文章编号: 1004-4353(2016)01-0011-04

笛卡尔乘积有向图 $C_2 \times C_n$ 与 $C_3 \times C_n$ 的 3-彩虹控制数

郝国亮
(东华理工大学理学院 数学系, 江西 南昌 330013)

摘要: 设 $\gamma_{rk}(D)$ 是有向图 D 的 k-彩虹控制数且设 $C_m \times C_n$ 是 m 长有向圈 C_m 与 n 长有向圈 C_n 的笛卡尔乘积有向图. 用构造的方法找到了笛卡尔乘积有向图 $C_2 \times C_n$ 与 $C_3 \times C_n$ 的 3-彩虹控制数的上界,并证明了此上界恰好为其下界,即得到了 $\gamma_{r3}(C_2 \times C_n)$ 与 $\gamma_{r3}(C_3 \times C_n)$ 的精确值.

关键词: 彩虹控制函数; 彩虹控制数; 笛卡尔乘积
中图分类号: O157.5　　**文献标识码**: A

The 3-rainbow domination number of the Cartesian products digraph $C_2 \times C_n$ and $C_3 \times C_n$

HAO Guoliang
(*Department of Mathematics, College of Science, East China University of Technology, Nanchang* 330013, *China*)

Abstract: Let $\gamma_{rk}(D)$ be the k-rainbow domination number of a digraph D, and let $C_m \times C_n$ be the Cartesian product digraph of the directed cycle C_m of length m and the directed cycle C_n of length n. The upper bounds on 3-rainbow domination number of $C_2 \times C_n$ and $C_3 \times C_n$ are found by construction methods, which are exactly the lower bounds, that is, the exact values of $\gamma_{r3}(C_2 \times C_n)$ and $\gamma_{r3}(C_3 \times C_n)$ are obtained.

Keywords: rainbow dominating function; rainbow domination number; Cartesian product

图的控制理论是图论中的一个重要研究分支,具有较强的应用背景[1-2]. 基于不同的实际背景,研究者提出了各种不同的控制参数[3-7]. 各种控制参数的研究丰富和发展了图的理论,也在应用领域如计算机科学、计算科学及网络工程等领域得到了很好的应用. 较之于无向图,有向图控制参数的研究相对较少[8-10]. 2013 年,Amjadi 等[11]将无向图的彩虹控制数的概念推广到了有向图上,给出了 k-彩虹控制数,尤其是 2-彩虹控制数的一些上下界,这些界与图的顶点数、最大(小) 出度、最大入度、控制数等密切相关. 此外,文献[11] 还计算了当 $m \in \{2,3\}$ 且 $n \geqslant 2$,或 m 和 n 都是偶数时,m 长有向圈和 n 长有向圈的笛卡尔乘积图的 2-彩虹控制数的精确值. 本文将研究有向图的彩虹控制数,得到了 $\gamma_{r3}(C_2 \times C_n)$ 与 $\gamma_{r3}(C_3 \times C_n)$ 的精确值.

本文用 $D=(V,A)$ 表示一个有向图,其中 V 是 D 的顶点集,A 是 D 的弧集. 设 $D_1=(V_1,A_1)$ 和

收稿日期: 2016-01-26　　**作者简介**: 郝国亮(1980—),男,博士,讲师,研究方向为组合图论.
基金项目: 江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ150561);东华理工大学博士科研启动基金资助项目(DH-BK2015319,DHBK2015320)

$D_2=(V_2,A_2)$ 是 2 个有向图,其中 $V_1\cap V_2=\varnothing$ 且 $A_1\cap A_2=\varnothing$. 记 $D_1\times D_2$ 为 D_1 和 D_2 的笛卡尔乘积有向图,它的顶点集 $V(D_1\times D_2)=V_1\times V_2=\{(x,y):x\in V_1,y\in V_2\}$,弧集 $A(D_1\times D_2)=\{((x_1,y_1),(x_2,y_2)):(x_1,x_2)\in A_1$ 且 $y_1=y_2$,或 $x_1=x_2$ 且 $(y_1,y_2)\in A_2$,其中 $x_1,x_2\in V_1$ 且 $y_1,y_2\in V_2\}$.

为方便起见,本文做如下记号约定:设长为 n 的有向圈 C_n 的顶点集 $V(C_n)=\{0,1,\cdots,n-1\}$,弧集 $A(C_n)=\{(i,i+1):i=0,1,\cdots,n-1\}$,这里的"+"是代数模 n 的. 对于任意 $j\geqslant 0$,用 C_m^j 表示 $C_m\times C_n$ 的顶点子集$\{(i,j):i=0,1,\cdots,m-1\}$ 的导出有向子图. 不难看出,C_m^j 同构于 C_m.

对于一个正整数 k,本文用 $2^{\{1,2,\cdots,k\}}$ 表示集合$\{1,2,\cdots,k\}$ 的幂集. 设 D 是一个有向图并且设函数 $f:V(D)\rightarrow 2^{\{1,2,\cdots,k\}}$ 满足:对任意顶点 v,若 $f(v)=\varnothing$,则 $\bigcup_{u\in N^-(v)}f(u)=\{1,2,\cdots,k\}$,其中 v 的入邻集 $N^-(v)=\{u\in V(D):(u,v)\in A(D)\}$. 此时称 f 是有向图 D 的 k-彩虹控制函数. k-彩虹控制函数 f 的权为 $\omega(f)=\sum_{v\in V(D)}|f(v)|$. 有向图 D 的 k-彩虹控制函数的最小权称为 D 的 k-彩虹控制数,记为 $\gamma_{rk}(D)$. 权为 $\gamma_{rk}(D)$ 的 k-彩虹控制函数称为 D 的 $\gamma_{rk}(D)$-函数.

不难看出,空图的 k-彩虹控制数就是该图的顶点数. 此外,由 k-彩虹控制数的定义可知,有向图 D 的 1-彩虹控制数即为经典控制数 $\gamma(D)$.

1 主要结果及其证明

定理 1 对任意整数 $n\geqslant 2$, $\gamma_{r3}(C_2\times C_n)=\lceil 3n/2\rceil$.

证明 设 f 是一个 $\gamma_{r3}(C_2\times C_n)$-函数且对任意 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$,设 $a_j=\sum\limits_{(i,j)\in V(C_2^j)}|f((i,j))|$, $b_j=a_j+a_{j+1}$.

断言 1 对任意 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$, $a_j\geqslant 1$.

采用反证法证明断言 1. 假设存在某个 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$,不妨设 $j=1$,使得 $a_1=0$,则易见对任意 $i\in\{0,1\}$, $f((i,1))=\varnothing$. 注意到 f 是 $\gamma_{r3}(C_2\times C_n)$-函数,因此对任意 $i\in\{0,1\}$, $f((i,0))=\{1,2,3\}$. 定义函数 $g:V(C_2\times C_n)\rightarrow 2^{\{1,2,3\}}$,使得

$$g((i,j))=\begin{cases}\{1\},\text{ 如果 } i\in\{0,1\} \text{ 且 } j\in\{0,1\};\\ f((i,j)),\text{ 其他}.\end{cases}$$

不难看出,g 是 $C_2\times C_n$ 的一个 3-彩虹控制函数. 于是

$$\gamma_{r3}(C_2\times C_n)\leqslant\omega(g)=\omega(f)-2<\omega(f)=\gamma_{r3}(C_2\times C_n),$$

矛盾,因此断言 1 成立.

断言 2 对任意 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$, $b_j\geqslant 3$.

采用反证法证明断言 2. 假设存在某个 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$,不妨设 $j=0$,使得 $b_0\leqslant 2$. 注意到 $b_0=a_0+a_1\geqslant 1+1=2$,因此 $b_0=2$,这暗示了 $a_0=a_1=1$. 不失一般性,假设 $f((0,1))=\{1\}$ 且 $f((1,1))=\varnothing$,因为 f 是 $\gamma_{r3}(C_2\times C_n)$-函数,所以$\{2,3\}\subseteq f((0,1))$. 于是 $1=a_0\geqslant|f(0,1)|\geqslant 2$,矛盾,因此断言 2 成立.

下面根据 n 的奇偶性,分 2 种情形讨论:

情形 1 n 是偶数. 由断言 2 可得 $\gamma_{r3}(C_2\times C_n)=\omega(f)=\sum\limits_{j=0}^{n-1}a_j=(\sum\limits_{j=0}^{n-1}b_j)/2\geqslant 3n/2$. 在这种情形下,给出 $C_2\times C_n$ 的一个 3-彩虹控制函数 $f':V(C_2\times C_n)\rightarrow 2^{\{1,2,3\}}$,使得

$$f'(v)=\begin{cases}\{1,2\},\text{ 如果 } v=(0,2i+1),\ i\in\{0,1,\cdots,(n-2)/2\};\\ \{3\},\text{ 如果 } v=(1,2i),\ i\in\{0,1,\cdots,(n-2)/2\};\\ \varnothing,\text{ 其他};\end{cases}$$

因此,$\gamma_{r3}(C_2\times C_n)\leqslant\omega(f')=3n/2$.

情形 2　n 是奇数. 假设对任意 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，$b_j=a_j+a_{j+1}=3$. 注意到对任意 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，$a_j\geqslant 1$. 因此，不失一般性，假设 $a_0=a_2=\cdots=a_{n-1}=1$ 且 $a_1=a_3=\cdots=a_{n-2}=2$，或者 $a_0=a_2=\cdots=a_{n-1}=2$ 且 $a_1=a_3=\cdots=a_{n-2}=1$，于是可以得到 $b_{n-1}=a_0+a_{n-1}=2$ 或 4，这与假设 $b_{n-1}=3$ 矛盾. 注意到断言 2：对任意 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，$b_j\geqslant 3$；因此，一定存在某个 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，不妨设 $j=0$，使得 $b_0\geqslant 4$. 于是由断言 2 可得

$$\gamma_{r3}(C_2\times C_n)=\omega(f)=\sum_{j=0}^{n-1}a_j=(b_0+\sum_{j=1}^{n-1}b_j)/2\geqslant[4+3(n-1)]/2=(3n+1)/2.$$

在这种情形下，给出 $C_2\times C_n$ 的一个 3-彩虹控制函数 $f'':V(C_2\times C_n)\rightarrow 2^{\{1,2,3\}}$，使得

$$f''(v)=\begin{cases}\{1,2\}, & \text{如果 } v=(0,2i+1),\ i\in\{0,1,\cdots,(n-3)/2\};\\ \{3\}, & \text{如果 } v=(0,0)\text{ 或}(1,2i),\ i\in\{0,1,\cdots,(n-1)/2\};\\ \varnothing, & \text{其他；}\end{cases}$$

因此，$\gamma_{r3}(C_2\times C_n)\leqslant\omega(f'')=(3n+1)/2$.

定理 2　对任意整数 $n\geqslant 3$，$\gamma_{r3}(C_3\times C_n)=\lceil 5n/2\rceil$.

证明　设 f 是 $\gamma_{r3}(C_3\times C_n)$-函数，使得 $|(i,j)\in V(C_3\times C_n):f((i,j))=\varnothing|$ 最小. 对任意 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，设 $a_j=\sum\limits_{(i,j)\in V(C_3^j)}|f((i,j))|$ 且 $b_j=a_j+a_{j+1}$.

断言 3　对任意 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，$a_j\geqslant 2$.

采用反证法证明断言 3. 假设存在某个 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，不妨设 $j=1$，使得 $a_1\leqslant 1$. 类似于断言 1 的证明可知 $a_1\geqslant 1$，于是 $a_1=1$. 不失一般性，假设 $f((0,1))=\{1\}$ 且 $f((1,1))=f((2,1))=\varnothing$. 由 $\gamma_{r3}(C_3\times C_n)$-函数的定义可知，$\{2,3\}\subseteq f((1,0))$ 且 $f((2,0))=\{1,2,3\}$，并且因此 $f((0,0))=\varnothing$. 定义函数 $g:V(C_3\times C_n)\rightarrow 2^{\{1,2,3\}}$，使得

$$g((i,j))=\begin{cases}\{1\}, & \text{如果 } i\in\{0,1,2\}\text{ 且 } j\in\{0,1\};\\ f((i,j)), & \text{其他.}\end{cases}$$

易见 g 是 $C_3\times C_n$ 的一个 3-彩虹控制函数且 $\omega(g)\leqslant\omega(f)$，这暗示了 g 也是 $\gamma_{r3}(C_3\times C_n)$-函数. 注意到 $|(i,j)\in V(C_3\times C_n):f((i,j))=\varnothing|-|(i,j)\in V(C_3\times C_n):g((i,j))=\varnothing|=3$，这与 f 的最小性矛盾，因此断言 3 成立.

断言 4　对任意 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，$b_j\geqslant 5$.

采用反证法证明断言 4. 假设存在某个 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，不妨设 $j=1$，使得 $b_1=a_1+a_2\leqslant 4$. 此外，由断言 3 可知 $a_1,a_2\geqslant 2$，因此 $b_1=a_1+a_2\geqslant 4$，于是 $a_1=a_2=2$. 不失一般性，可以假设 $|f((0,2))|=2$，或 $|f((0,2))|=|f((1,2))|=1$.

假设 $|f((0,2))|=2$. 不失一般性，假设 $f((0,2))=\{1,2\}$，则显然 $f((1,2))=f((2,2))=\varnothing$. 由 $\gamma_{r3}(C_3\times C_n)$-函数的定义知，$f((2,1))=\{1,2,3\}$. 于是 $2=a_1\geqslant|f(2,1)|=3$，矛盾.

假设 $|f((0,2))|=|f((1,2))|=1$. 显然 $|f((2,2))|=0$. 此外，由 $a_1=2$ 及 $\gamma_{r3}(C_3\times C_n)$-函数的定义知，$|f((2,1))|=2$. 因为 $a_1=2$，所以 $|f((0,1))|=|f((1,1))|=0$. 利用 $\gamma_{r3}(C_3\times C_n)$-函数的定义，由 $|f((0,1))|=0$ 且 $|f((2,1))|=2$ 可知，$|f((0,0))|\geqslant 1$；由 $|f((1,1))|=|f((0,1))|=0$ 可知，$|f((1,0))|=3$；且有 $|f((2,0))|=0$. 定义函数 $g':V(C_3\times C_n)\rightarrow 2^{\{1,2,3\}}$，使得

$$g'(v)=\begin{cases}\{1\}, & \text{如果 } v\in\{(1,0),(1,1),(2,0)\};\\ f(v), & \text{其他.}\end{cases}$$

易见 g' 是 $C_3\times C_n$ 的一个 3-彩虹控制函数且 $\omega(g')=\omega(f)$，这暗示了 g' 也是 $\gamma_{r3}(C_3\times C_n)$-函数. 注意到 $|(i,j)\in V(C_3\times C_n):f((i,j))=\varnothing|-|(i,j)\in V(C_3\times C_n):g'((i,j))=\varnothing|=2$，这与 f 的最小性矛盾. 综上可知，断言 4 成立.

下面根据 n 的奇偶性,分 2 种情形讨论:

情形 1 n 是偶数.由断言 4 知,$\gamma_{r3}(C_3\times C_n)=\omega(f)=\sum_{j=0}^{n-1}a_j=(\sum_{j=0}^{n-1}b_j)/2\geqslant 5n/2$.在这种情形下,给出 $C_3\times C_n$ 的一个 3-彩虹控制函数 $f':V(C_3\times C_n)\to 2^{\{1,2,3\}}$,使得

$$f'(v)=\begin{cases}\{1,2\},\ \text{如果}\ v=(0,2i+1),\ i\in\{0,1,\cdots,(n-2)/2\};\\ \{3\},\ \text{如果}\ v=(1,2i),\ i\in\{0,1,\cdots,(n-2)/2\},\text{或者}\ v=(2,i),\ i\in\{0,1,\cdots,n-1\};\\ \varnothing,\ \text{其他};\end{cases}$$

因此,$\gamma_{r3}(C_3\times C_n)\leqslant\omega(f')=5n/2$.

情形 2 n 是奇数.假设对任意 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$, $b_j=a_j+a_{j+1}=5$.注意到断言 3:对任意 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$, $a_j\geqslant 2$;因此,不失一般性,可以假设 $a_0=a_2=\cdots=a_{n-1}=2$ 且 $a_1=a_3=\cdots=a_{n-2}=3$,或 $a_0=a_2=\cdots=a_{n-1}=3$ 且 $a_1=a_3=\cdots=a_{n-2}=2$,于是可得到 $b_{n-1}=a_0+a_{n-1}=4$ 或 6,这与假设$b_{n-1}=5$ 矛盾.注意到断言 4:对任意 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$, $b_j\geqslant 5$;因此,一定存在某个 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$,不妨设 $j=0$,使得 $b_0\geqslant 6$,于是由断言 4 可得

$$\gamma_{r3}(C_3\times C_n)=\omega(f)=\sum_{j=0}^{n-1}a_j=(b_0+\sum_{j=1}^{n-1}b_j)/2\geqslant[6+5(n-1)]/2=(5n+1)/2.$$

在这种情形下,给出 $C_3\times C_n$ 的一个 3-彩虹控制函数 $f'':V(C_3\times C_n)\to 2^{\{1,2,3\}}$,使得

$$f''(v)=\begin{cases}\{1\},\ \text{如果}\ v=(0,0);\\ \{1,2\},\ \text{如果}\ v=(0,2i+1),\ i\in\{0,1,\cdots,(n-3)/2\};\\ \{3\},\ \text{如果}\ v=(1,2i),\ i\in\{0,1,\cdots,(n-1)/2\},\text{或者}\ v=(2,i),\ i\in\{0,1,\cdots,n-1\};\\ \varnothing,\ \text{其他};\end{cases}$$

因此,$\gamma_{r3}(C_3\times C_n)\leqslant\omega(f'')=(5n+1)/2$.

参考文献:

[1] Haynes T W, Hedetniemi S T, Slater P J. Fundamentals of Domination in Graphs[M]. New York: Marcel Dekker, Inc, 1998.

[2] Haynes T W, Hedetniemi S T, Slater P J. Domination in Graphs: Advanced Topics[M]. New York: Marcel Dekker, Inc, 1998.

[3] Desormeaux W J, Haynes T W, Henning M A, et al. Total domination in graphs with diameter 2[J]. J Graph Theory, 2014,75:91-103.

[4] Fujita S, Furuya M. Rainbow domination numbers on graphs with given radius[J]. Discrete Appl Math, 2014, 166:115-122.

[5] Hao G, Qian J. On the sum of out-domination number and in-domination number of digraphs[J]. Ars Combin, 2015,119:331-337.

[6] Ahangar H A, Amjadi J, Sheikholeslami S M, et al. Signed Roman edge domination numbers in graphs[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2016,31(1):333-346.

[7] 梁冰冰,皮晓明,刘焕平.树的 3-彩虹控制数的上界[J].纯粹数学与应用数学,2015,31(2):210-220.

[8] 郝国亮,钱建国.有向图出控制数与入控制数的和[J].厦门大学学报(自然科学版),2015,54(3):351-353.

[9] Koltun V, Papadimitriou C H. Approximately dominating representatives[J]. Theoret Comput Sci, 2007,371:148-154.

[10] Shan E F, Cheng T C E, Kang L Y. Absorbant of generalized de Bruijn digraphs[J]. Inform Process Lett, 2007, 105:6-11.

[11] Amjadi J, Bahremandpour A, Sheikholeslami S M, et al. The rainbow domination number of a digraph[J]. Kragujevac J Math, 2013,37:257-268.