文章编号：1004-4353(2015)04-0295-05

线性回归模型参数的变点检验

刘 宣
(阳光学院 基础教研部，福建 福州 350015)

摘要： 线性回归模型随应用环境的改变其模型的参数有可能发生变化，因此有必要对模型的参数进行检验与分析. 对于误差项不一定服从正态分布的线性回归模型，通过使用前后样本最小二乘估计量之差的适当权数，获得了变点检验统计量及其渐进分布.

关键词： 线性回归模型；变点；最小二乘估计
中图分类号： O212.1 **文献标识码：** A

Testing for chamge-point of parameters in the linear regression model

LIU Xuan
(*Department of Basic Teaching and Research*, *Yango College*, *Fuzhou* 350015, *China*)

Abstract: The parameters of linear regression models may change with the change of the application environment. So it is necessary to test and analyze the parameters of the model. Using appropriate weight difference of the front and back samples least squares estimators of the regression parameters, we obtained an effective test statistics and gradual distribution for linear regression model that error distribution may not satisfy normal distribution.

Keywords: linear regression model; change point; least squares estimator

0 引言

设线性回归模型：

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{X} = (1, X_1, X_2, \cdots, X_{p-1})$ 是协变量，$\boldsymbol{Y}$ 是响应变量，$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{p-1})^{\mathrm{T}}$ 是回归系数. 如果有 n 个观察值$(X_{1,i}, X_{2,i}, \cdots, X_{p-1,i}, Y_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则

$$\hat{Y}_n = \hat{X}_n \boldsymbol{\beta} + \hat{\varepsilon}_n, \tag{2}$$

其中 $\hat{Y}_n = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$，$\hat{X}_n = \begin{pmatrix} 1 & X_{1,1} & X_{2,1} & \cdots & X_{p-1,1} \\ 1 & X_{1,2} & X_{2,2} & \cdots & X_{p-1,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{1,n} & X_{2,n} & \cdots & X_{p-1,n} \end{pmatrix}$，$\hat{\varepsilon}_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$.

在实际问题中，模型(2) 的线性结构可能不变，但其中的回归参数可能会随着某些因素而发生改变. 如果改变，则线性模型(2) 可由下列模型代替：

收稿日期： 2015－10－13
作者简介： 刘宣(1982—)，男，讲师，研究方向为概率论与数理统计.

$$Y_i=\begin{cases}\hat{X}(i)\boldsymbol{\beta}+\varepsilon_i,\ 1\leqslant i\leqslant k^*;\\ \hat{X}(i)\gamma+\varepsilon_i,\ k^*<i\leqslant n,\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\hat{X}(i)=(1,X_{1,i},X_{2,i},\cdots,X_{p-1,i})$,回归参数 $\boldsymbol{\beta}\neq\gamma$, k^* 称为变点.由此本文提出如下变点问题:根据已有的样本推断线性回归模型的回归参数是否发生改变?若发生改变,将何时发生改变?20 世纪五六十年代,文献[1]和[2]在线性回归模型的误差项服从正态分布的情况下,应用最大似然方法检验了回归参数的变点问题.随后,有关线性模型回归参数的变点问题获得了广泛关注,且在不同的应用背景下,出现了经验似然方法、union-intersection 方法、SCI 准则方法、贝叶斯方法等不同的方法,这些方法各有优劣,具体可参考文献[3-7].本文借鉴文献[8]中对函数型数据中均值函数变点的检验方法(此方法已成功应用到气温数据的变点检测),在线性回归模型(1)的误差项满足独立同分布的条件下分析了回归参数只有 1 个变点的检验问题:

$H_0:\beta_0=\beta_2=\cdots=\beta_{p-1}$;

$H_1:\beta_i\neq\beta_j,\ \exists\, i,j\in\{(i,j)\mid 0\leqslant i<j\leqslant p-1\}$.

若出现多个变点,可用二分法逐步检验.下面给出变点分析需要的一些假设条件:

假设 1 线性回归模型(1)满足:$E(X_i)=0$, $D(X_i)=\sigma_i^2<\infty$, $i=1,2,\cdots,p-1$, $E(\boldsymbol{\varepsilon})=0$, $D(\varepsilon)=\sigma^2<\infty$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 相互独立.

假设 2 选取样本的容量为 N, $\hat{X}_k^{\mathrm{T}}\hat{X}_k\,(1\leqslant k\leqslant N)$ 是非奇异矩阵.

假设 3 样本观察值满足模型 $Y_i=\begin{cases}\hat{X}(i)\boldsymbol{\beta}+\varepsilon_i,\ 1\leqslant i\leqslant k^*;\\ \hat{X}(i)\gamma+\varepsilon_i,\ k^*<i\leqslant N,\end{cases}$ 其中 $\hat{X}(i)=(1,X_{1,i},X_{2,i},\cdots,X_{p-1,i})$.

1 检验过程

假设 $H_0:\boldsymbol{\beta}=\gamma$, $H_1:\boldsymbol{\beta}\neq\gamma$.若假设 1 和 2 成立,则可分别得参数 $\boldsymbol{\beta}$ 的前 k 个样本和后 $N-k$ 个样本的最小二乘估计:

$$\hat{\beta}_k=(\hat{X}_k^{\mathrm{T}}\hat{X}_k)^{-1}\hat{X}_k^{\mathrm{T}}\hat{Y}_k,\ \tilde{\beta}_k=(\widetilde{X}_k^{\mathrm{T}}\widetilde{X}_k)^{-1}\widetilde{X}_k^{\mathrm{T}}\widetilde{Y}_k,\ 1\leqslant k<N,$$

其中

$$\hat{X}_k=\begin{pmatrix}1 & X_{1,1} & X_{2,1} & \cdots & X_{p-1,1}\\ 1 & X_{1,2} & X_{2,2} & \cdots & X_{p-1,2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & X_{1,k} & X_{2,k} & \cdots & X_{p-1,k}\end{pmatrix},\ \hat{Y}_k=\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_k\end{pmatrix},\ \hat{\varepsilon}_k=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_k\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{X}_k=\begin{pmatrix}1 & X_{1,k+1} & X_{2,k+1} & \cdots & X_{p-1,k+1}\\ 1 & X_{1,k+2} & X_{2,k+2} & \cdots & X_{p-1,k+2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & X_{1,N} & X_{2,N} & \cdots & X_{p-1,N}\end{pmatrix},\ \widetilde{Y}_k=\begin{pmatrix}Y_{k+1}\\ Y_{k+2}\\ \vdots\\ Y_N\end{pmatrix},\ \tilde{\varepsilon}_k=\begin{pmatrix}\varepsilon_{k+1}\\ \varepsilon_{k+2}\\ \vdots\\ \varepsilon_N\end{pmatrix}.$$

如果 H_0 成立,则 $\Delta_k=\hat{\beta}_k-\tilde{\beta}_k$ 应该比较小,但也易知当 k 接近 1 或 N 时,Δ_k 会变大.为了缓解这种影响,可对 Δ_k 加权形成统计量:

$$\hat{\Delta}_k=\sqrt{\frac{k(N-k)}{N}}(\hat{\beta}_k-\tilde{\beta}_k).$$

若 H_0 不成立,则存在某个 k,使 $\hat{\Delta}_k$ 较大.令 $k=[Nt]$, $t\in(0,1)$, $T_N(t)=\sqrt{(1-\frac{[Nt]}{N})[Nt]}(\hat{\beta}_{[Nt]}-\tilde{\beta}_{[Nt]})$, $A_N(t)=T_N^{\mathrm{T}}(t)\hat{\Sigma}_p^{-1}T_N(t)$,其中 $\hat{\Sigma}_p^{-1}$ 是 $\Sigma_p^{-1}=\sigma^2\,[E(\hat{X}^{\mathrm{T}}(1)\hat{X}(1))]^{-1}$ 的矩法估计量.

2　主要结论及其证明

定理 1　若假设 1 和 2 成立,且在 H_0 成立的条件下,有 $A_N(t)\xrightarrow{d}\chi^2(p)$, $0<t<1$.

证明　由 $\hat{\beta}_{[Nt]}=(\hat{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\hat{X}_{[Nt]})^{-1}\hat{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\hat{Y}_{[Nt]}$, $\hat{Y}_{[Nt]}=\hat{X}_{[Nt]}\boldsymbol{\beta}+\hat{\varepsilon}_{[Nt]}$,得

$$\sqrt{(1-\frac{[Nt]}{N})[Nt]}(\hat{\beta}_{[Nt]}-\boldsymbol{\beta})=\sqrt{1-\frac{[Nt]}{N}}\ (\frac{\hat{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\hat{X}_{[Nt]}}{[Nt]})^{-1}\ \frac{\hat{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\hat{\varepsilon}_{[Nt]}}{\sqrt{[Nt]}}.$$

因为 $\hat{X}^{\mathrm{T}}(i)$, $i=1,2,\cdots,N$ 独立同分布且与 ε_i, $i=1,2,\cdots,N$ 独立,所以由大数定理和中心极限定理可得:

$$\frac{\hat{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\hat{X}_{[Nt]}}{[Nt]}=\frac{1}{[Nt]}\sum_{i}^{[Nt]}\hat{X}^{\mathrm{T}}(i)\hat{X}(i)\xrightarrow{P}E(\hat{X}^{\mathrm{T}}(1)\hat{X}(1)),$$

$$\frac{\hat{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\hat{\varepsilon}_{[Nt]}}{\sqrt{[Nt]}}=\frac{1}{\sqrt{[Nt]}}\sum_{i}^{[Nt]}\hat{X}^{\mathrm{T}}(i)\varepsilon_i\xrightarrow{d}\boldsymbol{\xi}.$$

其中 $\boldsymbol{\xi}$ 是服从均值为 0,协方差阵为 $\sigma^2E(\hat{X}^{\mathrm{T}}(1)\hat{X}(1))$ 的正态分布的随机向量. 于是,由 Slutsky 定理有

$$\sqrt{(1-\frac{[Nt]}{N})[Nt]}(\hat{\beta}_{[Nt]}-\boldsymbol{\beta})\xrightarrow{d}\boldsymbol{\xi}_1,$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_1=\sqrt{1-t}E\,[\hat{X}^{\mathrm{T}}(1)\hat{X}(1)]^{-1}\boldsymbol{\xi}$ 是服从均值为 0,协方差阵为$(1-t)\sigma^2\,[E(\hat{X}^{\mathrm{T}}(1)\hat{X}(1))]^{-1}$ 的正态分布的随机向量. 类似观察到:

$$\sqrt{(1-\frac{[Nt]}{N})[Nt]}(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\beta}_{[Nt]})=-\sqrt{1-\frac{[Nt]}{N}}\ (\frac{\widetilde{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\widetilde{X}_{[Nt]}}{[Nt]})^{-1}\ \frac{\widetilde{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\tilde{\varepsilon}_{[Nt]}}{\sqrt{[Nt]}}.$$

由大数定理和中心极限定理得:

$$\frac{\widetilde{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\widetilde{X}_{[Nt]}}{[Nt]}=\frac{\widetilde{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\widetilde{X}_{[Nt]}}{N-[Nt]}\ \frac{N-[Nt]}{[Nt]}\xrightarrow{P}(\frac{1}{t}-1)E(\hat{X}^{\mathrm{T}}(1)\hat{X}(1)),$$

$$\frac{\widetilde{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\tilde{\varepsilon}_{[Nt]}}{\sqrt{[Nt]}}=\frac{\widetilde{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\tilde{\varepsilon}_{[Nt]}}{\sqrt{N-[Nt]}}\ \frac{\sqrt{N-[Nt]}}{\sqrt{[Nt]}}\xrightarrow{d}\sqrt{\frac{1}{t}-1}\,\boldsymbol{\xi}.$$

于是,由 Slutsky 定理有

$$\sqrt{(1-\frac{[Nt]}{N})[Nt]}(\boldsymbol{\beta}-\tilde{\beta}_{[Nt]})\xrightarrow{d}\boldsymbol{\xi}_2.$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_2=-\sqrt{t}E\,[\hat{X}^{\mathrm{T}}(1)\hat{X}(1)]^{-1}\boldsymbol{\xi}$ 是服从均值为 0,协方差阵为 $t\sigma^2\,[E(\hat{X}^{\mathrm{T}}(1)\hat{X}(1))]^{-1}$ 的正态分布的随机向量. 综上有

$$T_N(t)=\sqrt{(1-\frac{[Nt]}{N})[Nt]}(\hat{\beta}_{[Nt]}-\tilde{\beta}_{[Nt]})=$$

$$\sqrt{(1-\frac{[Nt]}{N})[Nt]}(\hat{\beta}_{[Nt]}-\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}-\tilde{\beta}_{[Nt]})\xrightarrow{d}N(0,\Sigma_p^{-1}).$$

又因为 $\hat{\Sigma}_p^{-1}$ 是 Σ_p^{-1} 的矩法估计量,所以 $\hat{\Sigma}_p^{-1}\xrightarrow{P}\Sigma_p^{-1}$,故 $A_N(t)=T_N^{\mathrm{T}}(t)\hat{\Sigma}_pT_N(t)\xrightarrow{d}\chi^2(p)$. 定理得证.

对于 $1\leqslant k\leqslant d$,令

$$B_1=(1-\theta)^2\,(\boldsymbol{\beta}-\gamma)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}-\gamma),\ B_2=\theta^2\,(\boldsymbol{\beta}-\gamma)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}-\gamma),$$

$$B_N(t)=\frac{1}{\sqrt{N}}T_N\,(t)^{\mathrm{T}}\,\frac{1}{\sqrt{N}}T_N(t),\ B(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{1-t}B_1,\ 0<t\leqslant\theta;\\[2ex]\dfrac{1-t}{t}B_2,\ \theta<t<1.\end{cases}$$

对某个 $0<\theta<1$,令 $k^*=[N\theta]$. 以下考虑变点的估计问题.

定理 2　若假设 1—3 成立,则 $\sup\limits_{0<t<1}|B_N(t)-B(t)|=o_p(1)$.

证明 若 $0<t\leqslant\theta$，则由最小二乘估计的相合性得

$$\frac{\sqrt{(1-\frac{[Nt]}{N})[Nt]}}{\sqrt{N}}\hat{\beta}_{[Nt]}\xrightarrow{P}\sqrt{(1-t)t}\boldsymbol{\beta}.$$

注意到：

$$\tilde{\beta}_{[Nt]}=(\widetilde{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\widetilde{X}_{[Nt]})^{-1}\widetilde{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\widetilde{Y}_{[Nt]}=(\frac{\widetilde{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\widetilde{X}_{[Nt]}}{N})^{-1}(\frac{\widetilde{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\widetilde{Y}_{[Nt]}}{N})=$$

$$\{\frac{1}{N}\sum_{i=[Nt]+1}^{N}\hat{X}^{\mathrm{T}}(i)\hat{X}(i)\}^{-1}\{\frac{1}{N}\sum_{i=[Nt]+1}^{[N\theta]}\hat{X}^{\mathrm{T}}(i)\hat{Y}_i+\frac{1}{N}\sum_{i=[N\theta]+1}^{N}\hat{X}^{\mathrm{T}}(i)\hat{Y}_i\}\xrightarrow{P}$$

$$(1-t)^{-1}(\theta-t)\boldsymbol{\beta}+(1-t)^{-1}(1-\theta)\gamma.$$

所以有

$$B_N(t)=\frac{1}{\sqrt{N}}T_N(t)^{\mathrm{T}}\frac{1}{\sqrt{N}}T_N(t)\xrightarrow{P}\frac{t}{1-t}(1-\theta)^2(\boldsymbol{\beta}-\gamma)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}-\gamma). \tag{4}$$

若 $\theta<t<1$，则 $k^*=[N\theta]\leqslant[Nt]$，于是 $\tilde{\beta}_{[Nt]}\xrightarrow{P}\gamma$. 注意到：

$$\hat{\beta}_{[Nt]}=(\hat{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\hat{X}_{[Nt]})^{-1}\hat{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\hat{Y}_{[Nt]}=(\frac{\hat{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\hat{X}_{[Nt]}}{N})^{-1}(\frac{\hat{X}_{[Nt]}^{\mathrm{T}}\hat{Y}_{[Nt]}}{N})=$$

$$\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{[Nt]}\hat{X}^{\mathrm{T}}(i)\hat{X}(i)\}^{-1}\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{[N\theta]}\hat{X}^{\mathrm{T}}(i)\hat{Y}_i+\frac{1}{N}\sum_{i=[N\theta]+1}^{[Nt]}\hat{X}^{\mathrm{T}}(i)\hat{Y}_i\}\xrightarrow{P}t^{-1}\theta\boldsymbol{\beta}+t^{-1}(t-\theta)\gamma.$$

由 $\hat{\beta}_{[Nt]}-\tilde{\beta}_{[Nt]}=\hat{\beta}_{[Nt]}-\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}-\tilde{\beta}_{[Nt]}$ 可得

$$B_N(t)=\frac{1}{\sqrt{N}}T_N(t)^{\mathrm{T}}\frac{1}{\sqrt{N}}T_N(t)\xrightarrow{P}\frac{1-t}{t}\theta^2(\boldsymbol{\beta}-\gamma)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}-\gamma). \tag{5}$$

结合式(4)和(5)得 $B_N(t)\xrightarrow{P}B(t)$. 证毕.

推论 1 若假设 1—3 成立，则当 $N\to\infty$ 时，$T_N(y)\xrightarrow{P}\infty$.

证明 在假设 1—3 成立的条件下，$\boldsymbol{\beta}\neq\gamma$，因此 $\int_0^1 B(t)\,\mathrm{d}t>0$，再由定理 2 可得证.

下面给出变点的估计量：$\hat{\theta}_N=\inf\{t:T_N(t)=\sup\limits_{0<y<1}\{T_N(y)\}\}$.

定理 3 若假设 1—3 成立，则 $\hat{\theta}_N\xrightarrow{P}\theta$.

证明 若 t_0 使 $T_N(t)$ 达到最大，必然也会使 $\frac{1}{N}T_N^{\mathrm{T}}(t)T_N(t)$ 达到最大，而定理 2 表明

$$\sup_{0<t<1}|B_N(t)-B(t)|\xrightarrow{P}0.$$

再结合假设 3 成立的条件下，$B_1>0$，$B_2>0$ 的结论，可知 $B(t)$ 在 $t=\theta$ 处达到最大值，故 $\hat{\theta}_N\xrightarrow{P}\theta$.

3 实例分析

在金融市场中，研究数据交易变化规律具有重要的意义. 1982 年，Holbert[9] 利用贝叶斯方法研究了波士顿股票交易所(BSE)和纽约证券交易所(NYAMSE)交易数据的变点问题. 1998 年，Chen Jie[4] 利用 SCI 方法重新研究了这一数据的变点问题. 本文选取 1968 年 1 月到 1969 年 11 月每个月的波士顿股票交易所和纽约证券交易所的交易数据(表 1)，以 NYAMSE 交易数据作为回归变量，BSE 交易数据作为响应变量，建立了一元线性回归模型. 下面检验该模型是否存在变点. 首先，计算出检验统计量 $A_N(t)=6.404\,282>\chi^2_{0.05}(2)=5.991$，由定理 1 知在 0.05 的显著性水平下应该拒绝原假设，这说明数据所建立的线性模型存在变点. 然后，利用定理 3 计算变点估计量，得 $\hat{\theta}_N=\frac{11}{24}$，由此可知交易数据所满

足的线性模型的参数从 1968 年 12 月开始变化，这一结果与 Holbert 及 Chen Jie 的研究结果一致，这表明本文所采用方法是有效的. 从方法上看，Holbert 的贝叶斯方法存在估计先验分布的问题，Chen Jie 的 SCI 方法要对随机误差项作正态分布的假定，而本文所采用的方法相对限制较少.

表 1　1968 年 1 月—1969 年 11 月每个月的波士顿股票交易所和纽约证券交易所的交易数据

时间	交易数据		时间	交易数据	
	NYAMSE	BSE		NYAMSE	BSE
1968 年 1 月	16 336.7	148.7	1969 年 1 月	16 482.2	106.0
1968 年 2 月	11 040.5	94.2	1969 年 2 月	13 905.4	112.1
1968 年 3 月	11 525.3	128.1	1969 年 3 月	11 973.7	103.5
1968 年 4 月	16 056.4	154.1	1969 年 4 月	12 573.6	92.5
1968 年 5 月	18 464.3	191.3	1969 年 5 月	16 566.8	116.9
1968 年 6 月	17 092.2	191.9	1969 年 6 月	13 558.7	78.9
1968 年 7 月	15 178.8	159.6	1969 年 7 月	11 530.9	57.4
1968 年 8 月	12 774.8	185.5	1969 年 8 月	11 278.0	75.9
1968 年 9 月	12 377.8	178.0	1969 年 9 月	11 263.7	109.8
1968 年 10 月	16 856.3	271.8	1969 年 10 月	15 649.5	129.2
1968 年 11 月	14 635.3	212.3	1969 年 11 月	12 197.1	115.1
1968 年 12 月	17 436.9	139.4			

参考文献：

[1] Quandt R E. The estimation of the parameters of a linear regression system obeying two separate regimes[J]. J Amer Statist Assoc, 1958,53:873-880.

[2] Quandt R E. Testing of the hypothesis that a linear regression system obeys two separate regimes[J]. J Amer Statist Assoc, 1960,55:324-330.

[3] Liu Yukun, Zou Changliang, Zhang Runchu. Empirical likelihood ratio test for a change-point in linear regression model[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2008,37(16):2551-2563.

[4] Chen Jie. Testing for a change point in linear regression models[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 1998,27(10):2481-2493.

[5] Hawkins D L. A u-i approach to retrospective testing for shifting parameters in a linear model[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 1989,18(8):3117-3134.

[6] Fan Tsai-Hung, Chang Kuo-Ching, Lee Chung-Bow. Bayesian estimation of the number of change points in simple linear regression models[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2006,35(4):689-710.

[7] Csorgo M, Horvath L. Limit Theorems in Change-Point Analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 1997.

[8] Berkes I, Gabrys R, Horvath L, et al. Detecting changes in the mean of functional observations[J]. J R Stat Soc Ser B, 2009,70:927-946.

[9] Holbert D. A Bayesian analysis of a switching linear model[J]. J Econometrics, 1982,19:77-87.