文章编号: 1004-4353(2016)02-0095-04

具有系数 s 的 b-D-度量空间上 4 个映射的唯一公共不动点

许明星， 黄鑫， 朴勇杰*
(延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要: 引进新的具有系数 s 的 b-D-度量空间，在给出该空间上序列的柯西判别法后，利用给定的 4 个自映射 S，T，I，J 构造收敛序列，并证明了该序列的极限是 S，T，I，J 的唯一公共不动点. 所得结论是 Banach 型、Kannan 型及变形的 Kannan 型(公共)不动点定理在具有系数 s 的 b-D-度量空间上的推广结果.

关键词: b-D-度量空间；弱相容；重合点；公共不动点
中图分类号: O177.3;O189.11　　**文献标识码:** A

Unique common fixed points for four mappings on b-D-metric spaces with a coefficient s

XU Mingxing，　HUANG Xin，　PIAO Yongjie*
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We introduce a new metric space, i. e. , b-D-metric spaces with a coefficient s, and give the Cauchy test for the given sequence on this space, then we use the given four self-mappings S, T, I, J to construct a convergent sequence and prove that the limit of the sequence is the unique common fixed point of S, T, I, J. The obtained results are the generalizations of Banach type, Kannan type and variant Kannan type (common) fixed point theorems on b-D-metric spaces with a coefficient s.

Keywords: b-D-metric space; weakly compatible; coincidence point; common fixed point

1　基本概念及引理

1992 年，B. Dhage[1] 引进了 D-度量空间，并在该空间上得到收缩型映射的不动点定理. 文献[2-9]的作者们进一步讨论了 D-度量空间上不动点和公共不动点以及重合的点的存在性问题，并得到了一些重要结果. 其中文献[9]给出了映射族的唯一公共不动点存在定理(定理 A)，并在 D-度量空间上给出了 Banach 型和 I-膨胀型映射的不动点定理以及无穷多个映射的公共不动点存在定理.

定理 A　设 X 是完备的具有 D-有界数 M 的 D-度量空间，$S,T,I,J:X\to X$ 是 4 个映射使得 $SX\subset JX$，$TX\subset IX$ 且 I 或 J 是满映射. 假设对任何 $x,y,z\in X$，有 $D(Sx,Ty,z)\leqslant qD(Ix,Jy,z)$，其中 $0\leqslant q<1$，则 $\{T,J\}$ 及 $\{S,I\}$ 有相同的唯一重合的点. 进一步，如果 $\{T,J\}$ 及 $\{S,I\}$ 分别是弱相容的，则 $\{S,T,I,J\}$ 有唯一公共不动点.

本文首先推广 D-度量空间的概念，给出具有系数 s 的 b-D-度量空间，在得到该空间上序列的柯西判别准则后，通过改进定理 A 中的收缩-膨胀条件，讨论 4 个映射的公共不动点存在问题，以推广和改进

收稿日期: 2016-04-07　　**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11361064)
* **通信作者:** 朴勇杰(1962—)，男，理学博士，教授，研究方向为非线性分析及不动点理论.

定理A.最后,利用注记说明所得结论是在具有系数 s 的 b-D-度量空间上对Kannan型[10]、变形的Kannan型[11]、膨胀型[12]以及其他形式的不动点和公共不动点存在定理的推广结果.

定义1 设 X 是非空集合, $D: X\times X\times X\to \mathbf{R}^{+}=[0,+\infty)$ 为映射, $s\in[1,\infty)$. 称 (X,D) 为具有系数 s 的 b-D-度量空间,如果:

(i) $D(x,y,z)=0 \Leftrightarrow x=y=z$;

(ii) 对任何 $x,y,z\in X$, $D(x,y,z)=D(u,v,w)$, $\forall\{u,v,w\}=\{x,y,z\}$;

(iii) 对任何 $x,y,z,a\in X$, $D(x,y,z)\leqslant s[D(x,y,a)+D(x,a,z)+D(a,y,z)]$.

显然,若 $s=1$,则具有系数 s 的 b-D-度量空间就是通常的 D-度量空间[7-8].

定义2 设 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是具有系数 s 的 b-D-度量空间 X 中的序列, $x\in X$. 称 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ D-收敛于 x 是指 $\lim_{m,n\to+\infty}D(x_m,x_n,x)=0$; $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 为 D-柯西是指 $\lim_{m,n,p\to+\infty}D(x_m,x_n,x_p)=0$; (X,D) 是完备的是指 X 中每个 D-柯西序列都 D-收敛于 X 中的点;称一个子集 $S\subset X$ 是有界的是指存在一个常数 $M\geqslant 0$ 满足 $D(x,y,z)\leqslant M$, $\forall x,y,z\in X$. 此时,称 M 是 S 的一个 D-有界数.

本文假设 D-度量关于任何2个变元是连续的.

定义3[13-14] 设 X 是非空集合, $f,g: X\to X$ 是2个映射. 如果存在 $x,w\in X$ 使得 $w=fx=gx$,则称 x 是 $\{f,g\}$ 的重合点, w 是 $\{f,g\}$ 的重合的点.

定义4[15] 设 X 是非空集合, $f,g: X\to X$ 是2个映射. 如果 $x\in X$ 且 $fx=gx$ 时 $fgx=gfx$ 成立,则称 $\{f,g\}$ 是弱相容的.

引理1[13-14] 如果 $f,g: X\to X$ 是弱相容的且有唯一的重合的点 $w=fx=gx$,则 w 是 f 和 g 的唯一公共不动点.

2 唯一公共不动点

定理1 (柯西原理)设 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是具有系数 s 和 D 有界数 M 的 b-D-度量空间 X 中的序列. 如果对任何 $n,m\in\mathbf{N}$ 且 $m>n$,成立 $D(x_n,x_{n+1},x_m)\leqslant \alpha^n M$,其中 $\alpha\geqslant 0$ 且满足 $\alpha s<1$,则 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是 D-柯西序列.

证明 首先,由条件易知 $\alpha\in[0,1)$. 对任何正整数 l,m,n 且 $n>m>l$,有

$$
\begin{aligned}
&D(x_l,x_m,x_n)\leqslant s[D(x_l,x_{l+1},x_m)+D(x_l,x_{l+1},x_n)+D(x_{l+1},x_m,x_n)]\leqslant\\
&\quad s[2\alpha^l M+D(x_{l+1},x_m,x_n)]\leqslant 2s\alpha^l M+s^2[D(x_{l+1},x_{l+2},x_m)+D(x_{l+1},x_{l+2},x_n)+\\
&\quad D(x_{l+2},x_m,x_n)]\leqslant 2s\alpha^l M+2s^2\alpha^{l+1}M+s^3[D(x_{l+2},x_{l+3},x_m)+D(x_{l+2},x_{l+3},x_n)+\\
&\quad D(x_{l+3},x_m,x_n)]\leqslant 2s\alpha^l M+2s^2\alpha^{l+1}M+2s^3\alpha^{l+2}M+s^3D(x_{l+3},x_m,x_n)\leqslant\cdots\leqslant\\
&\quad 2s\alpha^l M+2s^2\alpha^{l+1}M+\cdots+2s^{m-l-2}\alpha^{m-3}+s^{m-l-2}D(x_{m-2},x_m,x_n)\leqslant\\
&\quad 2s\alpha^l M+2s^2\alpha^{l+1}M+\cdots+2s^{m-l-2}\alpha^{m-3}+s^{m-l-2}[2s\alpha^{m-2}M+s\alpha^{m-1}M]\leqslant\\
&\quad 2s\alpha^l M+2s^2\alpha^{l+1}M+\cdots+2s^{m-l-2}\alpha^{m-3}+2s^{m-l-1}\alpha^{m-2}M+2s^{m-l}\alpha^{m-1}M\leqslant\\
&\quad 2s\alpha^l M[1+(s\alpha)+(s\alpha)^2+\cdots+(s\alpha)^{m-l-1}]\leqslant\frac{2s\alpha^l M}{1-(s\alpha)};
\end{aligned}
$$

因此 $\lim_{l,m,n\to\infty}D(x_l,x_m,x_n)=0$,于是 $\{x_n\}$ 是 D-柯西序列.

定理2 设 X 是完备的具有 D-有界数 M 和系数 s 的 b-D-度量空间, $S,T,I,J: X\to X$ 是4个映射使得 $SX\subset JX$, $TX\subset IX$ 且 I 或 J 是满的. 假设对任何 $x,y,z\in X$,有

$$D(Sx,Ty,z)\leqslant aD(Ix,Jy,z)+bD(Ix,Sx,z)+cD(Jy,Ty,z),\tag{1}$$

其中 $a,b,c\geqslant 0$ 满足 $s(a+b)+c<1$, $s(a+c)+b<1$, $2s\max\{b,c\}<1$. 如果 $\{T,J\}$ 及 $\{S,I\}$ 分别是弱相容的,则 $\{S,T,I,J\}$ 有唯一公共不动点.

证明 任选 $x_0\in X$. 根据 $SX\subset JX$ 及 $TX\subset IX$ 可构造满足关系式(2)的2个序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$:

$$y_{2n}=Sx_{2n}=Jx_{2n+1},\ y_{2n+1}=Tx_{2n+1}=Ix_{2n+2},\ n=0,1,2,\cdots. \tag{2}$$

对任何固定的 $n=0,1,2,\cdots$ 及 $z\in X$,有

$$D(y_{2n},y_{2n+1},z)=D(Sx_{2n},Tx_{2n+1},z)\leqslant aD(Ix_{2n},Jx_{2n+1},z)+bD(Ix_{2n},Sx_{2n},z)+$$
$$cD(Jx_{2n+1},Tx_{2n+1},z)=aD(y_{2n-1},y_{2n},z)+bD(y_{2n-1},y_{2n},z)+cD(y_{2n},y_{2n+1},z),$$

整理得

$$D(y_{2n},y_{2n+1},z)\leqslant(\frac{a+b}{1-c})D(y_{2n-1},y_{2n},z). \tag{3}$$

类似地,有 $D(y_{2n-1},y_{2n},z)=D(Sx_{2n},Tx_{2n-1},z)\leqslant aD(Ix_{2n},Jx_{2n-1},z)+bD(Ix_{2n},Sx_{2n},z)+cD(Jx_{2n-1},Tx_{2n-1},z)=aD(y_{2n-1},y_{2n-2},z)+bD(y_{2n-1},y_{2n},z)+cD(y_{2n-2},y_{2n-1},z)$,整理得

$$D(y_{2n-1},y_{2n},z)\leqslant(\frac{a+c}{1-b})D(y_{2n-2},y_{2n-1},z). \tag{4}$$

令 $\alpha=\max\{\frac{a+b}{1-c},\frac{a+c}{1-b}\}$,则 $\alpha\geqslant 0$ 且 $\alpha s<1$. 由式(3)和(4)及归纳原理得到对任何 $n\in\mathbf{N}$ 及 $z\in X$,有 $D(y_{n+1},y_{n+2},z)\leqslant\alpha D(y_n,y_{n+1},z)\leqslant\cdots\leqslant\alpha^{n+1}D(y_0,y_1,z)\leqslant\alpha^{n+1}M$. 于是对任何 $n,p\in\mathbf{N}$,有

$$D(y_n,y_{n+1},y_{n+p})\leqslant\alpha^{n+1}M. \tag{5}$$

根据定理 1 知$\{y_n\}$是 D-柯西序列,再由 X 的完备性可知存在 $u\in X$ 使得 $\lim_{n\to\infty}y_n=u$.

假设 J 是满射,则存在 $v\in X$ 使得 $u=Jv$. 对任何 $n=1,2,\cdots$,有

$$D(u,Tv,u)\leqslant s[D(y_{2n},Tv,u)+D(u,y_{2n},u)+D(u,Tv,y_{2n})]=2sD(Sx_{2n},Tv,u)+$$
$$sD(u,y_{2n},u)\leqslant 2s[aD(Ix_{2n},Jv,u)+bD(Ix_{2n},Sx_{2n},u)+cD(Jv,Tv,u)]+$$
$$sD(u,y_{2n},u)=2s[aD(y_{2n-1},u,u)+bD(y_{2n-1},y_{2n},u)+cD(u,Tv,u)]+sD(u,y_{2n},u).$$

令 $n\to\infty$,则由上式得到 $D(u,Tv,u)\leqslant 2scD(u,Tv,u)$,因此由 $2sc<1$ 得到 $D(u,Tv,u)=0$,于是 $Tv=u=Jv$,即v是$\{T,J\}$的重合点,u是$\{T,J\}$的重合的点.

因为 $u=Tv\in TX\subset IX$,存在 $w\in X$ 使得 $u=Iw$. 对任何 $n=1,2,\cdots$,有

$$D(Sw,u,u)\leqslant s[D(y_{2n+1},u,u)+D(Sw,y_{2n+1},u)+D(Sw,u,y_{2n+1})]=$$
$$sD(y_{2n+1},u,u)+2sD(Sw,Tx_{2n+1},u)\leqslant sD(y_{2n+1},u,u)+$$
$$2s[aD(Iw,Jx_{2n+1},u)+bD(Iw,Sw,u)+cD(Jx_{2n+1},Tx_{2n+1},u)]=$$
$$sD(y_{2n+1},u,u)+2s[aD(u,y_{2n},u)+bD(u,Sw,u)+cD(y_{2n},y_{2n+1},u)].$$

令 $n\to\infty$,则根据上式和 $2sb<1$ 得到 $D(Sw,u,u)=0$,因此 $Sw=u=Iw$,即 w 是$\{S,I\}$的重合点,u是$\{S,I\}$的重合的点.

下证重合点的唯一性. 假设 $z=Sx=Ix$ 也是$\{S,I\}$的重合的点,则根据式(1)可得

$$D(z,u,u)=D(Sx,Tv,u)\leqslant aD(Ix,Jv,u)+bD(Ix,Sx,u)+cD(Jv,Tv,u)=$$
$$aD(z,u,u)+bD(z,z,u),$$

因此 $D(z,u,u)\leqslant\frac{b}{1-a}D(z,z,u)$. 类似地,$D(z,z,u)=D(Sx,Tv,z)\leqslant aD(Ix,Jv,z)+bD(Ix,Sx,z)+cD(Jv,Tv,z)=aD(z,u,z)+cD(u,u,z)$,因此 $D(z,z,u)\leqslant\frac{c}{1-a}D(z,u,u)$. 结合上述 2 个结论得 $D(z,z,u)\leqslant\frac{c}{1-a}\frac{b}{1-a}D(z,z,u)$,再由$\frac{c}{1-a}\frac{b}{1-a}<1$可得 $D(z,z,u)=0$,即有 $z=u$. 这说明 u 是$\{S,I\}$的唯一重合的点. 类似地,可证明 u 也是$\{T,J\}$的唯一重合的点.

因为$\{T,J\}$及$\{S,I\}$分别是弱相容的,因此根据引理 1 可知 u 是$\{T,J\}$及$\{S,I\}$的唯一公共不动点,于是 u 是$\{S,T,I,J\}$的一个公共不动点. 显然,u 是$\{S,T,I,J\}$的唯一公共不动点.

如果 I 是满映射,可类似地证得相同的结果,本文在此省略.

注记 1　如果 $s=1$ 且 $b=c$，则定理 2 变成文献[9]中的定理 1(即定理 A)，由此推广和改进了很多公共不动点和不动点定理. 另外，如果 $I=J=1_X$，则定理 2 是具有系数 s 的 b-D-度量空间上收缩型映射族的公共不动点结果. 进一步，当 $S=T$，$b=c=0$ 时，定理 1 变成 Banach 型不动点定理；当 $S=T$，$a=0$，$b=c$ 时，定理 2 变成 Kannan 型不动点定理[10]；当 $S=T$，$a=b=c$ 时，定理 2 变成变形的 Kannan 型不动点定理[11]；如果 $S=T=1_X$，则定理 2 变成具有系数 s 的 b-D-度量空间上膨胀型映射族的公共不动点定理；当 $I=J$ 时，定理 2 是膨胀映射的不动点定理[12].

定义 5[9]　设 $\{f_i\}_1^\infty,\{g_i\}_1^\infty,\{s_i\}_1^\infty,\{t_i\}_1^\infty: X\to X$ 为映射族. 令 $\mathscr{F}=\{f_i,g_i,s_i,t_i\}_1^\infty$ 且 $\mathscr{F}_i=\{f_i,g_i,s_i,t_i\}$，$\forall i\in\mathbf{N}$. 如果对任何 $i,j\in\mathbf{N}$ 且 $i\neq j$，只要 $A\in\mathscr{F}_i$，$B\in\mathscr{F}_j$ 时 $AB=BA$ 成立，则称 $\mathscr{F}$ 是弱可交换的.

定理 3　设 X 是完备的具有 D-有界数 M 和系数 s 的 b-D-度量空间，对每个 $i\in\mathbf{N}$，$S_i,T_i,I_i,J_i: X\to X$ 是 4 个映射，m_i,n_i,h_i,k_i 是 4 个正整数使得 $S_i^{m_i}X\subset J_i^{k_i}X$，$T_i^{n_i}X\subset I_i^{h_i}X$ 且 I_i 或 J_i 是满的. 假设对任何 $x,y,z\in X$ 及 $i\in\mathbf{N}$，有

$$D(S_i^{m_i}x,T_i^{n_i}y,z)\leqslant a_iD(I_i^{h_i}x,J_i^{k_i}y,z)+b_iD(I_i^{h_i}x,S_i^{m_i}x,z)+c_iD(J_i^{k_i}y,T_i^{n_i}y,z),\tag{6}$$

其中 $a_i,b_i,c_i\geqslant 0$ 满足 $s(a_i+b_i)+c_i<1$，$s(a_i+c_i)+b_i<1$，$2s\max\{b_i,c_i\}<1$. 如果 $\{T_i^{m_i},J_i^{k_i}\}$ 及 $\{S_i^{n_i},I_i^{h_i}\}$ 分别是弱相容的，$\mathscr{F}=\{S_i,T_i,I_i,J_i\}_1^\infty$ 是弱可交换的，则 $\mathscr{F}=\{S_i,T_i,I_i,J_i\}_1^\infty$ 有唯一公共不动点.

证明　采用类似于文献[9]中的方法即可得证，故本文在此省略.

参考文献：

[1] Dhage B. Generalized metric spaces and mappings with fixed points[J]. Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 1992,84(4):329-336.

[2] Singh Bijendra, Jain Shishir, Jain Shobha. Semicompatibility and fixed point theorems in an unbounded D-metric space[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Science, 2005,2005(5):789-801.

[3] Dhage B, Arya S, Ume J. A general lemma for fixed point theorems involving more than two maps in D-metric spaces with applications[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Science, 2003,2003(11):661-672.

[4] Dhage B, Asha A, Kang S. On common fixed points of pairs of a single and a multivalued coincidentally commuting mappings in D-metric spaces[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Science, 2003,2003(40):2519-2539.

[5] Singh B, Jain S. Common fixed points of weak-compatible maps on D-metric space[J]. Journal of ChungCheong Mathematical Society, 2004,17(2):111-124.

[6] Singh B, Sharma R. Common fixed points via compatible maps in D-metric spaces[J]. Rad Mat, 2002,11(2):145-153.

[7] Gajić L. On a common fixed point for sequence of selfmappings in generalized metric space[J]. Novi Sad J Math, 2006,36(2):153-156.

[8] 朴勇杰，龚学，徐佳宁，等. D-度量空间上满足膨胀条件的两个映射的唯一公共不动点[J]. 黑龙江大学学报(自然科学版)，2015,32(4):428-432.

[9] 龚学，徐佳宁，吴凡，等. 完备的 D-度量空间上具有收缩型条件的映射族的唯一公共不动点[J]. 延边大学学报(自然科学版)，2015,41(1):1-4.

[10] Kannan R. Some results on fixed points[J]. Bull Calcutta Math, 1968,60:71-76.

[11] Shukla D P, Tiwari S K. Unique fixed point for s-weak contractive mappings[J]. Gen Math, 2011,4:28-34.

[12] 王尚志，李伯渝，高智民. 膨胀映射及其不动点定理[J]. 数学进展，1982,11(2):149-153.

[13] Abbas M, Jungck G. Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006,341(1):416-420.

[14] Han Y, Xu S Y. New common fixed point results for four maps on cone metric spaces[J]. Applied Mathematics, 2011,2:1114-1118.

[15] Bari C D, Vetro P. ϕ-pairs and common fixed points in cone metric spaces[J]. Rendiconti del circolo Matematico Palermo, 2008,57:279-285.