文章编号：1004-4353(2016)01-0007-04

变量核 Marcinkiewicz 积分在加权 Companato 空间上的有界性

邵旭馗， 王素萍
（陇东学院 数学与统计学院，甘肃 庆阳 745000）

摘要： 研究带变量核的 Marcinkiewicz 积分算子，应用函数分解理论及核函数 Ω 的性质，证明了 Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 是加权 Companato 空间上的有界算子，推广了文献[7]和[11]中有关非变量核的相关结果.

关键词： Marcinkiewicz 积分；A_1 权；加权 Companato 空间；变量核
中图分类号： O174.2 **文献标识码：** A

Boundedness of Marcinkiewicz integral with variable kernels on weighted Companato spaces

SHAO Xukui, WANG Suping
(*School of Mathematics and Statistics*, *Longdong University*, *Qingyang* 745000, *China*)

Abstract: The Marcinkiewicz integrals with variable kernels μ_Ω is discussed. By using the function decomposition theory and the properties of kernel function Ω, we proved that the Marcinkiewicz integral operator μ_Ω is bounded on weighted companato space, which extends no-variable kernel results of the literature [7] and [12].

Keywords: Marcinkiewicz integral; A_1 weighted; weighted Companato space; Variable kernel

0 引言

记 S^{n-1} 为 $R^n(n\geqslant 2)$ 中的单位球面，其上装备了 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}\sigma(z')$. 设定义在 $R^n\times R^n$ 上的函数 $\Omega\in L^\infty(R^n)\times L^r(S^{n-1})\,(r\geqslant 1)$，满足

$$\|\Omega\|_{L^\infty(R^n)\times L^r(S^{n-1})}=\sup_{x\in R^n}\Big(\int_{S^{n-1}}|\Omega(x,z')|^r\mathrm{d}\sigma(z')\Big)^{\frac{1}{r}}<\infty, \tag{1}$$

其中 $z'=\dfrac{z}{|z|}$，$\forall\, z\in R^n\backslash\{0\}$. 并设 Ω 满足如下条件：

$$\Omega(x,\lambda z)=\Omega(x,z),\ \forall\, x,z\in R^n,\ \forall\,\lambda>0; \tag{2}$$

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(x,z')\mathrm{d}(z')=0,\ \forall\, x\in R^n(\text{消失条件}). \tag{3}$$

1958 年，E. Stein[1] 首次定义了 Marcinkiewicz 积分 μ_Ω，并得到了当 $\Omega\in Lip(R^n)$ 时 μ_Ω 的 (p,p) 有界性. 1990 年，A. Torchinsky 等[2] 研究了当 $b\in Lip_\beta(R^n)$ 时交换子 $\mu_{\Omega,b}$ 的有界性. 在此基础上，Mo 等[3] 进一步考虑了多线性的情形，邵旭馗等[4] 又证明了当 $b\in Lip_{\beta,v}(R^n)$ 时带变量核的 Marcinkiewicz 积分

收稿日期： 2015-12-13 **作者简介：** 邵旭馗(1979—)，男，副教授，研究方向为调和分析及其在偏微分方程中的应用.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11161402)；甘肃省青年科技基金资助项目(1308RJYM024)；甘肃省高等学校科研项目(2015A-147)

交换子 μ_Ω^b 的 L^p 加权有界性. 1961 年 John 等[5] 引入了 Morrey 空间的原型,1963 年 Companato[6] 首次引入了 Companato 空间,并研究了此空间的相关性质,此后 Companato 空间被广泛应用于偏微分方程的研究中[7-10]. 受以上研究的启发,本文考虑并证明了带变量核的 Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 在加权 Companato 空间上的有界性,从而推广了文献[7] 和[11] 中有关非变量核的相关结果.

带变量核的 Marcinkiewicz 积分 μ_Ω 定义如下:

$$\mu_\Omega(f)(x)=\left(\int_0^\infty\left|\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-1}}f(y)\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

首先给出本文中所用的一些定义与记号:设 $k\in Z$,令 $B_k=B(0,2^k)=\{x\in R^n:|x|\leqslant 2^k\}$,及 $C_k=B_k\backslash B_{k-1}$,并记 $\chi_k=\chi_{C_k}$ 为集 C_k 的特征函数.

定义 1 函数 ω 称为 A_1 权,若存在常数 $C>0$,使得对任意的方体 Q,有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)\mathrm{d}x\leqslant C\omega(x),\ \text{a. e.},\ x\in Q.$$

定义 2 设 $\omega(x)$ 是 R^n 的局部可积函数,$\omega(x)\geqslant 0$,$1\leqslant p<\infty$,$\alpha\geqslant 0$,则称空间 $\varepsilon_\omega^{\alpha,p}=\{f\in L_{loc}(R^n),\ \|f\|_{\alpha,p,\omega}<\infty\}$ 为加权 Companato 空间,其中:

$$\|f\|_{\alpha,p,\omega}=\sup_{Q\subset R^n}\left\{\omega(Q)^{-(1+\alpha p/n)}\left(\int_Q|f(x)-f_Q|^p\omega(x)^{1-p}\mathrm{d}x\right)\right\}^{1/p},$$

$$\omega(Q)=\int_Q\omega(x)\mathrm{d}x,\ f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\mathrm{d}x,$$

Q 是边平行于坐标轴的方体.

1 主要结果及其证明

定理 1 设 $\Omega(x,y)\in L^\infty(R^n)\times Lip_\beta(S^{n-1})(0<\beta\leqslant 1/2)$ 满足条件(1)、(2) 和(3),$\omega\in A_1$,且 $f\in\varepsilon_\omega^{\alpha,p}$,$0<\alpha<1/2$,$1<p<\infty$,若 $\mu_\Omega(f)(x)<\infty$,a. e.,$x\in Q$,则存在与 f 无关的常数 $C>0$,使得 $\|\mu_\Omega(f)\|_{\alpha,p,\omega}\leqslant C\|f\|_{\alpha,p,\omega}$.

注 当 $\alpha=0$,$p=1$ 时,$\mu_\Omega(f)$ 在加权 BMO 空间上有界.

为证明定理 1,需要引进以下引理:

引理 1[12] 设核函数 Ω 满足条件(1)、(2) 和(3),对 $1<q<\infty$,权函数 $\omega\in A_p$,则存在常数 $C>0$,使得 $\|\mu_\Omega(f)\|_{L^q(\omega)}\leqslant C\|f\|_{L^q(\omega)}$,对任意的 $f\in L^q(\omega)$ 成立.

引理 2[11] 设 $\omega\in A_1$,$f\in\varepsilon_\omega^{\alpha,p}(\alpha\geqslant 0)$,那么对任意的 $\lambda>0$ 及任意的方体 Q,存在不依赖于 f 和 Q 的常数 C_1 及 C_2,使得 $\omega(\{x\in Q,|f(x)-f_Q|\omega^{-1}>\lambda\})\leqslant C_1\exp(C_2\lambda/(\|f\|_{\alpha,1,\omega}\omega(Q)^{\alpha/n}))\omega(Q)$.

引理 3[11] 设 $\omega\in A_1$,$f\in\varepsilon_\omega^{\alpha,p}(\alpha\geqslant 0)$,那么对任意的 $p>1$,有 $\varepsilon_\omega^{\alpha,p}=\varepsilon_\omega^{\alpha,1}$ 且 $C_1\|f\|_{\alpha,1,\omega}\leqslant\|f\|_{\alpha,p,\omega}\leqslant C_2\|f\|_{\alpha,1,\omega}$.

引理 4[11] 设 $\omega\in A_1$,$f\in\varepsilon_\omega^{\alpha,p}(\alpha\geqslant 0)$,$Q$ 为中心在 x_0 的半径为 r 的方体,则对满足 $0\leqslant\alpha<d\leqslant 1$ 的 d 总有 $\int_{R^n}\frac{r^d|f-f_Q|}{r^{n+d}+|x-x_0|^{n+d}}\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_{\alpha,p,\omega}\frac{\omega(Q)^{1+\alpha/n}}{|Q|}$.

定理 1 的证明 设 $|E|=|\{x\in R^n:\mu_\Omega(f)(x)<\infty\}|>0$,取 $x_0\in E$,以 x_0 为中心、r 为半径作方体 Q,并记 $Q'=8n^{\frac{1}{2}}Q$,这里 Q' 是与 Q 同中心,边长为 Q 的 $8n^{\frac{1}{2}}$ 方体. 现将 f 分解为:

$$f(x)=f_{Q'}+(f(x)-f_{Q'})\chi_{Q'}+(f(x)-f_{Q'})\chi_{(Q')^c}=:f_1(x)+f_2(x)+f_3(x).$$

由 Ω 的消失性条件有 $\mu_\Omega(f_1)(x)=0$. 下证 $\mu_\Omega(f_2)(x)\in\varepsilon_\omega^{\alpha,1}$,且

$$\int_Q|\mu_\Omega(f_2)(x)|\mathrm{d}x\leqslant C\omega(Q)^{1+\alpha/n}\|f\|_{\alpha,1,\omega}.$$

由引理 2,可得

$$\int_{R^n}|f_2|^2\omega^{-1}\mathrm{d}x=\int_{Q'}|(f-f_{Q'})\omega^{-1}|^2\omega\,\mathrm{d}x\leqslant 2\int_0^\infty\lambda\omega(\{x\in Q':|f-f_{Q'}|\omega^{-1}>\lambda\})\mathrm{d}\lambda\leqslant$$
$$2\int_0^\infty\lambda C_1\exp(C_2\lambda/(\|f\|_{\alpha,1,\omega}\,\omega(Q')^{\alpha/n}))\omega(Q')\leqslant C\omega(Q')^{1+2\alpha/n}\|f\|_{\alpha,1,\omega}^2\leqslant$$
$$C\omega(Q)^{1+2\alpha/n}\|f\|_{\alpha,1,\omega}^2.$$

又因为 $\omega\in A_1$,从而 $\omega\in A_2$, $\omega^{-1}\in A_2$,再由引理 1 可得

$$\|\mu_\Omega(f_2)\|_{L^2(\omega^{-1})}\leqslant C\|f_2\|_{L^2(\omega^{-1})}\leqslant C\omega(Q)^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{\alpha,1,\omega}.$$

再应用 Hölder 不等式有

$$\int_Q|\mu_\Omega(f_2)(x)|\mathrm{d}x\leqslant C\Big(\int_Q|\mu_\Omega(f_2)|^2\omega^{-1}\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\omega(Q)^{1/2}\leqslant C\|\mu_\Omega(f_2)\|_{L^2(\omega^{-1})}\omega(Q)^{1/2}\leqslant$$
$$C\omega(Q)^{1+\alpha/n}\|f\|_{\alpha,1,\omega},$$

故 $\mu_\Omega(f)(x)<\infty$, a. e., $x\in Q$.

由题设 $|E|>0$,因此 $|Q\cap E|>0$,于是存在 $x'\in Q\cap E$,使得 $\mu_\Omega(f)(x')<\infty$ 与 $\mu_\Omega(f_2)(x')<\infty$ 同时成立,且 $\mu_\Omega(f_3)(x')\leqslant\mu_\Omega(f)(x')+\mu_\Omega(f_2)(x')<\infty$.

另一方面,对任意的 $x\in Q$,有:

$$|\mu_\Omega(f_3)(x)-\mu_\Omega(f_3)(x')|\leqslant\left|\int_0^\infty\left|\int_{|x-y|\leqslant t,\,|x'-y|\geqslant t}\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-1}}|f_3(y)|\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right|^{1/2}+$$
$$\left|\int_0^\infty\left|\int_{|x-y|\geqslant t,\,|x'-y|\leqslant t}\frac{|\Omega(x',x'-y)|}{|x'-y|^{n-1}}|f_3(y)|\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right|^{1/2}+$$
$$\left|\int_0^\infty\left|\int_{|x-y|\leqslant t,\,|x'-y|\leqslant t}\left|\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-1}}-\frac{|\Omega(x',x'-y)|}{|x'-y|^{n-1}}\right||f_3(y)|\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right|^{1/2}=$$
$$K_1+K_2+K_3.$$

由 Minkowski 不等式可得

$$K_1\leqslant\int_{R^n}\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-1}}|f_3(y)|\left|\int_{|x-y|\leqslant t,\,|x'-y|\geqslant t}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right|^{1/2}\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\int_{(Q')^c}\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-1}}|f_3(y)|\left|\frac{1}{|x-y|^2}-\frac{1}{|x'-y|^2}\right|^{1/2}\mathrm{d}y.$$

注意到 $y\in(Q')^c$, $x,x_0,x'\in Q$,故 $|x_0-y|\sim|x-y|\sim|x'-y|$,并且有

$$\left|\frac{1}{|x-y|^2}-\frac{1}{|x'-y|^2}\right|^{1/2}\leqslant\frac{Cr^{1/2}}{|x-y|^{3/2}}.$$

又由于 $\Omega(x,y)\in L^\infty(R^n)\times Lip_\beta(S^{n-1})\subset L^\infty(R^n)\times L^\infty(S^{n-1})$,由引理 4 有

$$K_1\leqslant C\|\Omega\|_{L^\infty(R^n)\times L^\infty(S^{n-1})}\int_{(Q')^c}\frac{r^{1/2}|f(y)-f_{Q'}|}{|x'-y|^{n+1/2}}\mathrm{d}y\leqslant C\|f\|_{\alpha,p,\omega}\,\omega(Q)^{1+\alpha/n}|Q|^{-1}.$$

类似地,可得 $K_2\leqslant C\|f\|_{\alpha,p,\omega}\,\omega(Q)^{1+\alpha/n}|Q|^{-1}$. 以下估计 K_3.

$$K_3\leqslant C\int_{(Q')^c}\left|\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-1}}-\frac{|\Omega(x',x'-y)|}{|x'-y|^{n-1}}\right||f_3(y)|\left|\int_{|x-y|\leqslant t,\,|x'-y|\leqslant t}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right|^{1/2}\mathrm{d}y\leqslant$$
$$C\int_{(Q')^c}\left|\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-1}}-\frac{|\Omega(x',x'-y)|}{|x'-y|^{n-1}}\right|\frac{|f_3(y)|}{|x'-y|}\mathrm{d}y\leqslant$$
$$C\int_{(Q')^c}|\Omega(x,x-y)-\Omega(x',x'-y)|\frac{|f(y)-f_{Q'}|}{|x-y|^n}\mathrm{d}y+$$
$$C\int_{(Q')^c}|\Omega(x',x'-y)|\left|\frac{1}{|x-y|^{n-1}}-\frac{1}{|x'-y|^{n-1}}\right|\frac{|f(y)-f_{Q'}|}{|x'-y|}\mathrm{d}y=K_{31}+K_{32}.$$

先估计 K_{31}. 注意到 $|x_0-y|\sim|x-y|\sim|x'-y|$,再由引理 4,有

$$K_{31}\leqslant C\int_{(Q')^c}\left|\Omega(x,\frac{x-y}{|x-y|})-\Omega(x',\frac{x'-y}{|x'-y|})\right|\frac{|f(y)-f_{Q'}|}{|x-y|^n}\mathrm{d}y\leqslant$$

$$C\int_{(Q')^c}\frac{r^{\beta}|f(y)-f_{Q'}|}{|x-y|^{n+\beta}}\mathrm{d}y\leqslant C\|f\|_{\alpha,p,\omega}\,\omega(Q)^{1+\alpha/n}|Q|^{-1}.$$

其次估计 K_{32}. 由于 $\Omega(x,y)\in L^{\infty}(R^n)\times Lip_{\beta}(S^{n-1})\subset L^{\infty}(R^n)\times L^{\infty}(S^{n-1})$，而

$$\left|\frac{1}{|x-y|^{n-1}}-\frac{1}{|x'-y|^{n-1}}\right|\leqslant\frac{Cr}{|x'-y|^{n}},$$

则

$$K_{32}\leqslant C\int_{(Q')^c}|\Omega(x',x'-y)|\frac{r|f(y)-f_{Q'}|}{|x'-y|^{n+1}}\mathrm{d}y\leqslant$$

$$C\|\Omega\|_{L^{\infty}(R^n)\times L^{\infty}(S^{n-1})}\int_{(Q')^c}\frac{r|f(y)-f_{Q'}|}{|x'-y|^{n+1}}\mathrm{d}y\leqslant C\|f\|_{\alpha,p,\omega}\,\omega(Q)^{1+\alpha/n}|Q|^{-1}.$$

综上可知 $|\mu_{\Omega}(f_3)(x)-\mu_{\Omega}(f_3)(x')|\leqslant C\|f\|_{\alpha,p,\omega}\,\omega(Q)^{1+\alpha/n}|Q|^{-1}$，因此 $\mu_{\Omega}(f)(x)\leqslant\mu_{\Omega}(f_1)(x)+\mu_{\Omega}(f_2)(x)+|\mu_{\Omega}(f_3)(x)-\mu_{\Omega}(f_3)(x')|+|\mu_{\Omega}(f_3)(x')|<\infty$, a. e. $x\in Q$. 再由 Q 的任意性可知 $\mu_{\Omega}(f)(x)<\infty$, a. e., $x\in R^n$. 另一方面，由以上估计知

$$\int_Q|\mu_{\Omega}(f)(x)-\mu_{\Omega}(f)(x')|\mathrm{d}x\leqslant\int_Q|\mu_{\Omega}(f_2)(x)|\mathrm{d}x+\int_Q|\mu_{\Omega}(f_3)(x)-\mu_{\Omega}(f_3)(x')|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\|f\|_{\alpha,p,\omega}\,\omega(Q)^{1+\alpha/n}\leqslant C\|f\|_{\alpha,1,\omega}\,\omega(Q)^{1+\alpha/n},$$

故有 $\|\mu_{\Omega}(f)(x)\|_{\alpha,1,\omega}\leqslant C\|f\|_{\alpha,1,\omega}$，再由引理 3 可得 $\|\mu_{\Omega}(f)(x)\|_{\alpha,p,\omega}\leqslant C\|f\|_{\alpha,p,\omega}$. 至此，定理 1 证毕.

参考文献：

[1] Stein E M. On the functions of Littlewood-Paley[J]. Trans Amer Soc, 1958,88:430-466.

[2] Torchinsky A, Wang S. A note on the Marcinkiewicz integral[J]. Colloquium Math, 1990,60/61:235-243.

[3] MO Huixia, LU Shanzhen. Boundedness of generalized higher commutators of Marcinkiewicz integrals[J]. Acta Math Scientia, 2007,27B(4):852-866.

[4] 邵旭馗，陶双平. 带变量核的 Marcinkiewicz 积分交换子的加权 Lipschitz 估计[J]. 系统科学与数学，2012，37(2)：915-921.

[5] John F, Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation[J]. Comm Pure Appl Math, 1961,14:415-426.

[6] Campanato S. Proprieta di Hölderianita di alcune classi difunzioni[J]. Ann Sc Norm Sup Pisa, 1963,17:173-188.

[7] 陶双平，李省哲. 粗糙核 Marcinkiewicz 积分在 Companato 空间上的有界性[J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2009，45(4)：11-45.

[8] 陶双平，边敏静. 粗糙核奇异积分算子在加权 Companato 空间上的有界性[J]. 兰州大学学报(自然科学版)，2011，47(8)：91-98.

[9] 邵旭馗，陶双平，王素萍. 带变量核的分数次积分交换子在加权 Morrey-Herz 空间的有界性[J]. 应用数学学报，2014，37(3)：497-506.

[10] 邵旭馗，王素萍. 带变量核的奇异积分算子的加权不等式[J]. 应用数学学报，2015，38(3)：535-539.

[11] 包丽君. Marcinkiewicz 积分在加权 Companato 空间上的有界性[J]. 宁波大学学报(理工版)，2014，27(1)：62-65.

[12] 姚红超，朱月萍. 带变量核的 Marcinkiewicz 算子及其交换子在加权 Morrey-Herz 空间上的有界性[J]. 南通大学学报(自然科学版)，2012，11(3)：43-54.