$(\mathrm{P})_0$ 的正规惩罚近似问题可表示为：

$$(\mathrm{P})^\eta_\varepsilon:\ \inf_{(\xi_1,\xi_2,\varphi)\in U} J^\eta_\varepsilon(\xi_1,\xi_2,\varphi).$$

这里 $U:=\{(\xi_1,\xi_2,\varphi)\in L^2(\Gamma_1)\times L^2(\Gamma_{12})\times U_{ad} \mid \xi_1\geqslant 0,\xi_2\geqslant 0,\varphi\geqslant 0$，对$(\xi_1,\xi_2,\varphi)$，$u=u(\xi_1,\xi_2,\varphi)$ 是式(4) 的唯一解$\}$.

定理 1　问题$(\mathrm{P})^\eta_\varepsilon$ 对于给定的(ε,η) 至少存在一个解.

定理 2　假定$(\xi_{1\varepsilon\eta},\xi_{2\varepsilon\eta},\varphi_{\varepsilon\eta})$ 和$(\xi_{1\varepsilon\eta},\xi_{2\varepsilon\eta},\varphi_{\varepsilon\eta})$ 分别为问题$(\mathrm{P})^\eta_\varepsilon$ 和$(\mathrm{P})_0$ 的解，则$(\varepsilon,\eta)\to 0$ 时，在子序列意义上，$(\mathrm{P})^\eta_\varepsilon$ 的解收敛于$(\mathrm{P})_0$ 的解，并且若$(\mathrm{P})_0$ 的解是唯一的，则收敛于这个唯一解.

证明

$$J^\eta_\varepsilon(\xi_{1\varepsilon\eta},\xi_{2\varepsilon\eta},\varphi_{\varepsilon\eta})\leqslant J^\eta_\varepsilon(\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,\bar{\varphi})\leqslant J^{\eta_0}(\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,\bar{\varphi})+\frac{\varepsilon_0}{2}|\bar{\xi}_1|^2_{\Gamma_1}+\frac{\varepsilon_0}{2}|\bar{\xi}_2|^2_{\Gamma_{12}}+\frac{\gamma}{2}|\bar{\varphi}|^2_{\Gamma_3}=c,$$

$$\forall\,\varepsilon<\varepsilon_0,\ \eta<\eta_0,\tag{5}$$

其中 c 是与(ε,η) 无关的常数. 由 J^η_ε 的强制性，若$\{\xi_{1\varepsilon\eta},\xi_{2\varepsilon\eta},\varphi_{\varepsilon\eta}\}$ 是 U 上的有界集，$u_{\varepsilon\eta}=u(\xi_{1\varepsilon\eta},\xi_{2\varepsilon\eta},\varphi_{\varepsilon\eta})$ 是 $\xi_1=\xi_{1\varepsilon\eta}$，$\xi_2=\xi_{2\varepsilon\eta}$，$\varphi=\varphi_{\varepsilon\eta}$ 时的式(4) 的解，则 $\|u_{\varepsilon\eta}\|_{H^{3/2}(\Omega)}\leqslant c$. 由此取子序列，在 $H^{3/2}(\Omega)$ 上 $u_{\varepsilon\eta}$ 弱收敛于 $\bar{u}$，在 $L^p(\Omega)$(或 $L^p(\Gamma)$) 上 $u_{\varepsilon\eta}$ 强收敛于 $\bar{u}$，在 Ω(或 Γ) 上 $u_{\varepsilon\eta}$ 几乎处处强收敛于 $\bar{u}$，在 $C(\Gamma)$(Γ 上的连续函数空间) 上 $u_{\varepsilon\eta}$ 强收敛于 $\bar{u}$，在 $L^2(\Gamma_1)$ 上 $\xi_{1\varepsilon\eta}$ 弱收敛于 $\bar{\xi}_1$，在 $L^2(\Gamma_{12})$ 上 $\xi_{2\varepsilon\eta}$ 弱收敛于 $\bar{\xi}_2$，在 $L^2(\Gamma_3)$ 上 $\varphi_{\varepsilon\eta}$ 弱收敛于 $\bar{\varphi}$. 另一方面，易知 $\bar{u}=u(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,\bar{\varphi})$ 是式(4) 的弱解，再由 u 的弱收敛性知，$(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,$

$\bar{\varphi})\in U$. 由式(5) 可得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left|E_\eta(u_{\varepsilon\eta})-\chi_{F_d}\right|_{\Gamma_1}^2\leqslant c,\\ \left|\xi_{1\varepsilon\eta}(u_{\varepsilon\eta}-u_*)\right|_{\Gamma_1}\leqslant\sqrt{2\varepsilon}\cdot c,\\ \left|\xi_{2\varepsilon\eta}-\beta u_{\varepsilon\eta}^4\right|_{\Gamma_{12}}\leqslant\sqrt{2\varepsilon}\cdot c,\\ \left|(u_{\varepsilon\eta}-u_*)^-\right|_{\Gamma_1}\leqslant\sqrt{2\varepsilon}\cdot c.\end{cases}\tag{6}$$

由前述的 $u_{\varepsilon\eta}$ 的一系列收敛性和(6) 式(利用 $|(\cdot)^-|_{\Gamma_1}$ 弱下半连续性) 可得:

$$0\geqslant\varliminf_{(\varepsilon,\eta)\to0}\left|\xi_{1\xi\eta}(u_{\varepsilon\eta}-u_*)\right|_{\Gamma_1}=\left|\tilde{\xi}_1(\bar{u}-u_*)\right|_{\Gamma_1},$$

$$0\geqslant\varliminf_{(\varepsilon,\eta)\to0}\left|\xi_{2\varepsilon\eta}-\beta u_{\varepsilon\eta}^4)\right|_{\Gamma_{12}}\geqslant\left|\tilde{\xi}_2-\beta\bar{u}^4\right|_{\Gamma_{12}},$$

$$0\geqslant\varliminf_{(\varepsilon,\eta)\to0}\left|(u_{\varepsilon\eta}-u_*)^-\right|_{\Gamma_1}\geqslant\left|(\bar{u}-u_*)^-\right|_{\Gamma_1}.$$

所以,有

$$\begin{cases}\tilde{\xi}_1\cdot(\bar{u}-u_*)=0\,(\tilde{\xi}_1\geqslant0),\text{ 在 }\Gamma_1\text{ 上};\\ (\bar{u}-u_*)^-=0\leftrightarrows\bar{u}-u_*\geqslant0,\text{ 在 }\Gamma_1\text{ 上};\\ \tilde{\xi}_2-\beta\bar{u}^4=0\,(\tilde{\xi}_2\geqslant0),\text{ 在 }\Gamma_{12}\text{ 上};\\ \tilde{\xi}_1>0!\ \Rightarrow\bar{u}-u_*=0,\text{ 在 }\Gamma_1\text{ 上};\\ \bar{u}-u_*>0!\ \Rightarrow\tilde{\xi}_1=0,\text{ 在 }\Gamma_1\text{ 上}.\end{cases}\tag{7}$$

由$(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,\bar{\varphi})\in U$ 和式(7) 可知:

$$(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,\bar{\varphi})\in U_0\,(U_0\text{ 是}(\mathrm{P})_0\text{ 的容许集合}).\tag{8}$$

由前述的 $u_{\varepsilon\eta}$ 的一系列收敛性可推出,在 Γ_1 上几乎成立 $u_{\varepsilon\eta}\to\bar{u}$,在 Γ_1 上几乎处处成立 $\bar{u}-u_*\geqslant0$. 故 $\exists\,\varepsilon_1,\eta_1>0$,对 $\forall\,\varepsilon<\varepsilon_1,\eta<\eta_1$,在 Γ_1 上几乎处处成立

$$u_{\varepsilon\eta}-u_*\geqslant0.\tag{9}$$

下证 $\lim\limits_{(\varepsilon,\eta)\to0}J^\eta(\xi_{1\varepsilon\eta},\xi_{2\varepsilon\eta},\varphi_{\varepsilon\eta})=\dfrac{1}{2}\left|\chi_{F(\bar{u})}-\chi_{F_d}\right|_{\Gamma_1}^2$. 事实上,

$$\int_{\Gamma_1}(E_\eta(u_{\varepsilon\eta})-\chi_{F_d})^2\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma_1}E_\eta\,(u_{\varepsilon\eta})^2\mathrm{d}\Gamma-2\int_{\Gamma_1}E_\eta(u_{\varepsilon\eta})\cdot\chi_{F_d}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_1}\chi_{F_d}^2\mathrm{d}\Gamma=I_1+I_2+I_3,$$

$$I_1=\int_{\Gamma_1}\Big(\frac{\eta}{\eta+u_{\varepsilon\eta}-u_*}\Big)^2\mathrm{d}\Gamma=\int_{F(u_{\varepsilon\eta})}\chi_{F(u_{\varepsilon\eta})}^2\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_1\setminus F(u_{\varepsilon\eta})}\Big(\frac{\eta}{\eta+u_{\varepsilon\eta}-u_*}\Big)^2\mathrm{d}\Gamma,$$

这里 $F(u_{\varepsilon\eta}):=\{(x,y)\in\Gamma_1\mid u_{\varepsilon\eta}(x,y)=u_*\}$. 由式(9) 可知,上式中第 2 项收敛于零. 又由前述的 $u_{\varepsilon\eta}$ 的收敛性可知,$u_{\varepsilon\eta}\to\bar{u}\leftrightarrows\mathrm{meas}\{(x,y)\in\Gamma_1\mid u_{\varepsilon\eta}\neq\bar{u}$,在 Γ_1 上$\}$,故当$(\varepsilon,\eta)\to0$ 时,有

$$\int_{F(u_{\varepsilon\eta})}\chi_{F(u_{\varepsilon\eta})}^2\mathrm{d}\Gamma=\mathrm{meas}F(u_{\varepsilon\eta})\to\mathrm{meas}F(\bar{u})=\int_{F(\bar{u})}1^2\mathrm{d}\Gamma=\int_{F(\bar{u})}\chi_{F(\bar{u})}^2\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma_1}\chi_{F(\bar{u})}^2\mathrm{d}\Gamma.\tag{10}$$

类似地,$-\dfrac{I_2}{2}=\displaystyle\int_{\Gamma_1}E_\eta(u_{\varepsilon\eta})\cdot\chi_{F_d}^2\mathrm{d}\Gamma\to\int_{\Gamma_1}\chi_{F(\bar{u})}\cdot\chi_{F_d}\mathrm{d}\Gamma$,由此可知下式成立:

$$\lim_{(\varepsilon,\eta)\to0}J^\eta(\xi_{1\varepsilon\eta},\xi_{1\varepsilon\eta},\varphi_{\varepsilon\eta})=\frac{1}{2}\left|\chi_{F(\bar{u})}-\chi_{F_d}\right|_{\Gamma_1}^2.$$

令 $\eta\to0$,则

$$J^\eta(\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,\bar{\varphi}_{\varepsilon\eta})=\frac{1}{2}\left|E_\eta(\bar{u})-\chi_{F_d}\right|_{\Gamma_1}^2\to\frac{1}{2}\left|\chi_{F(\bar{u})}-\chi_{F_d}\right|_{\Gamma_1}^2.\tag{11}$$

结合上述结果和前述的 $u_{\varepsilon\eta}$ 的收敛性,有:

$$\varliminf_{(\varepsilon,\eta)\to0}J_\varepsilon^\eta(\xi_{1\varepsilon\eta},\xi_{2\varepsilon\eta},\varphi_{\varepsilon\eta})\leqslant\frac{1}{2}\left|\chi_{F(\bar{u})}-\chi_{F_d}\right|_{\Gamma_1}^2+\frac{\gamma}{2}\left|\bar{\varphi}\right|_{\Gamma_3}^2=J(\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,\bar{\varphi}),$$

$$\lim_{(\varepsilon,\eta)\to 0} J_{\varepsilon}^{\eta}(\xi_{1\varepsilon\eta},\xi_{2\varepsilon\eta},\varphi_{\varepsilon\eta}) \geqslant \frac{1}{2}\left|\chi_{F(\tilde{u})}-\chi_{F_d}\right|_{\Gamma_1}^2+\frac{\gamma}{2}\left|\tilde{\varphi}\right|_{\Gamma_3}^2=J(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,\tilde{\varphi}).$$

即由式(10)和(11)可知 $J(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,\tilde{\varphi})\leqslant J(\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,\bar{\varphi})$. 另一方面，由式(8)可知，$J(\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,\bar{\varphi})\leqslant J(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,\tilde{\varphi})$，所以有 $\tilde{\xi}_1=\bar{\xi}_1$，$\tilde{\xi}_2=\bar{\xi}_2$，$\tilde{\varphi}=\bar{\varphi}$. 证毕.

参考文献：

[1] Bermudez A, Saguez C. Optimal control of a sigorrini problem[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1987,25(3):576-587.

[2] Bermudez A, Saguez C. Optimal control of variational inequalities[J]. Control and Cybernetics, 1985,14(1/3):9-30.

[3] He Zhengxu. State constramed control problems governed by variational inequalities[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1987,25(5):1119-1144.

[4] 张石生，向淑文. 一类型变分不等式解的存在性唯一性问题及其对力学中的 Signorini 问题的应用[J]. 应用数学与力学，1991，12(5)：401-406.

[5] 陈学华. 带不变凸的非光滑约束分式最优控制问题的对偶[J]. 苏州大学学报(自然科学版)，2001，17(3)：27-34.

[6] David R Adams, Suzanne Tenhard. Optimal shape design subject to ellptic viriational inequalities[J]. Applied Mathmatics and Optimization, 2003,47(1):79-95.

[7] Hintermuller M, Laurain A. Optimal shape design subject to ellptic variational inequalities[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2011,49(3):1015-1047.

[8] Gunzburger M D, Manservis S. Analisis and approximation of the velocity tracking problem for Navier-Stokes flows with distributed control[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2000,37(5):1481-1512.

[9] Gunzburger M D, Manservis S. The velocity traching problem for Navier-Stokes flows with boundary control[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2001,39(2):594-634.

[10] Arada N, Raymond J P. Optimal control problems with mixed control-state constraints[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2000,39(5):1391-1407.

[11] Chen Qihong, Chu Delin, Tan R C E. Optimal control of obstacle for quasi-linear elliptic variational bilateral problems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2005,44(3):1067-1080.

[12] Lou Hongwei. An optimal control problem governed by quasi-linear variational inequalities[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2002,41(4):1229-1253.

[13] 姜今锡，刘文斌，金艳. 一个半线性椭圆型变分不等式约束下的最优控制问题解的存在性[J]. 延边大学学报(自然科学版)，2014，40(4)：295-298.