**文章编号:** 1004-4353(2016)01-0001-06

# 带有 $p$-Laplacian 算子的四阶偏差分方程的多重同宿解

吴凡, 东雨薇, 侯成敏*
( 延边大学理学院 数学系,吉林 延吉 133002 )

**摘要:** 考虑一类含有 1 个正参数的四阶 $p$-Laplacian 偏差分方程解的存在性问题. 首先建立了一个变分框架,其次利用临界点定理证明了当参数充分大时该方程至少存在 2 个非平凡同宿解. 所得结果推广了文献[4]的结果.

**关键词:** 偏差分方程; $p$-Laplacian 算子; 临界点定理; 变分法
**中图分类号:** O175.6　　　**文献标识码:** A

# Multiple homoclinic solutions for the partial difference equations with $p$-Laplacian operator

WU Fan, DONG Yuwei, HOU Chengmin*
( *Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China* )

**Abstract**: A class of four order $p$-Laplacian partial difference equation with a positive parameter is considered. We first introduce a variational framework. Second, by means of critical point theory, we prove the existence of at least two nontrivial homoclinic solutions for big enough parameter. The results of the literature [4] are generalized.

**Keywords**: partial difference equations; $p$-Laplacian operator; critical point theory; variational methods

## 0 引言

本文研究依赖实参数 $\lambda>0$ 的偏差分方程:

$$\begin{aligned}&\Delta_2\Delta_1\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u(m-1,n-1))+\alpha(m,n)\Delta_1^2 u(m-1,n)+\beta(m,n)\Delta_2^2 u(m-1,n)+\\&\quad a(m,n)\varphi_p(u(m,n))=\lambda f(m,n,u(m,n)),\ (m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z};\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}&u(r_1-1,n)=u(r_2+1,n)=0,\ n\in\mathbf{Z};\\&u(m,n)=0,\ |n|\to\infty,\ m\in[r_1-1,r_2+1].\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $p>1$ 是一个实数, $\varphi_p(t)=|t|^{p-2}t$, $t\in\mathbf{R}$, $r_1,r_2\in\mathbf{Z}$ 且 $r_1<r_2$. $\alpha,\beta,a:[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ 是非负函数, $f:[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是关于第 3 个变量连续的函数. 进一步关于第 $i$ ($i=1,2$) 指标的向前差分定义为:

$$\Delta_1 u(m-1,n-1)=u(m,n-1)-u(m-1,n-1),\ (m,n)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z},$$

$$\Delta_2 u(m-1,n-1)=u(m-1,n)-u(m-1,n-1),\ (m,n)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}.$$

**收稿日期:** 2016-02-26　　　* **通信作者:** 侯成敏(1963—),女,教授,研究方向为微分方程理论及应用.
**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11161049);吉林省教育厅"十二五"科技项目(吉教科合字[2014]第 20 号)

问题(1)—(2) 同宿解的存在性是指其存在多个解且它们具有同宿性. 本文将证明当参数足够大时,问题(1)—(2) 至少有 2 个非平凡解且它们有同宿性.

差分方程可视为微分方程的离散化方程,它通常与微分方程的数值分析相关. 研究微分方程的大多数古典方法可以应用到差分方程的研究中,例如线性和非线性算子理论以及不动点理论. 近年来,变分法已经被成功地应用在离散边值问题的研究中[1-4]. 从文献[1-4] 可以看出,目前利用变分法所研究的成果多数是关于常差分方程的,而对于偏差分方程其研究结果极少. 本文利用临界点定理研究问题(1)—(2) 同宿解的存在性,所得结果推广了文献[4] 的结果.

为了方便,先作如下假设:

($H_1$) $a(m,n) \geqslant a_0 > 0$, $(m,n) \in [r_1, r_2] \times \mathbf{Z}$, $a(m,n) \to \infty$, $\forall\, m \in [r_1, r_2]$, $|n| \to \infty$.

($H_2$) 存在正常数 $\alpha, \beta$ 使得 $\alpha(m,n) \leqslant \alpha$, $\beta(m,n) \leqslant \beta$, $(m,n) \in [r_1, r_2] \times \mathbf{Z}$.

$$f, F: [r_1, r_2] \times \mathbf{Z} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ F(m,n,t) = \int_0^t f(m,n,\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

($H_3$) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{|f(m,n,t)|}{|t|^{p-1}} = 0$, $(m,n) \in [r_1, r_2] \times \mathbf{Z}$;

($H_4$) $\sup\limits_{|t| \leqslant T} |F(\cdot, \cdot, t)| \in l^1$, $T > 0$;

($H_5$) $\sup\limits_{|t| \to 0} \dfrac{|F(\cdot, \cdot, t)|}{\mathrm{t}^p} \leqslant 0$, $(m,n) \in [r_1, r_2] \times \mathbf{Z}$;

($H_6$) $\exists\,(h,k,b) \in [r_1, r_2] \times \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$, st. $F(h,k,b) > 0$.

## 1 预备知识

设 $1 \leqslant p < +\infty$,并且记 $l^p$ 是所有 $u: [r_1, r_2] \times \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ 使得 $\|u\|_p^p = \sum\limits_{(m,n) \in [r_1, r_2] \times \mathbf{Z}} |u(m,n)|^p < \infty$ 的全体函数集,$l^\infty$ 是所有 $u: [r_1, r_2] \times \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ 使得 $\|u\|_\infty = \sup\limits_{(m,n) \in [r_1, r_2] \times \mathbf{Z}} |u(m,n)| < \infty$ 的全体函数集.

**引理 1**[5] 设 $1 \leqslant p < +\infty$, $(l^p, \|\cdot\|_p)$ 是一个自反的 Banach 空间,其对偶空间是 $(l^q, \|\cdot\|_q)$,其中 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. 进一步,$(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 是一个 Banach 空间,对 $1 < p < +\infty$,当 $\|u\|_\infty \leqslant \|u\|_p$, $u \in l^p$ 时,嵌入 $l^p \to l^\infty$ 是连续的.

记 $X = \{u: [r_1, r_2] \times \mathbf{Z} \to \mathbf{R},\ \sum\limits_{(m,n) \in [r_1, r_2] \times \mathbf{Z}} a(m,n) |u(m,n)|^p < \infty\}$,

$$\|u\| = \Big(\sum_{(m,n) \in [r_1, r_2] \times \mathbf{Z}} a(m,n) |u(m,n)|^p\Big)^{1/p}.$$

**引理 2** $(X, \|\cdot\|)$ 是一个自反的 Banach 空间且嵌入 $X \to l^p$ 是紧的.

**证明** 显然 $X$ 是一个 Banach 空间. 下面证明它是一致凸的. 考虑 $\sigma$-有限测度空间 $([r_1, r_2] \times \mathbf{Z}, \mu)$,这里测度定义如下:

$$\mu(\varnothing) = 0 \text{ 且对所有的 } S \subset [r_1, r_2] \times \mathbf{Z},\ S \neq \varnothing,\ \mu(S) = \sum_{(m,n) \in [r_1, r_2] \times \mathbf{Z}} a(m,n).$$

那么 $X$ 是定义在 $([r_1, r_2] \times \mathbf{Z}, \mu)$ 上的 $L^p$-空间. 根据 Clakson 定理[6] 知,$X$ 是一致凸的. 再根据 Milman-Petts 定理[6] 知,$X$ 是自反的. 又

$$\|u\| = \Big(\sum_{(m,n) \in [r_1, r_2] \times \mathbf{Z}} a(m,n) |u(m,n)|^p\Big)^{1/p} \geqslant a_0^{1/p} \Big(\sum_{(m,n) \in [r_1, r_2] \times \mathbf{Z}} |u(m,n)|^p\Big)^{1/p} = a_0^{1/p} \|u\|_p,\ u \in X, \tag{3}$$

所以嵌入 $X \to l^p$ 是连续的.

以下证明紧性. 设 $u_j(m,n)$ 是 $X$ 中的有界序列,即存在常数 $M > 0$,对任意的 $(m,n) \in [r_1, r_2] \times \mathbf{Z}$

有 $\|u_j\|^p \leqslant M$,那么在 $X$ 中有一个子序列收敛到 $u\in X$. 假设 $u=0$,即 $u_j(m,n)\to 0,\ j\to\infty$. 由条件$(\mathrm{H}_1)$,对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $h\in\mathbf{N}$ 使得 $a(m,n)>\dfrac{\varepsilon}{1+M},\ m\in[r_1,r_2],\ |n|>h$. 由有限和的连续性知,存在 $N\in\mathbf{N}$ 使得 $\sum\limits_{m\in[r_1,r_2],\ |n|\leqslant h}|u(m,n)|^p<\dfrac{\varepsilon}{1+M},\ j>N$,所以对所有的 $n>N$ 有

$$\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}a(m,n)|u_j(m,n)|^p=\sum_{m\in[r_1,r_2],\ |n|\leqslant h}a(m,n)|u_j(m,n)|^p+$$
$$\sum_{m\in[r_1,r_2],\ |n|>h}a(m,n)|u_j(m,n)|^p\leqslant\frac{\varepsilon}{1+M}(1+\|u_j\|^p)<\varepsilon,$$

故在 $l^p$ 中 $u_j(m,n)\to 0,\ j\to\infty$.

**引理 3**　如果 $S$ 是 $X$ 的紧子集,那么对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $h\in\mathbf{N}$ 使得

$$\Big(\sum_{m\in[r,r],\ |n|>h}a(m,n)|u(m,n)|^p\Big)^{1/p}<\varepsilon,\ u\in S.$$

由于证明与文献[4]中引理 4 的证明类似,故省略.

**注 1**　$l^p$ 中的紧集也有类似的性质.

记:$\Phi(u)=\dfrac{1}{p}\sum\limits_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}[|\Delta_2\Delta_1u(m-1,n-1)|^p+a(m,n)|u(m,n)|^p],\ u\in X$;

$$\Psi(u)=\frac{1}{2}\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}[\alpha(m,n)(\Delta_1u(m-1,n))^2+\beta(m,n)(\Delta_2u(m,n))^2],\ u\in X;$$

$$J(u)=\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}F(m,n,u(m,n)),\ u\in l^p.$$

**引理 4**　如果条件$(\mathrm{H}_1)$成立,那么 $\Phi\in C^1(X)$ 且

$$\langle\Phi'(u),v\rangle=\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]}[\varphi_p(\Delta_2\Delta_1u(m-1,n-1))\Delta_2\Delta_1v(m-1,n-1)+$$
$$a(m,n)\varphi_p(u(m,n))v(m,n)].$$

**证明**　根据 Minkowski 不等式,不难推出

$$\Big(\sum_{m\in[r_1,r_2],\ |n|\leqslant h}|\Delta_2\Delta_1u(m-1,n-1)|^p\Big)^{1/p}=$$
$$\Big(\sum_{m\in[r_1,r_2],\ |n|\leqslant h}|u(m,n)-u(m-1,n)-u(m,n-1)+u(m-1,n-1)|^p\Big)^{1/p}\leqslant 4\|u\|_p.$$

令 $h\to\infty$ 得到$\Big(\sum\limits_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}|\Delta_2\Delta_1u(m-1,n-1)|^p\Big)^{1/p}\leqslant 4\|u\|_p$,所以 $\Phi$ 有定义. 选择 $\mathbf{R}_1>0$ 使得 $\|u\|_p,\|v\|_q<\mathbf{R}_1$. 对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $h\in\mathbf{N}$ 使得$\Big(\sum\limits_{m\in[r,r],\ |n|>h}|\Delta_2\Delta_1u(m,n)|^p\Big)^{1/p}<\dfrac{\varepsilon}{3(4\mathbf{R}_1)^{p-1}}$. 进一步存在 $0<\tau_0<1$,使得对所有的 $0<\tau<\tau_0$ 有

$$\sum_{m\in[r,r],\ |n|\leqslant h}\Big|\frac{|\Delta_2\Delta_1(u+\tau v)(m-1,n-1)|^p-|\Delta_2\Delta_1u(m-1,n-1)|^p}{\tau p}-$$
$$\varphi_p(\Delta_2\Delta_1u(m-1,n-1))\Delta_2\Delta_1v(m-1,n-1)\Big|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

根据微分中值定理,固定 $0<\tau<\tau_0$,对所有 $m\in[r_1,r_2],\ |n|>h$,存在 $\tau_k\in(0,\tau)$ 使得

$$\frac{|\Delta_2\Delta_1(u+\tau v)(m-1,n-1)|^p-|\Delta_2\Delta_1u(m-1,n-1)|^p}{\tau p}=$$
$$\varphi_p(\Delta_2\Delta_1(u+\tau_kv)(m-1,n-1))\Delta_2\Delta_1v(m-1,n-1).$$

记 $\omega(m,n)=u(m,n)+\tau_kv(m,n),\ m\in[r_1,r_2],\ |n|>h\ (\omega(m,n)=0,\ m\in[r_1,r_2],|n|\leqslant h)$,于是有 $\omega\in X,\ \|\omega\|_p<2\mathbf{R}_1$. 再由 Hölder 不等式得

$$\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}\left|\left[\frac{|\Delta_2\Delta_1(u+\tau v)(m-1,n-1)|^p-|\Delta_2\Delta_1 u(m-1,n-1)|^p}{\tau p}-\right.\right.$$
$$\left.\left.\varphi_p(\Delta_2\Delta_1(u+\tau_k v)(m-1,n-1))\Delta_2\Delta_1 v(m-1,n-1)\right]\right|\leqslant$$
$$\frac{\varepsilon}{3}+\sum_{m\in[r_1,r_2],|n|>h}|\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u(m-1,n-1))\Delta_2\Delta_1 v(m-1,n-1)|+$$
$$\sum_{m\in[r_1,r_2],|n|>h}|\varphi_p(\Delta_2\Delta_1\omega(m-1,n-1))\Delta_2\Delta_1 v(m-1,n-1)|\leqslant$$
$$\frac{\varepsilon}{3}+\Big(\sum_{m\in[r_1,r_2],|n|>h}|\Delta_2\Delta_1 u(m-1,n-1)|^p\Big)^{1/q}+$$
$$\Big(\sum_{m\in[r_1,r_2],|n|>h}|\Delta_2\Delta_1\omega(m-1,n-1)|^p\Big)^{1/q}\Big(\sum_{m\in[r_1,r_2],|n|>h}|\Delta_2\Delta_1 v(m-1,n-1)|^p\Big)^{1/q}\leqslant$$
$$\frac{\varepsilon}{3}+((2^p\|u\|_p^p)^{1/q}+(2^p\|\omega\|_p^p)^{1/q})\Big(\sum_{m\in[r_1,r_2],|n|>h}|\Delta_2\Delta_1 v(m-1,n-1)|^p\Big)^{1/p}<\varepsilon,$$

从而

$$\lim_{\tau\to0^+}\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}\frac{|\Delta_2\Delta_1(u+\tau v)(m-1,n-1)|^p-|\Delta_2\Delta_1 u(m-1,n-1)|^p}{\tau p}=$$
$$\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u(m-1,n-1))\Delta_2\Delta_1 v(m-1,n-1).$$

类似地,有

$$\lim_{\tau\to0^+}\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}\frac{|(u+\tau v)(m,n)|^p-|u(m,n)|^p}{\tau p}=\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}a(m,n)\varphi_p(u(m,n))v(m,n).$$

从上面的两式得

$$\lim_{\tau\to0^+}\frac{\Phi(u+\tau v)-\Phi(u)}{\tau p}=\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}[\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u(m-1,n-1))\Delta_2\Delta_1 v(m-1,n-1)+$$
$$a(m,n)\varphi_p(u(m,n))v(m,n)].$$

显然上式右端的算子落在 $l^q$ 中,根据引理2知它在 $X^*$ 中.由此知 $\Phi$ 是 Gâteaux 可微的.

余下证明 $\Phi'$ 是连续的.设 $\{u_n\}$ 是 $X$ 中的一个序列,$u\in X$ 使得 $u_n\to u$.根据引理4,对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $h\in\mathbf{N}$ 使得:

$$\Big(\sum_{m\in[r_1,r_2],|n|>h}|\Delta_2\Delta_1 u_j(m-1,n-1)|^p\Big)^{1/p}<\Big(\frac{\varepsilon a_0^{1/p}}{6}\Big)^q,\ j\in\mathbf{N};$$
$$\Big(\sum_{m\in[r_1,r_2],|n|>h}|\Delta_2\Delta_1 u(m-1,n-1)|^p\Big)^{1/p}<\Big(\frac{\varepsilon a_0^{1/p}}{6}\Big)^q.$$

此外,存在 $\tau\in\mathbf{N}$ 使得

$$\Big(\sum_{m\in[r_1,r_2],|n|>h}|\Delta_2\Delta_1 u_j(m-1,n-1)|^p\Big)^{1/p}<\Big(\frac{\varepsilon a_0^{1/p}}{6}\Big)^q,\ j\geqslant\tau.$$

所以对所有 $v\in X$, $\|v\|\leqslant1$, $j\geqslant\tau$,由 Hölder 不等式及式(3)得

$$\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}|[\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u_j(m-1,n-1))-\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u(m-1,n-1))]\Delta_2\Delta_1 v(m-1,n-1)|\leqslant$$
$$\frac{\varepsilon a_0^{1/p}}{6}\Big[\Big(\sum_{m\in[r_1,r_2],|n|\leqslant h}|\Delta_2\Delta_1 v(m-1,n-1)|^p\Big)^{1/p}+2\Big(\sum_{m\in[r_1,r_2],|n|>h}|\Delta_2\Delta_1 v(m-1,n-1)|^p\Big)^{1/p}\Big]\leqslant$$
$$\frac{\varepsilon a_0^{1/p}}{6}(6\|v\|_p^p)\leqslant\varepsilon.$$

于是在 $l^q$ 中 $\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u_j(m-1,n-1))\to\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u(m-1,n-1))$.类似地,可以证明在 $X^*$ 中 $\varphi_p(u_j(m,n))\to\varphi_p(u(m,n))$.故 $\Phi'$ 是连续的且 $\Phi\in C^1(X)$.

**引理5** 如果条件($H_2$)成立,那么 $\Psi\in C^1(X)$ 且

$$\langle \Psi'(u),v\rangle = \sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]} [\alpha(m,n)\Delta_1 u(m-1,n)\Delta_1 v(m-1,n)+ \beta(m,n)\Delta_2 u(m,n-1)\Delta_2 v(m,n-1)].$$

由于证明类似于引理 4 的证明，故省略.

**引理 6** 如果 $f$ 满足($H_3$)，那么 $J\in C^1(l^p)$ 且对所有的 $u,v\in l^p$，

$$\langle J'(u),v\rangle = \sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}} f(m,n,u(m,n))v(m,n).$$

**引理 7** 若条件($H_1$)和($H_3$)成立，则对所有的$\lambda>0$，$\Phi-\lambda J$ 的每一个临界点是问题(1)—(2)的解.

**证明** 固定$\lambda>0$且假设 $\Phi'(u)-\lambda J'(u)=0$. 根据引理 4 和引理 5 知 $\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}[\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u(m-1,n-1))\Delta_2\Delta_1 v(m-1,n-1)+a(m,n)\varphi_p(u(m,n))v(m,n)-\lambda f(m,n,u(m,n)v(m,v))]=0$. 对任意的$(h,k)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}$，定义 $e_{(h,k)}(m,n)=\delta_{(hm,kn)}$，$(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}$. 如果 $h=m$，$k=n$，则 $\delta_{(hm,kn)}=1$，否则 $\delta_{(hm,kn)}=0$. 于是有 $\Delta_2\Delta_1\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u(h-1,k-1))+a(h,k)\varphi_p(u(h,k))-\lambda f(h,k,u(h,k))=0$，所以 $u$ 是问题(1)—(2)的解.

**引理 8**[7] 如果 $X$ 是一个自反的 Banach 空间，$I\in C^1(X)$ 满足 P-S 条件且存在 $\bar u\in X$ 及实数 $0<r<\mathbf{R}\leqslant\|\bar u\|$ 使得 $\inf\limits_{r\leqslant\|u\|\leqslant\mathbf{R}} I(u)=\alpha\geqslant\max\{I(0),I(\bar u)\}$，那么 $I$ 存在一个临界点 $\hat u\in X$ 使得 $I(\hat u)\geqslant\alpha$. 且如果 $I(\hat u)=\alpha$，那么 $0<r\leqslant\|\bar u\|\leqslant\mathbf{R}$.

## 2 主要结果及其证明

**定理 1** 假设条件($H_1$)—($H_6$)均成立，那么对所有的$\lambda>0$，$\Phi+\Psi-\lambda J$ 是强制的且满足 P-S 条件.

**证明** 固定$\lambda>0$，由($H_4$)知，对所有的 $0<\varepsilon<\dfrac{a_0}{\lambda p}$，存在 $T>0$ 使得 $F(h,k,t)\leqslant\varepsilon|t|^p$，$|t|>T$. 另一方面，由($H_4$)知存在 $\omega\in l^1$ 使得 $F(h,k,t)\leqslant\omega(h,k)$，$|t|\leqslant T$. 于是得

$$\Phi(u)+\Psi(u)-\lambda J(u)\geqslant\frac{\|u\|^p}{p}-\sum_{|u(h,k)|\leqslant T}F(h,k,u(h,k))-\lambda\sum_{|u(h,k)|>T}F(h,k,u(h,k))\geqslant \frac{\|u\|^p}{p}-\lambda\|\omega\|_1-\lambda\varepsilon\|u\|_p^p\geqslant\left(\frac{1}{p}-\frac{\lambda\varepsilon}{a_0}\right)\|u\|^p-\lambda\|\omega\|_1\to+\infty\ (\|u\|\to+\infty),$$

因此 $\Phi+\Psi-\lambda J$ 满足 P-S 条件.

假设$\{u_n\}\subset X$ 使得 $\Phi(u_n)+\Psi(u_n)-\lambda J(u_n)$ 有界且在 $X^*$ 中有 $\Phi'(u_n)+\Psi'(u_n)-\lambda J'(u_n)\to 0$，那么$\{u_n\}\subset X$ 有界. 根据引理 3 知存在子序列，在此仍记为$\{u_n\}$使得在 $X$ 中 $u_n\to u$ 且在 $l^p$ 中 $u_n\to u$. 且有

$$\lim_j\langle\Phi'(u)+\Psi'(u)-\lambda J'(u),u_j-u\rangle=0,\ \lim_j\langle J'(u_j)-J'(u),u_j-u\rangle=0.$$

类似于引理 4 的证明，有：

$$\lim_j\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}[\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u_j(m-1,n-1))-\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u_j(m-1,n-1))](\Delta_2\Delta_1 u_j(m-1,n-1)-\Delta_2\Delta_1 u(m-1,n-1))=0,$$

$$\lim_j\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}[\alpha(m,n)((\Delta_1 u_j(m-1,n))-\Delta_1 u(m-1,n))](\Delta_1 u_j(m-1,n)-\Delta_1 u(m-1,n))=0,$$

$$\lim_j\sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}[\beta(m,n)((\Delta_2 u_j(m,n-1))-\Delta_2 u(m,n-1))](\Delta_2 u_j(m,n-1)-\Delta_2 u(m,n-1))=0.$$

于是得$\lim\limits_j\langle\Phi'(u_j)+\Psi'(u_j)-\Phi'(u)-\Psi'(u),u_j-u\rangle=0$.

假设 $p\geqslant 2$，那么利用不等式$(\varphi_p(x)-\varphi_p(y))(x-y)\geqslant c|x-y|^p$，$x,y\in\mathbf{R}$，$p\geqslant 2$ 得

$$c\|u_j-u\|^p \leqslant \langle \Phi'(u_j)+\Psi'(u_j)-\Phi(u)-\Psi(u),u_j-u\rangle - \sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}[\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u_j(m-1,n-1))-\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u_j(m-1,n-1))](\Delta_2\Delta_1 u_j(m,n)- \Delta_2\Delta_1 u(m,n)) - \sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}[\alpha(m,n)(\Delta_1 u_j(m-1,n)-\Delta_1 u(m-1,n))](\Delta_1 u_j(m-1,n)- \Delta_1 u(m-1,n)) - \sum_{(m,n)\in[r_1,r_2]\times\mathbf{Z}}[\beta(m,n)(\Delta_2 u_j(m,n-1)-\Delta_2 u(m,n-1))](\Delta_2 u_j(m,n-1)- \Delta_2 u(m,n-1)).$$

令 $j\to\infty$,那么 $u_j\to u$.对于 $1<p<2$ 的情况利用不等式

$$(\varphi_p(x)-\varphi_p(y))(x-y)\geqslant(|x|+|y|)^{p-2},\ x,y\in\mathbf{R},\ 1<p<2,$$

可以得到同样的结果.

**定理 2** 假设条件$(H_1)$及$(H_3)$—$(H_6)$成立,那么对所有的$\lambda>0$问题(1)—(2)至少存在 2 个非平凡解. 进一步,对于任意一个非平凡解 $u(m,n)$,存在 $k_\pm\in\mathbf{Z}$,使得$(u(m,n))_{m\in[r_1,r_2],\,n\in(-\infty,k_-]}$ 和 $(u(m,n))_{m\in[r_1,r_2],\,n\in[k_+,+\infty)}$ 都是严格偏单调的.

**证明** 利用引理 2—8,类似于文献[4]中定理 1 的证明,可以容易地获得解的存在性.对于解的单调性只需注意:

如果$(h_j,k_j)$是非平凡解 $u(m,n)$ 的局部正极大值点,那么

$$\Delta_2\Delta_1\varphi_p(\Delta_2\Delta_1 u(m-1,n-1))+\alpha(m,n)\Delta_1^2 u(m-1,n)+\beta(m,n)\Delta_2^2 u(m,n-1)\leqslant 0,$$

便可得出所要的结论,即存在 $k_\pm\in\mathbf{Z}$ 使得$(u(m,n))_{m\in[r_1,r_2],\,n\in(-\infty,k_-]}$ 和$(u(m,n))_{m\in[r_1,r_2],\,n\in[k_+,+\infty)}$ 都是严格单调的.

## 参考文献:

[1] Cabada A, Iannizzotto A, Tersian S. Multiple solutions for discrete boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 2009,356:418-428.

[2] De Coster C, Willem M. Density, spectral theory and homoclinics for singular Sturm-Liouville system[J]. J Comput Appl Math, 1994,52:45-70.

[3] Faraci F, Iannizzotto A. Multiplicity theorems for discrete boundary value problems[J]. Aequationes Math, 2007, 74:111-118.

[4] Lannizzotto A, Tersian S A. Multiple homoclinic solutions for the discrete $p$-Laplacian via critial point theory[J]. J Math Anal Appl, 2013,403:173-182.

[5] Jiang L Q, Zhou Z. Three solutions to Dirichlet boundary value problems for $p$-Laplacian difference equations[J]. Adv Difference Equations, 2008,11:345916

[6] Fabian M, Habala P, Hájek P, et al. Banach Space Theory[M]. Springer, 2011.

[7] Pucci P, Serrin J. A mountain pass theorem[J]. J Differential Equations, 1985,60:142-149.

[8] 司文艺,侯成敏.一类四阶偏差分方程边值问题解的存在性[J].延边大学学报(自然科学版),2010,36(1):1-6.