文章编号: 1004-4353(2016)01-0015-04

一类混合二阶 q-对称差分边值问题解的存在性

田野， 张翼菲， 葛琦*
（延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002）

摘要: 研究了一类混合二阶 q-对称差分方程解的存在性.首先分析了格林函数的性质,然后在 Banach 代数中利用满足 Lipschitz 条件的不动点定理,建立了该方程解存在的充分条件,最后通过举例验证了所得结论的合理性.

关键词: 混合二阶 q-对称差分; 不动点定理; 解的存在性
中图分类号: O175.6　　**文献标识码:** A

Existence of solutions for a hybrid second-order q-symmetric difference boundary value problems

TIAN Ye, ZHANG Jifei, GE Qi*
(*Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We study the existence of solutions for a hybrid second-order q-symmetric difference equation. Firstly, some characteristics of the Green function were analyzed, then we obtained sufficient condition for the existence of solutions to this equation using fixed point theorems with Lipschitz condition in Banach algebra. Finally, the main result were verified by an example.

Keywords: hybrid second-order q-symmetric difference; fixed point theorem; existence of solutions

0 引言

近年来,量子微积分理论的研究逐渐受到人们的广泛关注.量子微积分作为一种不含极限的微积分,其理论在某些物理领域发挥了重要的作用[1-5],例如宇宙弦和黑洞[1]、保形量子力学[2]、核物理和高能物理[3]等领域.量子微积分有 2 种类型,一种是 q-微积分,另一种是 h-微积分.q-微积分的理论是基于 q-导数 $\dfrac{f(qt)-f(t)}{(q-1)t}$ 的概念之上,其中 q 是一个固定的数,且 $q\neq 1$, $t\neq 0$, f 是一个实函数;而 q-对称量子微积分的理论是基于 q-对称导数 $\dfrac{f(qt)-f(q^{-1}t)}{(q-q^{-1})t}$ 的概念之上,其中 $q\in(0,1)$, $t\neq 0$, f 是一个实函数.q-对称量子微积分的理论在量子力学等领域中有着重要的应用[6].2012 年,Brito 等[7]引入了 q-对称积分的概念,研究了 q-对称变分法,进一步丰富了 q-对称量子微积分的理论;2015 年,侯成敏等[8]研究了一类二阶 q-对称差分方程两点边值问题解的存在性.目前,关于 q-对称差分方程解的存在性的研究相对较少,因此本文研究如下混合二阶 q-对称差分边值问题:

收稿日期: 2016-02-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11161049);吉林省教育厅"十二五"科技项目(吉教科合字[2015]第 36 号)
* **通信作者:** 葛琦(1975—),女,副教授,研究方向为微分方程理论及其应用.

$$\begin{cases}\widetilde{D}_q^2\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right]+g(t,x(t))=0,\ 0<t<1;\\ x(0)=x(1)=0.(2)\end{cases}\tag{1}$$

其中 $0<q<1$, $f:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 为连续函数,函数 $g:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的.

1 预备知识

设 $q\in(0,1)$,并设 I 是 $\mathbf{R}$ 中包含 0 的区间(有界或无界),记 $I^q:=qI:=\{qx:x\in I\}$,可见 $I^q\subseteq I$.

定义 1[7] 设 f 是一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的实函数,函数 f 的 q-对称导数定义为:

$$\widetilde{D}_q[f](t)=\frac{f(qt)-f(q^{-1}t)}{(q-q^{-1})t},\ t\in I^q\backslash\{0\},$$

如果 f 在 0 处可微,则 $\widetilde{D}_q[f](0):=f'(0)$. 函数 f 的高阶 q-对称导数定义为:

$$\widetilde{D}_q^0[f](t)=f(t),\ \widetilde{D}_q^n[f](t)=\widetilde{D}_q\widetilde{D}_q^{n-1}[f](t),\ n\in\mathbf{N}^+.$$

定义 2[7] 设 $a,b\in I$,且 $a<b$,函数 $f:I\to\mathbf{R}$,函数 f 在$[a,b]$上的 q-对称积分定义为:

$$\int_a^b f(t)\tilde{\mathrm{d}}_q t=\int_0^b f(t)\tilde{\mathrm{d}}_q t-\int_0^a f(t)\tilde{\mathrm{d}}_q t,$$

其中 $\tilde{I}_{q,0}[f](x)=\int_0^x f(t)\tilde{\mathrm{d}}_q t=(q^{-1}-q)x\sum_{n=0}^{+\infty}q^{2n+1}f(q^{2n+1}x)=(1-q^2)x\sum_{n=0}^{+\infty}q^{2n}f(q^{2n+1}x)$, $x\in I$. 函数 f 的高阶 q-对称积分定义为:$\tilde{I}_{q,0}^0[f](x)=f(x)$, $\tilde{I}_{q,0}^n[f](x)=\tilde{I}_{q,0}\tilde{I}_{q,0}^{n-1}[f](x)$, $n\in\mathbf{N}^+$.

根据 f 的高阶 q-对称积分定义,易得

$$\tilde{I}_{q,0}^2[f](x)=\int_0^{qx}(x-t)f(t)\tilde{\mathrm{d}}_q t.\tag{2}$$

引理 1[7] 设函数 $f:I\to\mathbf{R}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $\widetilde{D}_q\tilde{I}_{q,0}[f](x)=f(x)$, $\tilde{I}_{q,0}\widetilde{D}_q[f](x)=f(x)-f(0)$.

根据引理 1 易得:

$$\tilde{I}_{q,0}^2\widetilde{D}_q^2[f](x)=f(x)+c_0+c_1x,\ c_0,c_1\in\mathbf{R}.\tag{3}$$

关于 q-对称导数和 q-对称积分的相关性质可参看文献[7].

引理 2[9] 设 S 是 Banach 代数 X 上的一个非空的、有界闭凸子集;设 $A:X\to X$ 和 $B:S\to X$ 是 2 个算子,且满足:

(i) A 满足 Lipschitz 条件,其中 L 为 Lipschitz 常数;

(ii) B 是完全连续的;

(iii) 对于 $\forall y\in S$,有 $x=AxBy\Rightarrow x\in S$;

(iv) $LM<1$,其中 $M=\|B(S)\|=\sup\{\|B(x)\|:x\in S\}$.

那么算子方程 $AxBx=x$ 在 S 中有 1 个解.

引理 3 设 $0<q<1$, $f:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 为连续函数,$h:[0,1]\to\mathbf{R}$ 是连续函数,则边值问题

$$\begin{cases}\widetilde{D}_q^2\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right]+h(t)=0,\ 0<t<1;\\ x(0)=x(1)=0\end{cases}\tag{4}$$

有唯一解 $x(t)=f(t,x(t))\int_0^q G(t,s)h(s)\tilde{\mathrm{d}}_q s$,其中格林函数

$$G(t,s)=\begin{cases}s(1-t),\ 0\leqslant s\leqslant qt\leqslant q,\\ t(1-s),\ 0\leqslant qt\leqslant s\leqslant q,\end{cases}\ t\in[0,1].\tag{5}$$

证明 由式(3)知 $\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}=C_0+C_1t-\tilde{I}_{q,0}^2h(t)\ (C_0,C_1\in\mathbf{R})$,即 $x(t)=f(t,x(t))[C_0+C_1t-\int_0^{qt}(t-s)h(s)\tilde{\mathrm{d}}_q s]$. 根据条件 $x(0)=0$ 得 $C_0=0$,由条件 $x(1)=0$ 得 $C_1=\int_0^q(1-s)h(s)\tilde{\mathrm{d}}_q s$. 于是边值问

题(4) 的解为

$$x(t)=f(t,x(t))\left[\int_0^q t(1-s)h(s)\tilde{\mathrm{d}}_q s-\int_0^{qt}(t-s)h(s)\tilde{\mathrm{d}}_q s\right]=f(t,x(t))\int_0^q G(t,s)h(s)\tilde{\mathrm{d}}_q s,$$

其中 $G(t,s)$ 如式(5) 所示.

引理 4　Green 函数 $G(t,s)$ 具有以下性质：

(i) $G(t,s)\geqslant 0$, $(t,s)\in[0,1]\times[0,q]$；

(ii) $\max\limits_{t\in[0,1]} G(t,s)\leqslant q^{-1}s(1-s)$, $s\in[0,q]$.

证明　由式(5) 知 $G(t,s)\geqslant 0$, $(t,s)\in[0,1]\times[0,q]$ 显然成立. 当 $0\leqslant qt\leqslant s\leqslant q$ 时，$G(t,s)=t(1-s)$ 关于 t 是递增的，因此 $G(t,s)=t(1-s)\leqslant q^{-1}s(1-s)$；当 $0\leqslant s\leqslant qt\leqslant q$ 时，$G(t,s)=s(1-t)$ 关于 t 是递减的，因此 $G(t,s)=s(1-t)\leqslant s(1-q^{-1}s)\leqslant q^{-1}s(1-s)$. 所以有 $\max\limits_{t\in[0,1]} G(t,s)\leqslant q^{-1}s(1-s)$, $s\in[0,q]$.

2　解的存在性

下面将利用引理 2 建立边值问题(1) 的解存在的充分条件. 为此，记 $X=C([0,1],\mathbf{R})$，显然 X 是 Banach 空间，在 X 上赋范数 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$，并且定义乘法 $(xy)(t)=x(t)y(t)(x,y\in X)$. 于是 X 为 Banach 代数. 为了方便，记 $T=\int_0^q q^{-1}s(1-s)\tilde{\mathrm{d}}_q s$，并假设下列条件成立：

(H_1) 存在常数 $\alpha>0$，使得 $|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant\alpha|x-y|$, $t\in[0,1]$, $x,y\in\mathbf{R}$；

(H_2) 存在函数 $\beta(t)\in C([0,1],\mathbf{R}^+)$，使得 $|g(t,x)|\leqslant\beta(t)$, $t\in[0,1]$, $x\in\mathbf{R}$.

定理 1　假设条件(H_1) 和(H_2) 成立，如果 $\alpha T\|\beta\|<1$，那么边值问题(1) 存在 1 个解 $x(t)$, $t\in[0,1]$.

证明　在 $X=C([0,1],\mathbf{R})$ 中定义子集 $S=\{x\in X:\|x\|\leqslant N\}$，其中 $N=\dfrac{F_0T\|\beta\|}{1-\alpha T\|\beta\|}$, $F_0=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t,0)|$. 显然 S 是 X 上的一个有界的闭凸子集. 由引理 3 知，边值问题(1) 等价于如下方程：

$$x(t)=f(t,x(t))\int_0^q G(t,s)g(s,x(s))\tilde{\mathrm{d}}_q s,\ t\in[0,1]. \tag{6}$$

为了应用引理 2，定义 2 个算子 $A:X\to X$ 和 $B:S\to X$ 如下：

$$Ax(t)=f(t,x(t)),\ t\in[0,1];$$

$$Bx(t)=\int_0^q G(t,s)g(s,x(s))\tilde{\mathrm{d}}_q s,\ t\in[0,1].$$

于是方程(6) 可改写为算子方程 $Ax(t)Bx(t)=x(t)$, $t\in[0,1]$. 下证算子 A 和 B 满足引理 2 的所有条件.

首先，证明 A 是 X 上的 Lipschitz 算子. 为此，设 $\forall x,y\in X$，根据条件(H_1) 有

$$|Ax(t)-Ay(t)|=|f(t,x(t))-f(t,y(t))|\leqslant\alpha|x(t)-y(t)|\leqslant\alpha\|x-y\|,\ t\in[0,1].$$

因此，对于 $\forall x,y\in X$，有 $\|Ax-Ay\|\leqslant\alpha\|x-y\|$，其中 α 是 Lipschitz 常数.

其次，证明 B 是 S 到 X 上的连续紧算子. 由 q-对称积分的定义和函数 $g(t,x(t))$ 的连续性易知，B 是 S 上的连续算子. 要证明 B 是 S 上的紧算子，只需表明 $B(S)$ 在 X 上是一致有界，并且是 X 上的等度连续集即可. 为此，一方面根据引理 4 和条件(H_2)，对于 $\forall x\in S$，有

$$|Bx(t)|\leqslant\left|\int_0^q q^{-1}s(1-s)\beta(s)\tilde{\mathrm{d}}_q s\right|\leqslant T\|\beta\|,\ t\in[0,1].$$

所以，有 $\|Bx\|\leqslant T\|\beta\|$, $x\in S$，即 $B(S)$ 是一致有界的. 另一方面，对于 $\forall x\in S$, $\forall t_1,t_2\in[0,1]$，且 $t_1<t_2$，有

$$|Bx(t_2)-Bx(t_1)|\leqslant$$
$$\|\beta\|\left|\int_0^q t_2(1-s)\tilde{\mathrm{d}}_q s-\int_0^{qt_2}(t_2-s)\tilde{\mathrm{d}}_q s-\int_0^q t_1(1-s)\tilde{\mathrm{d}}_q s+\int_0^{qt_1}(t_1-s)\tilde{\mathrm{d}}_q s\right|\leqslant$$
$$\|\beta\|\left[\left|\int_0^q (t_2-t_1)(1-s)\tilde{\mathrm{d}}_q s\right|+\left|\int_0^{qt_1}(t_1-t_2)\tilde{\mathrm{d}}_q s\right|+\left|\int_{qt_1}^{qt_2}(t_2-s)\tilde{\mathrm{d}}_q s\right|\right],$$

于是有 $|Bx(t_2)-Bx(t_1)|\to 0\,(t_1\to t_2)$,即 $B(S)$ 在 X 上是等度连续的. 由 Arzela-Ascoli 定理知 $B(S)$ 是紧的,所以 B 是 S 到 X 的完全连续算子.

接下来证明引理 2 中的条件(iii) 成立. 为此,设 $x\in X$,并且对 $\forall\, y\in S$ 满足 $x=AxBy$. 根据条件(H_1) 有

$$|x(t)|=|Ax(t)|\,|By(t)|=|f(t,x(t))|\left|\int_0^q G(t,s)g(s,y(s))\tilde{\mathrm{d}}_q s\right|\leqslant$$
$$[\,|f(t,x(t))-f(t,0)|+|f(t,0)|\,]\int_0^q q^{-1}s(1-s)\beta(s)\tilde{\mathrm{d}}_q s\leqslant[\alpha|x(t)|+F_0]T\|\beta\|,$$

因此,有 $|x(t)|\leqslant\dfrac{F_0T\|\beta\|}{1-\alpha T\|\beta\|}=N$. 于是,有 $\|x\|\leqslant N$,即 $x\in S$. 这表明引理 2 中的条件(iii) 成立.

最后,设 $M=\|B(S)\|=\sup\{\|Bx\|:x\in S\}$,由于 $M\leqslant T\|\beta\|$,则对于常数 $\alpha>0$,有 $\alpha M\leqslant \alpha T\|\beta\|<1$. 这表明引理 2 中的条件(iv) 成立.

至此,引理 2 中的所有条件均成立. 因此可以得出,算子方程 $AxBx=x$ 在 S 中有 1 个解,即边值问题(1) 在 S 中存在 1 个解 $x(t)$, $t\in[0,1]$.

3 应用举例

例 1 考虑混合二阶 q-对称差分边值问题:

$$\begin{cases}\widetilde{D}^2_{0.5}\left(\dfrac{x(t)}{t\sin x+1}\right)=-t\cos x,\ 0<t<1;\\ x(0)=x(1)=0.\ (10)\end{cases}\tag{7}$$

其中 $q=0.5$, $f(t,x)=t\sin x+1$, $g(t,x)=t\cos x$, $\beta(t)=1$. 这样条件(H_1) 和(H_2) 均成立,根据定义 2 可知 $\int_0^x kt\tilde{\mathrm{d}}_q t=\dfrac{kq}{1+q^2}x^2$, $\int_0^x kt^2\tilde{\mathrm{d}}_q t=\dfrac{kq^2}{1+q^2+q^4}x^3$,由此得 $T=\int_0^{0.5}2s(1-s)\tilde{\mathrm{d}}_q s=\dfrac{16}{105}$. 选取 $\alpha=1$,则 $\alpha T\|\beta\|<1$ 成立,因此边值问题(7) 存在 1 个解.

参考文献:

[1] Page D N. Information in black hole radiation[J]. Phys Rev Lett, 1993,71(23):3743-3746.

[2] Youm D. q-deformed conformal quantum mechanics[J]. Phys Rev D, 2000,62(9):276-284.

[3] Lavagno A, Swamy P N. q-deformed structures and nonextensive statistics: a comparative study[J]. Phys A: Statistical Mechanics and its Applications, 2002,305(1/2):310-315.

[4] Boole G. Calculus of finite differences[J]. Chelsea Publishing Company, 1950,1(5):141-145.

[5] Ernst T. The different tongues of q-calculus[J]. Proc Est Acad Sci, 2008,57(2):81-99.

[6] Lavagno A, Gervino G. Quantum mechanics in q-deformed calculus[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2009,174(174):233-239.

[7] Brito DCAMC, Martins Natália. The q-symmetric variational calculus[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2012,64(7):2241-2250.

[8] 徐佳宁,龚学,吴凡,等. 一类二阶 q-对称差分方程两点边值问题解的存在性[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2015,41(3):189-195.

[9] 杨潇,白俊杰,葛琦. 一类混合分数阶 q-差分边值问题解的存在性[J]. 延边大学学报(自然科学版),2015,41(1):21-24.