

文章编号: 1004-4353(2015)04-0292-03

两两 NQD 随机序列的完全收敛性

王宽程

(闽南理工学院 信息管理系, 福建 泉州 362700)

摘要: 利用矩不等式和截尾方法, 研究了两两 NQD 随机序列的完全收敛性, 并将独立阵列的相关极限定理推广到了两两 NQD 阵列的情形, 所得结果推广和改进了文献[6]中定理 3 的结论.

关键词: 两两 NQD 列; 慢变化函数; 完全收敛性

中图分类号: O211.4

文献标识码: A

Complete convergence for pairwise NQD random sequences

WANG Kuancheng

(Department of Information Management, Minnan University of Science and Technology,
Quanzhou 362700, China)

Abstract: By the mean's moment inequality and truncated method, this paper discussed the complete convergence on the pairwise NQD random sequences, which generalized the corresponding limit results for independent random variable on pairwise NQD random sequences. The results presented in this paper extend and improve the results of theorem three in document [6].

Key words: pairwise NQD random sequences; slowly variable function; complete convergence

0 引言

定义 1 称 X 和 Y 是 NQD (Negatively Quadrant Dependent) 的, 若对 $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 有

$$P(X < x, Y < y) \leq P(X < x)P(Y < y),$$

则称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是两两 NQD 的, 若对 $\forall i \neq j$, X_i 和 X_j 是 NQD 的.

两两 NQD 列是一类相当广泛的随机变量序列, 其中著名的 NA 列^[1] 就是它的特殊情况之一. 自 Lehmann^[2] 提出两两 NQD 列以来, 对其相关的研究虽已取得一些成果^[3-5], 但有关其阵列的研究相对较少. 吴群英等^[6] 和万成高^[7] 研究了阵列加权求和的收敛性问题, 本文利用他们的方法, 讨论了 NQD 列最大值的收敛性, 所得结果丰富了文献[6]中定理 3 的结果. 在本文中 C 表示与 n 无关的常数.

引理 1^[2] 设随机变量 X 和 Y 是 NQD 的, 则:

i) $E(XY) \leq EXEY$;

ii) $P(X > x, Y > y) \leq P(X > x)P(Y > y), \forall x, y \in \mathbf{R}$;

iii) 若 f, g 同为非降(或非增)函数, 则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 仍为 NQD 的.

引理 2^[5] 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是两两 NQD 列, $EX_n^2 < \infty (n \geq 1)$, 记 $T_j(k) = \sum_{i=j+1}^{j+k} (X_i - EX_i)$, 其中 $j \geq 0$, 则有:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad E(T_j(k))^2 &\leq \sum_{i=j+1}^{j+k} EX_i^2; \\ \text{ii)} \quad E[\max_{1 \leq k \leq n} (T_j(k))^2] &\leq \frac{4 \log^2 n}{\log^2 2} \sum_{i=j+1}^{j+n} EX_i^2. \end{aligned}$$

引理 3^[8] 设 $l(x) > 0$ 为 $x \rightarrow \infty$ 时的慢变化函数, 则:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(vx)}{l(x)} &= 1, \forall v > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(v+x)}{l(x)} = 1, \forall v > 0; \\ \text{ii)} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{2^k \leq x \leq 2^{k+1}} \frac{l(x)}{l(2^k)} &= 1; \\ \text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^v l(x) &= +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-v} l(x) = 0, \forall v > 0. \end{aligned}$$

1 主要结果及其证明

定理 1 设 $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ 为两两 NQD 列, $l(x)$ 是慢变化函数, 且对 $1 \leq p < 2$ 及 $\delta > 2/p - 1$ 时, 满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} \sum_{k=1}^n x^{1+\delta} P(|X_k|^\rho \geq x) = 0$, 则对 $\alpha p \geq 1$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} l(n) P(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j| > \epsilon n^\alpha) < \infty, \forall \epsilon > 0.$$

证明 取 $x = n^{\alpha(2-p)/4}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x \rightarrow \infty$, 对 X_k 截尾, 记:

$$\begin{aligned} X'_k &= -xI(X_k \leq -x) + X_kI(|X_k| < x) + xI(X_k > x), \\ X''_k &= X_k - X'_k = (X_k + x)I(X_k \leq -x) + (X_k - x)I(X_k > x), \\ S_j &= \sum_{k=1}^j X_k, S'_j = \sum_{k=1}^j X'_k, S''_j = \sum_{k=1}^j X''_k. \end{aligned}$$

当 $1 \leq p < 2$ 时, 由引理 1 知, X'_k 及 X''_k 仍是两两 NQD 列. 对 $\forall \epsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} l(n) P(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j - ES_j| > \epsilon n^\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} l(n) P(\max_{1 \leq j \leq n} |S'_j - ES'_j| > n^\alpha \epsilon / 2) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} l(n) P(\max_{1 \leq j \leq n} |S''_j - ES''_j| > \epsilon n^\alpha / 2) = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

由引理 2 及 $|X'_k| \leq x$, 可得

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2\alpha - 2} l(n) E(\max_{1 \leq j \leq n} |S'_j - ES'_j|^2) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2\alpha - 2} l(n) \log^2 n \sum_{k=1}^n E(X'_k)^2 \leq \\ &C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2\alpha - 2} l(n) \log^2 n \sum_{k=1}^n x^2 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2\alpha - 1} n^{\alpha(2-p)/2} l(n) \log^2 n \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{1+\alpha(2-p)/2}} l(n) \log^2 n < \infty. \end{aligned}$$

由 Morkov 不等式、 C_r 不等式及引理 2 可知

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} l(n) E(\max_{1 \leq j \leq n} |S''_j - ES''_j|^\rho) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} l(n) \log^p n \sum_{k=1}^n E|X''_k|^\rho \leq \\ &C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} l(n) \log^p n \sum_{k=1}^n (E|X_k + x|^\rho I(X_k \leq -x) + E|X_k - x|^\rho I(X_k > x)) \leq \\ &C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} l(n) \log^p n \sum_{k=1}^n E|X_k|^\rho I(|X_k| \geq x) \leq \end{aligned}$$

$$C \sum_{n=1}^\infty n^{-2} l(n) \log^p n \sum_{k=1}^n (x^p P(|X_k| \geq x) + \int_{x^p}^\infty P(|X_k|^p \geq t) dt).$$

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} \sum_{k=1}^n x^{1+\delta} P(|X_k|^p \geq x) = 0$ 等价于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} \sum_{k=1}^n x^{\beta(1+\delta)} P(|X_k| \geq x) = 0$, 所以 $\exists M > 0$, 当 $x > M$ 时, 有 $\sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} \sum_{k=1}^n P(|X_k|^p \geq x) < x^{-(1+\delta)}$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} \sum_{k=1}^n P(|X_k| \geq x) < x^{-\beta(1+\delta)}$. 由 $x \rightarrow \infty$ 可知, $\exists n_0 > 0$, 使得当 $n \geq n_0$ 时, 有 $x > M$, $x^p > M$. 结合 $\delta > 2 + p$ 有

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C \sum_{n=n_0}^\infty n^{-1} l(n) \log^p n \sum_{k=1}^n (n^{-1} x^p P(|X_k| \geq x) + \int_{x^p}^\infty n^{-1} P(|X_k|^p \geq t) dt) \leq \\ &C \sum_{n=n_0}^\infty n^{-1} l(n) \log^p n \sum_{k=1}^n (n^{-1} x^p P(|X_k| \geq x) + \int_{x^p}^\infty n^{-1} P(|X_k|^p \geq t) dt) \leq \\ &C \sum_{n=n_0}^\infty n^{-1} l(n) x^{-p\delta} \log^p n + C \sum_{n=n_0}^\infty n^{-1} l(n) \log^p n \int_{x^p}^\infty t^{-(1+\delta)} dt \leq C \sum_{n=n_0}^\infty n^{-1} l(n) x^{-p\delta} \log^p n \leq \\ &C \sum_{n=1}^\infty \frac{l(n)}{nx^{-p\delta}} \log^p n \leq C \sum_{n=1}^\infty \frac{l(n)}{nn^{-p\delta\alpha(2-p)/4}} \leq C \sum_{n=1}^\infty n^{-1+p\delta\alpha(2-p)/4} l(n) \log^p n < \infty, \end{aligned}$$

定理得证.

参考文献:

[1] Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications[J]. Ann Statist, 1953, 11: 286-295.

[2] Lehmann E L. Some concepts of dependence[J]. Ann Math Statist, 1966, 43: 1137-1153.

[3] Matuta P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables[J]. Statist Probab Lett, 1992, 15(3): 209-213.

[4] 万成高. 两两 NQD 列的大数定律和完全收敛性[J]. 应用数学学报, 2005, 28(2): 253-261.

[5] 吴群英. 两两 NQD 列的收敛性质[J]. 数学学报, 2002, 45(3): 617-624.

[6] 吴群英, 王远清, 伍艳春. NA 阵列行和最大值的若干极限定理[J]. 应用概率统计, 2006, 22(1): 56-62.

[7] 万成高. 两两 NQD 阵列加权收敛性的收敛性[J]. 系统科学与数学, 2006, 26(5): 599-608.

[8] 白志东, 苏淳. 关于独立和的完全收敛性[J]. 中国科学: A 辑, 1985, 5: 399-412.