

文章编号: 1004-4353(2016)02-0099-04

# 具状态脉冲的单种群微分系统周期解的稳定性

唐晓伟<sup>1,2</sup>

( 1. 齐鲁师范学院 数学学院, 山东 济南 250200; 2. 山东师范大学 数学科学学院, 山东 济南 250014 )

**摘要:** 首先利用流转换理论研究了单种群微分系统的轨线走向问题. 在此基础上, 建立映射结构, 给出了具状态脉冲的单种群微分系统周期解稳定性分析的充分条件, 克服了系统在脉冲点处不连续的困难, 并通过例子说明了结论的有效性.

**关键词:** 周期解; 稳定性; 脉冲; 单种群微分系统

**中图分类号:** O175.31

**文献标识码:** A

## Stability of periodic solution for a single population differential system with state-dependent impulse

TANG Xiaowei<sup>1,2</sup>

( 1. *Mathematical School, Qilu Normal University, Jinan 250200, China;*

*2. School of Mathematical Science, Shandong Normal University, Jinan 250014, China* )

**Abstract:** The trajectory direction of a single population differential system is studied through flow switchability theory. By setting up mapping structures, a sufficient condition for the stability of periodic solutions of a single population differential system with state-dependent impulse is given, which overcomes the discontinuous difficulty caused by impulse. At last the effectiveness is verified.

**Keywords:** periodic solutions; stability; impulse; a single population differential system

## 0 引言

种群内部及种群间的互利共生是一种常见的现象, 长期以来一直受众多学者的关注, 并且已取得了丰硕的成果<sup>[1-2]</sup>. 在这些成果中, 人们通常是假设系统的状态是随时间连续变化的, 但是在自然界中一个系统的状态常常会受到来自外界的各种因素的影响, 使得种群的状态在短时间内发生剧烈地变化; 另一方面, 在人们对资源的利用和保护中, 会人为地对种群进行干扰, 例如在渔业生产中成鱼的捕捞等, 这些干预对种群的影响是不容忽视的, 因此, 用脉冲种群微分系统来描述种群的动力学行为更符合实际情况的需要<sup>[3-4]</sup>. 文献[5]通过引入小幅度的扰动, 利用非线性的思想并结合 Floquet 理论研究了具脉冲常数投放的脉冲捕食系统的局部稳定性问题. 文献[6]利用微分几何理论和后继函数研究了具有状态脉冲反馈的种群系统阶-1 周期解的存在性, 并给出了一类特殊系统阶-1 周期解的存在性和渐近稳定的充要条件. 文献[3]利用 Poincare 映射讨论了具有脉冲状态反馈的脉冲捕食系统半平凡周期解的存在性和稳定性问题. 文献[7]通过平均条件结合李雅普诺夫函数研究了一类捕食系统的稳定性问题. 文献[8]在研究切换系统周期解的稳定时提出了一种映射结构方法, 通过映射结构所决定的广义特征值的大小研

究周期解的局部稳定性问题,克服了切换系统在切换点处可能不连续的困难. 基于以上研究,本文研究一类具有状态脉冲的单种群微分系统周期解的局部稳定性问题,给出了其局部稳定性分析的充分条件,并通过例子验证了结论的有效性.

### 1 预备知识和基本结果

考虑如下的具有阶段结构的单种群微分系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx - dy, \end{cases} \tag{1}$$

以害虫种群为例,其中  $x=x(t)$  表示幼虫的种群密度,  $y=y(t)$  表示成虫的种群密度,  $b>0$  表示成虫的出生率,  $d>0$  表示成虫的死亡率,且  $b>d$ ,  $a=c_1+c$ ,  $c$  表示幼虫转化为成虫的转化率,  $a>c>0$ . 可以验证:当  $ad \neq bc$  时,系统(1)有唯一的奇点  $(0,0)$ ,且当  $d>b$  时,  $(0,0)$  是一个稳定的结点;当  $ad < bc$  时,  $(0,0)$  是一个不稳定的鞍点.

系统(1)的右端向量场有 2 条等倾线:  $-ax + by = 0$  和  $cx - dy = 0$ . 当系统(1)满足条件  $(H_1)$ :  $ad - bc < 0$  时,上述 2 条等倾线将第一象限  $\mathbf{R}_+^2$  分为如下 3 个区域:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x,y) \mid -ax + by < 0\} \cap \mathbf{R}_+^2, \\ \Omega_2 &= \{(x,y) \mid cx - dy > 0, -ax + by > 0\} \cap \mathbf{R}_+^2, \\ \Omega_3 &= \{(x,y) \mid cx - dy < 0\} \cap \mathbf{R}_+^2. \end{aligned}$$

相邻区域  $\Omega_i, \Omega_j$  的分离边界定义为  $\partial\Omega_{ij} = \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j}$ ,于是有:

$$\begin{aligned} \partial\Omega_{12} &= \partial\Omega_{21} = \{(x,y) \mid -ax + by = 0\}, \\ \partial\Omega_{23} &= \partial\Omega_{32} = \{(x,y) \mid cx - dy = 0\}. \end{aligned}$$

为方便起见,引入变量  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ,  $F(X) = F(x,y) = \begin{bmatrix} -ax + by \\ cx - dy \end{bmatrix}$ ,于是系统(1)可写为

$$\dot{X} = F(X) \equiv F^{(i)}(X), \quad i=1,2,3,$$

其中上标  $i$  表示此时系统受区域  $\Omega_i$  内的方向场控制.

由于相邻区域  $\Omega_i, \Omega_j$  的边界均为直线,故给出如下定理:

**定理 1** 假设系统(1)满足条件  $(H_1)$ ,则系统(1)的从  $\Omega_1$  出发的轨线必将都进入  $\Omega_2$ ,从  $\Omega_2$  出发的轨线必将都进入  $\Omega_3$ ,从  $\Omega_3$  出发的轨线必将一直保持在  $\Omega_3$  内.

**证明** 由于相邻区域  $\Omega_i, \Omega_j$  的分离边界  $\partial\Omega_{ij}$  均为直线,故由 Luo<sup>[8]</sup> 的流转换理论可知,此时分离边界的法向量分别为  $\mathbf{n}_{\partial\Omega_{12}}^T = (-a,b)$ ,  $\mathbf{n}_{\partial\Omega_{23}}^T = (c,-d)$ ,其中上标 T 表示向量的转置. 设系统(1)的从  $\Omega_1$  出发的轨线在时刻  $t_m$  到达区域  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  的边界  $\partial\Omega_{12}$ ,于是有

$$\mathbf{n}_{\partial\Omega_{12}}^T \cdot F^{(1)}(X(t_{m-})) = (-a,b) \cdot \begin{bmatrix} -ax(t_{m-}) + by(t_{m-}) \\ cx(t_{m-}) - dy(t_{m-}) \end{bmatrix} > 0,$$

其中时刻  $t_{m-}$  表示此时轨线位于  $\Omega_1$  内. 该式表明系统(1)的从  $\Omega_1$  出发的轨线必进入  $\Omega_2$ .

同样,设系统(1)的从  $\Omega_2$  出发的轨线在时刻  $t_n$  到达  $\Omega_2$  和  $\Omega_3$  的边界  $\partial\Omega_{23}$ ,于是  $\mathbf{n}_{\partial\Omega_{23}}^T \cdot F^{(2)}(X(t_{n+})) > 0$ ,其中  $t_{n+}$  表示此时轨线位于  $\Omega_3$  内,故系统(1)的从  $\Omega_3$  出发的轨线必不能进入  $\Omega_2$  内. 而系统(1)的轨线在经过区域  $\Omega_2$  和  $\Omega_3$  的边界  $\partial\Omega_{23}$  时,要么从区域  $\Omega_2$  进入  $\Omega_3$  内,要么从区域  $\Omega_3$  进入  $\Omega_2$  内,于是系统(1)的从区域  $\Omega_2$  出发的轨线只能进入  $\Omega_3$  内,且一直保持在  $\Omega_3$  内.

## 2 主要结果及其证明

由于环境、食物等外界因素所能够承载的种群最大数量有限,从而当种群数量达到最大值时,就需要对种群加以人工干预,如通过喷洒农药以降低害虫的种群密度等来保持整个种群系统的生态平衡.本文在系统(1)的基础上考虑如下的具依赖状态脉冲的单种群系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx - dy \end{cases} \Bigg\} y < E; \\ \begin{cases} \Delta x = px \\ \Delta y = qy \end{cases} \Bigg\} y = E, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $-1 < p < 0$ ,  $-1 < q < 0$  是常数,  $E$  表示成虫种群的最大种群密度.

设  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  是系统(2)的具有正初值的阶- $k$  周期解<sup>[6]</sup>, 其周期为  $T$ . 由定理1可知,  $X(t)$  与脉冲面  $y=E$  碰撞无限多次, 但是在一个周期内  $X(t)$  与脉冲面  $y=E$  只能碰撞有限次. 不妨假设在一个周期内  $X(t)$  与脉冲面  $y=E$  碰撞产生的脉冲时刻依次为  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , 相应的脉冲点为  $(x_i, E)$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ . 令  $\Sigma = \{(x, y) \mid y=E, x > 0\}$ ,  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < y < E, x > 0\}$ . 作映射  $P_i^+ : \Sigma \rightarrow \Omega$ , 满足  $P_i^+(x_i, y_i) = ((1+p)x_i, (1+q)y_i) \equiv (x_i^+, y_i^+)$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ , 于是映射  $P_i^+$  的控制方程为

$$\begin{cases} x_i^+ = (1+p)x_i, \\ y_i^+ = (1+q)y_i. \end{cases} \quad (3)$$

作映射  $P_i : \Omega \rightarrow \Sigma$ , 满足  $P_i(x_i^+, y_i^+) = (x_{i+1}, y_{i+1})$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ , 其中  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  是系统(1)的过  $(x_i^+, y_i^+)$  的轨线上当  $y=E$  时的点, 于是映射  $P_i$  的控制方程为:

$$\begin{cases} x_{i+1} = \frac{d+\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} \left( x_i^+ - \frac{d+\lambda_2}{c} y_i^+ \right) e^{\lambda_1(t_{i+1}-t_i^+)} + \frac{d+\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} \left( x_i^+ - \frac{d+\lambda_1}{c} y_i^+ \right) e^{\lambda_2(t_{i+1}-t_i^+)}, \\ y_{i+1} = \frac{c}{\lambda_1-\lambda_2} \left( x_i^+ - \frac{d+\lambda_2}{c} y_i^+ \right) e^{\lambda_1(t_{i+1}-t_i^+)} + \frac{c}{\lambda_2-\lambda_1} \left( x_i^+ - \frac{d+\lambda_1}{c} y_i^+ \right) e^{\lambda_2(t_{i+1}-t_i^+)}, \end{cases} \quad (4)$$

其中  $\lambda_1 = \frac{-a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{-a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$ ,  $t_i^+ = t_i$ .

对系统(2)的阶- $k$  周期解  $X(t)$ , 令  $P = \underbrace{(P_1 \circ P_1^+) \circ (P_2 \circ P_2^+) \circ \dots \circ (P_k \circ P_k^+)}_{\text{共}k\text{个}}$ , 于是复合映射  $P$

满足  $P(x_i, E) = (x_i, E)$ . 对于扰动  $\Delta X_i = \Delta(x_i, y_i)^T$ , 周期解  $X(t)$  的稳定性分析变分方程为

$$\Delta X_{i+T} = DP \cdot \Delta X_i,$$

其中  $DP = \underbrace{(DP_1^+ \cdot DP_1) \cdot (DP_2^+ \cdot DP_2) \cdot \dots \cdot (DP_k^+ \cdot DP_k)}_{\text{共}k\text{个}}$ ,  $DP_i^+ = \left( \frac{\partial X_i^+}{\partial X_i} \right) = \frac{\partial(x_i^+, y_i^+)}{\partial(x_i, y_i)} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_i^+}{\partial x_i} & \frac{\partial x_i^+}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_i^+}{\partial x_i} & \frac{\partial y_i^+}{\partial y_i} \end{pmatrix}, DP_i = \left( \frac{\partial X_{i+1}}{\partial X_i^+} \right) = \frac{\partial(x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial(x_i^+, y_i^+)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i^+} & \frac{\partial x_{i+1}}{\partial y_i^+} \\ \frac{\partial y_{i+1}}{\partial x_i^+} & \frac{\partial y_{i+1}}{\partial y_i^+} \end{pmatrix}, i=1, 2, \dots, k. \text{ 作广义特征方程} \\ \det(DP - \lambda I) = 0, \quad (5)$$

其中  $I$  为单位矩阵. 求出周期运动  $X(t)$  的广义特征值  $\alpha$  和  $\beta$ , 由特征值  $\alpha$  和  $\beta$  的符号及模的大小<sup>[8]</sup> 可得如下结论:

**定理2** 设  $X(t)$  是系统(2)的阶- $k$  周期解, 则当  $\alpha, \beta$  的模均小于1时,  $X(t)$  是稳定的; 当  $\alpha, \beta$  中至少有一个模大于1时,  $X(t)$  是不稳定的.

**推论1** 若  $X(t)$  是系统(2)的阶-1 周期解, 则

$$DP = \left[ \begin{aligned} &(1+p)\left(\frac{d+\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 T} + \frac{d+\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 T}\right) - (1+p)\left[\frac{(d+\lambda_1)(d+\lambda_2)}{c(\lambda_1-\lambda_2)}e^{\lambda_1 T} + \frac{(d+\lambda_1)(d+\lambda_2)}{c(\lambda_2-\lambda_1)}e^{\lambda_2 T}\right] \\ &(1+q)\left(\frac{c}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 T} + \frac{c}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 T}\right) - (1+q)\left(\frac{d+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 T} + \frac{d+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 T}\right) \end{aligned} \right]^k,$$

其中  $T$  为  $X(t)$  的周期.

注: 推论 1 的证明由映射  $P_i^+$  和映射  $P_i$  的控制方程即可求得.

**推论 2** 设  $X(t)$  是系统(2) 的过  $(x_i, E)$  的阶-1 周期解, 则

$$\lambda_1 - \lambda_2 = [(d + \lambda_1)(1 + p) - (d + \lambda_2)(1 + q)]e^{\lambda_1 T} + [(1 + q)(d + \lambda_1) - (1 + p)(d + \lambda_2)]e^{\lambda_2 T} - [(1 + p)(1 + q)(\lambda_1 - \lambda_2)]e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T}. \tag{6}$$

**证明** 若  $X(t)$  是系统(2) 的从  $(x_i, E)$  出发的阶-1 周期解, 则

$$\begin{cases} x_i = \frac{d+\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}[(1+p)x_i - \frac{d+\lambda_2}{c}(1+q)ET]e^{\lambda_1 T} + \frac{d+\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}[(1+p)x_i - \frac{d+\lambda_1}{c}(1+q)ET]e^{\lambda_2 T}, \\ ET = \frac{c}{\lambda_1-\lambda_2}[(1+p)x_i - \frac{d+\lambda_2}{c}(1+q)ET]e^{\lambda_1 T} + \frac{c}{\lambda_2-\lambda_1}[(1+p)x_i - \frac{d+\lambda_1}{c}(1+q)ET]e^{\lambda_2 T}. \end{cases}$$

整理上式得

$$\frac{\frac{(d+\lambda_1)(d+\lambda_2)}{c(\lambda_1-\lambda_2)}(1+q)(e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T})}{\frac{d+\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}(1+p)e^{\lambda_1 T} + \frac{d+\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(1+p)e^{\lambda_2 T} - 1} = \frac{1 + \frac{1+q}{\lambda_1-\lambda_2}[(d+\lambda_2)e^{\lambda_1 T} - (d+\lambda_1)e^{\lambda_2 T}]}{\frac{c(1+p)}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T})},$$

由上式可知式(6) 成立.

3 模拟与仿真

考虑如下具依赖状态的脉冲单种群系统:

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 0.8x - 0.5y \end{aligned} \right\} y < 5, \\ \left. \begin{aligned} \Delta x &= -0.2x \\ \Delta y &= -0.8y \end{aligned} \right\} y = 5. \end{cases} \tag{7}$$

系统(7) 的阶-1 周期解存在, 如图 1(a) 中的曲线所示, 该周期解的初值取为  $(6.6907, 5)$ . 图 1(b) 中的曲线表示系统(7) 的从  $(6.6802, 5)$  出发的轨线. 由定理 2 可知, 此时系统(7) 的阶-1 周期解是稳定的.

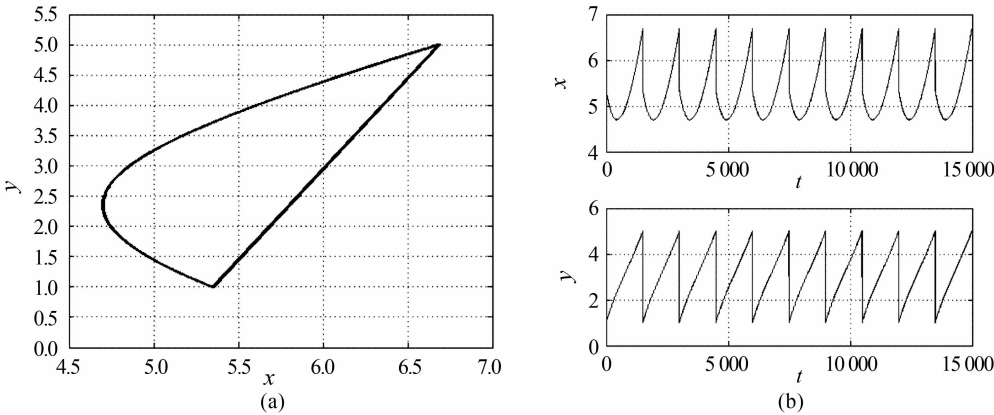


图 1 系统(7) 的周期解 (参数  $a=1, b=2, c=0.8, d=0.5, p=-0.2, q=-0.8$ )

thetic gene cluster from *Micromonospora inyoensis* [J]. *Biotechnol Lett*, 2009,31(3):449-455.

[10] GenBank Database. *Micromonospora inyonensis* hypothetical protein gene, complete cds [DB/OL]. [2016-01-12]. <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/nuccore/327197283>.

[11] 张国华,洪文荣,饶以群,等. 小单孢菌 3',4'-双脱羟基酶基因功能的研究[J]. 中国药科大学学报, 2011,42(1):88-91.

[12] 邵雷,陈俊生,陈代杰,等. 西索米星的生物合成途径和其中 3',4'位双脱羟基转化机制的研究[C]//2008 年中国微生物学会学术年会论文摘要集. 中国微生物学会,2008.

[13] Park J W, Joonghong J S, Parajuli N, et al. Genetic dissection of the biosynthetic route to gentamicin A2 by heterologous expression of its minimal gene set[J]. *Proceeding of the National Academy of Science of the United States of America*, 2008, 105(24):8399-8404.

[14] 张国华,洪文荣,沈剑锋,等. 依纽小单孢菌接合转移体系的构建[J]. 生物技术通报,2011(11):216-220.

[15] 朱碧银,洪文荣,严绍德,等. 黑暗链霉菌 DNA 同源重组系统的构建[J]. 生物技术通报,2011,17(4):162-166.

[16] Hong W R, Yan S D. Engineering *Streptomyces tenebrarius* to synthesize single component of carbamoyl tobramycin [J]. *Lett Appl Microbiol*, 2012,55(1):33-39.

[17] Bierman M, Logan R, Obrien K, et al. Plasmid cloning vectors for the conjugal transfer of DNA from *Escherichia coli* to *Streptomyces* spp. [J]. *Gene*, 1992,116(1):43-49.

.....

(上接第 102 页)

参考文献:

[1] Sun Chenlan. *Models and Research Methods Of Mathematical Ecology* [M]. Beijing: Science Press, 1988:199-231.

[2] 陈兰荪,陈健. 非线性生物动力系统[M]. 北京:科学出版社,1993:215-226.

[3] Jiang Guirong. Complex dynamics of a Holling type II prey-predator system with state feedback control [J]. *Chaos, Solutions and Fractals*, 2007,31(2):448-461.

[4] 宋新宇,郭红建,师向云. 脉冲微分方程理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2011:208-209.

[5] Zhang Yujuan, Liu Bing, Chen Lansun. Extinction and permanence of a two-prey one-predator system with impulsive effect[J]. *IMA Journal of Mathematical Medicine and Biology*, 2003, 20(4):309-325.

[6] 黄明湛,宋新宇. 具有状态反馈脉冲控制的种群互惠动力系统的研究[J]. 系统科学与数学,2012,32(3):265-276.

[7] Zhao Jingdong, Guo Xin. Average conditions for competitive system in a nonautonomous two dimensional Lotka-Volterra system[J]. *Mathematical and Computer Modeling*, 2013,57(5):1131-1138.

[8] Luo Albert C J. *Discrete and Switching Dynamical System* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2012:167-204.