文章编号: 1004-4353(2015)04-0285-07

一个随机利率下的家庭型联合保险随机模型

刘文斌, 金艳, 姜今锡*
(延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 通过原点反射 Brownian 运动过程和 Poisson 过程对保险实务中的利息力随机性作了描述,在此基础上建立了一类由终身寿险、养老保险和储蓄还本 3 部分组成的可调整保险金额的家庭型联合保险随机模型,并给出了这类保险模型的年均衡保费的一般计算公式和死亡均匀分布(UDD)假设之下较简洁的年均衡保费计算公式,并用实例分析验证了本文结论的合理性和实用性. 本文给出的保险模型对解决寿险公司合理收取保费、保险赔付和规避管理风险都具有一定的理论意义和实际应用价值.

关键词: 随机利率; 利息力函数; 联合保险随机模型; 年均衡保费
中图分类号: O211.9 **文献标识码**: A

A home-based combined insurance stochastic model under random interest rates

LIU Wenbin, JIN Yan, JIANG Jinxi*
(*Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*)

Abstract: In this paper, first of all, the randomness of the interest force in insurance business is described by both reflex-origin Brownian motion and Poisson process. Secondly, on this basis, we establish a class of adjustable insurance amount home-based combined insurance double stochastic model by whole life insurance, pension insurance and savings payback part, and a general formula of yearly balanced insurance premiums in this type of insurance and a relatively simple formula of yearly balanced insurance premiums with uniform distribution death (UDD) hypothesis are given. Finally, the rationality and practicality for the conclusions are verified by some examples of the analysis process. Type of this insurance model is consistent with the actual situation, and it has important theoretical and practical value for insurance company to charge a reasonable premium, pay insurance and avoid the manage risk.

Key words: stochastic interest rate; interest force function; combined insurance double stochastic model; years balanced premium

0 引言

随着我国利率市场化改革进程的不断推进以及利率波动频繁等原因,我国寿险公司的产品定价策略的理论和实践面临着新的问题. 这是因为,经典的精算理论为了使计算简单,通常假定利率是固定不变的,即寿险保单的预定利率一旦确定,在其生命周期内是不能变化的. 利率的变化会造成寿险保单的预定利率和实际利率的偏高,对寿险公司产生重大的影响,因此随机利率下的寿险精算理论与方法的研究成为近年来的热点问题.

收稿日期: 2015 - 10 - 26
* **通信作者**: 姜今锡(1959—),男,博士,教授,研究方向为概率统计、最优化理论.

1971年,J. H. Polland把利息力作为一个随机变量,对精算函数进行了研究[1],随后很多学者开始考虑寿险与年金中死亡率和利率均视为随机的寿险模型.文献[2-3]采用时间序列的方法对随机利率进行建模,例如白噪声过程、AR(2)过程和ARIMA过程等;文献[4-7]分别得到了利息力由O-U过程和Wiener过程建模的某些年金现值的前二阶矩模型及终身寿险精算现值的前二阶矩等;杨静平等[8]对利息力采用白噪声建模,得到了定期寿险中索赔量极限分布的密度函数递推公式;王明姬等[9]对利息力采用伽马分布和负二项分布联合建立了综合人寿保险模型,并给出了保费缴纳和保险金给付的精算现值;郭春增等[10]采用反射布朗运动过程和伽马分布联合建立了利息力累积模型,并研究得出在此模型下的寿险纯保费和责任准备金的表达式.

随着寿险精算理论研究的不断深入,越来越多的学者致力于研究随机利率下的联合寿险模型.如:王丽燕等对利息力采用Wiener过程建模,构建了家庭联合保险的精算模型[11];王丽燕等对利息力采用反射Brownian运动过程和Poisson过程联合建立了生死两全保险模型,得到了保单全部价值的计算公式,并进一步在死亡力均匀分布假设下简化了公式[12];柳扬等对利息力采用反射Brownian运动过程和Poisson过程联合建立了生死两全保险模型,给出了净保费的一般表达式以及在死亡均匀分布假设下均衡纯保费的简洁计算公式[13].

本文建立一类由终身寿险、养老保险和储蓄还本组成的可调整保险金额的家庭型联合保险双随机模型,考虑到实际生活中的随机利率是由连续的部分和跳跃两部分组成[14],因此本文采用反射Brownian运动过程和Poisson过程来刻画保险中利息力的随机性,并给出年均衡保费的一般计算公式和死亡均匀分布假设下较简洁的表达式.最后利用实例分析验证本文模型的合理性与有效性.

1 模型描述与预备定理

1.1 承保对象与保险责任

本文所讨论的承保对象设定为法定年龄以上,且身体健康的一对合法夫妻,他们的年龄分别记为x,y,用$T(x)$和$T(y)$分别表示(x)和(y)的未来生存时间,且假设(x)与(y)是相互独立的.假定这对夫妻从投保之日起每年年初应向寿险公司缴纳年均衡净保费P,缴费期限为$\min\{n, K(\overline{xy})+1\}$.

本文所研究的寿险模型兼顾现代年轻子女的养老负担,因而考虑父母正常的寿险保障外,还增加了还本部分.故在保单中寿险公司的保险责任由如下3个部分组成:

1) 寿险部分.采用联合生存状态模式下的即刻给付终身寿险模型,即从保单生效之日起若夫妻双方中任何一人死亡,则寿险公司应向投保人即刻给付保险金$A(1+\alpha[T(xy)])$,以此结束寿险公司对投保人的寿险责任部分,其中A为正常数,α为增额系数,$[T(xy)]$表示$T(xy)$的取整函数,即(xy)的整数年龄.

2) 年金部分.采用最后生存者状态模式下的延期年初给付终身生存年金模型,即从保单生效之日起经过h年以后,若$[T(xy)]\geqslant h$(例如夫妻双方任何一人生存至65周岁以后),则寿险公司每年年初应向投保人给付养老金$B(1+\beta([T(\overline{xy})]-h))$,其中$B$为正常数,$\beta$为增额系数,$h>n$.

3) 储蓄还本部分.采用最后生存者状态下的即刻给付终身寿险模型,即从保单生效之日起若夫妻双方均死亡,则寿险公司应向投保人的委托人(例如子女)退还所缴保费的C倍,其中C为正常数.

1.2 利率的随机化

为更好地刻画利率的随机性,本文采用利用原点反射Brownian运动过程和Poisson过程建立的利息力累计函数模型[12],即

$$y(t)=\delta t+\sigma|B_t|+\gamma Z_t, \tag{1}$$

其中 δ,σ,γ 是与 t 无关的正常数,且假设原点反射 Brownian 运动过程 $|B_t|$、Poisson 过程 Z_t 和未来生存时间 $T(x)$ 相互独立. 为了便于后续讨论,不妨用 $g(t)$ 表示 t 时刻 1 单位元的期望折现价格,即 $g(t)=E(\mathrm{e}^{-y(t)})$,其中 $y(t)$ 由式(1) 确定.

引理 1　$g(t)=2\mathrm{e}^{Mt}[1-\Phi(\delta\sqrt{t})]$,其中 $M=\dfrac{\delta^2}{2}+\lambda(\mathrm{e}^{-\gamma}-1)-\delta$, $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$.

证明　由 $g(t)$ 的定义可知:

$$g(t)=E(\exp\{-y(t)\});$$

$$f|B_t|(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{2t}\},\ x>0;\tag{2}$$

$$P(Z_t=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp\{-\lambda t\},\ k=0,1,\cdots.\tag{3}$$

由式(2) 有

$$E_{|B_t|}(\mathrm{e}^{-\delta|B_t|})=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\delta\omega}\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2t}}\mathrm{d}\omega=2\mathrm{e}^{\frac{\delta^2t}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(\omega+\delta t)^2}{2u}}\mathrm{d}\omega=2\mathrm{e}^{\frac{\delta^2t}{2}}[1-\Phi(\delta\sqrt{t})],\tag{4}$$

由式(3) 有

$$E_{Z_t}(\mathrm{e}^{-\gamma Z_t})=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\gamma k}\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t\mathrm{e}^{-\gamma})^k}{k!}=\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{-\gamma}-1)\lambda t},\tag{5}$$

再由式(1)、(4) 和(5) 有

$$g(t)=E(\exp\{-y(t)\})=\mathrm{e}^{-\delta t}E_{|B_t|}(\mathrm{e}^{-\delta|B_t|})E_{Z_t}(\mathrm{e}^{-\gamma^{Z_t}})=$$

$$\mathrm{e}^{-\delta t}E_{|B_t|}(\mathrm{e}^{-\delta|B_t|})E_{Z_t}(\mathrm{e}^{-\gamma^{Z_t}})=2\mathrm{e}^{(\frac{\delta^2}{2}+\lambda(\mathrm{e}^{-\lambda}-1)-\delta)t}[1-\Phi(\delta\sqrt{t})]=2\mathrm{e}^{Mt}[1-\Phi(\delta\sqrt{t})].$$

1.3　预备定理及其证明

定理 1　令 $N=\delta-\lambda(\mathrm{e}^{-\gamma}-1)$, $S(x)=\dfrac{1}{M}\mathrm{e}^{Mx}[1-\Phi(\delta\sqrt{x})]$,则 $\Gamma_k=\displaystyle\int_k^{k+1}MS(t)\mathrm{d}t$ 可写成

$$\Gamma_k=S(k+1)-S(k),\tag{6}$$

其中 $\Psi(x)=S(x)+\dfrac{\delta}{M\sqrt{2N}}\Phi(\sqrt{2Nx})$, M 如引理 1 给出.

证明　由 Γ_k 和 $S(x)$ 的定义可知:

$$\Gamma_k=\int_k^{k+1}MS(t)\mathrm{d}t=\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{Mt}[1-\Phi(\delta\sqrt{t})]\mathrm{d}t=\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{Mt}\mathrm{d}t-\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{Mt}\Phi(\delta\sqrt{t})\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{M}(\mathrm{e}^{M(k+1)}-\mathrm{e}^{Mk})-\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{Mt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sigma\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}t.\tag{7}$$

考虑积分项 $\displaystyle\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{Mt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sigma\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}t$,对积分区域作适当的分割并交换积分顺序,可整理得

$$\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{Mt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sigma\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\sigma\sqrt{k}}\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{Mt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{Mt-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}u+\int_{\sigma\sqrt{k}}^{\sigma\sqrt{k+1}}\int_{\frac{u^2}{\sigma^2}}^{k+1}\mathrm{e}^{Mt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{Mt-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}u,\tag{8}$$

其中第 1 个积分项为

$$\int_{-\infty}^{\sigma\sqrt{k}}\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{Mt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{Mt-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}u=\frac{1}{M}(\mathrm{e}^{M(k+1)}-\mathrm{e}^{Mk})\Phi(\sigma\sqrt{t}).\tag{9}$$

类似地可得到第 2 个积分项为

$$\int_{\sigma\sqrt{k}}^{\sigma\sqrt{k+1}}\int_{\frac{u^2}{\sigma^2}}^{k+1}\mathrm{e}^{Mt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{Mt-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}u=\frac{1}{M}\mathrm{e}^{M(k+1)}[\Phi(\sigma\sqrt{k+1})-\Phi(\sigma\sqrt{k})]-\frac{1}{M}\int_{\sigma\sqrt{k}}^{\sigma\sqrt{k+1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{M\frac{u^2}{\sigma^2}-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u.\tag{10}$$

根据 M 和 N 的定义,式(10) 中的第 2 个积分项可改写成

$$\frac{1}{M}\int_{\sigma\sqrt{k}}^{\sigma\sqrt{k+1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{M\frac{u^2}{\sigma^2}-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\frac{1}{M\sqrt{2\pi}}\int_{\sigma\sqrt{k}}^{\sigma\sqrt{k+1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}N}\mathrm{d}u=\frac{\sigma}{M\sqrt{2N}}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\sigma\sqrt{2Nk}}^{\sigma\sqrt{2N(k+1)}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{\sigma}{M\sqrt{2N}}[\Phi(\sqrt{2N(k+1)})-\Phi(\sqrt{2Nk})].$$

把上式结果代入到式(10),可得

$$\int_{\sigma\sqrt{k}}^{\sigma\sqrt{k+1}}\int_{\frac{u^2}{\sigma^2}}^{k+1}\mathrm{e}^{Mt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{Mt-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}u=\frac{1}{M}\mathrm{e}^{M(k+1)}[\Phi(\sigma\sqrt{k+1})-\Phi(\sigma\sqrt{k})]-$$

$$\frac{\sigma}{M\sqrt{2N}}[\Phi(\sqrt{2N(k+1)})-\Phi(\sqrt{2Nk})].$$

把上式结果和式(9)代入到式(8)可得

$$\int_{k}^{k+1}\mathrm{e}^{Mt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sigma\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}t=\frac{1}{M}(\mathrm{e}^{M(k+1)}-\mathrm{e}^{Mk})\Phi(\sigma\sqrt{t})+\frac{1}{M}\mathrm{e}^{M(k+1)}[\Phi(\sigma\sqrt{k+1}-\Phi(\sigma\sqrt{k})]-$$

$$\frac{\sigma}{M\sqrt{2N}}[\Phi(\sqrt{2N(k+1)})-\Phi(\sqrt{2Nk})],$$

把此结果代入到式(7),便可得到式(6).证毕.

定理 2 令 $R(x)=\frac{1}{M}\mathrm{e}^{Mx}(x-\frac{1}{M})$,则 $\Omega_k=\int_k^{k+1}MtS(x)\mathrm{d}t$,也可以写成 $\Omega_k=\Upsilon(k+1)-\Upsilon(k)$,其中 $S(x)$ 如定理 1 所给,M 如引理 1 所给,且

$$\Upsilon(x)=R(x)[1-\Phi(\sigma\sqrt{x})]+\frac{\sigma\sqrt{x}}{2MN\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-Nx}-(\frac{1}{2\sigma\pi M\sqrt{2N}}+\frac{\sigma}{M^2\sqrt{2N}})\Phi(\sqrt{2Nx}).$$

证明 类似于定理 1 的证明过程,经过适当的积分区域分割和积分次序交换后,即可得到结论,由于篇幅所限,故省略证明过程.

2 年均衡保费的计算公式

2.1 保单各部分精算现值的计算公式

根据保单责任分别计算保单部分的价值:

1) 由于寿险部分的现值 W_1 可表示为

$$W_1=\sum_{k=0}^{\infty}A(1+\alpha k)\exp\{-y(T(xy))\}\mathrm{I}(k\leqslant T(xy)<k+1),\tag{11}$$

因此其精算现值为

$$E(W_1)=\sum_{k=0}^{\infty}A(1+\alpha k)E[\exp\{-y(T(xy))\}\mathrm{I}(k\leqslant T(xy)<k+1)].\tag{12}$$

2) 由于年金部分的现值 W_a 可表示为

$$W_a=\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)\exp\{-y(h+k)\}\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant k+h),\tag{13}$$

因此其精算现值为

$$E(W_a)=\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)E[\exp\{-y(h+k)\}\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant k+h)]=\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)g(h+k)\,_{h+k}p_{\overline{xy}},\tag{14}$$

3) 由于储蓄还本部分的现值 W_s 可表示为

$$W_s=CP(n\wedge([T(\overline{xy})]+1))\mathrm{e}^{-y(T(\overline{xy}))}=$$

$$CP\sum_{k=0}^{n-1}(1+k)\mathrm{e}^{-y(T(\overline{xy}))}\mathrm{I}(k\leqslant T(\overline{xy})<k+1)+CPn\,\mathrm{e}^{-y(T(\overline{xy}))}\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant n),\tag{15}$$

因此其精算现值为

$$E(W_s)=CP\sum_{k=0}^{n-1}(1+k)\int_k^{k+1}g(t)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t+CPn\int_n^{\infty}g(t)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t=$$

$$CP\sum_{k=0}^{n-1}(1+k)\int_k^{k+1}g(t)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t+CPn\sum_{k=n}^{\infty}\int_k^{k+1}g(t)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t. \tag{16}$$

2.2　年均衡保费的计算公式

综合各部分现值的计算结果可知，寿险公司所要支付的保险金的精算现值为

$$E(W_1)+E(W_a)+E(W_s)=\sum_{k=0}^{\infty}A(1+\alpha k)\int_k^{k+1}g(t)f_{xy}(t)\mathrm{d}t+\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)g(k+h)_{k+h}p_{\overline{xy}}+$$

$$CP\sum_{k=0}^{n-1}(1+k)\int_k^{k+1}g(t)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t+CPn\sum_{k=n}^{\infty}\int_k^{k+1}g(t)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t, \tag{17}$$

而投保人所交趸缴净保费的现值 W_{p} 可表示为

$$W_{\mathrm{p}}=P\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-y(k)}\ \mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant k), \tag{18}$$

因此投保人所交净保费的精算现值为

$$E(W_{\mathrm{p}})=P\sum_{k=0}^{n-1}g(k)_k p_{\overline{xy}}. \tag{19}$$

根据平衡准则可知 $E(W_1)+E(W_a)+E(W_s)=E(W_{\mathrm{p}})$，解得这类保险的年均衡保费的一般计算公式为

$$P=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}A(1+\alpha k)\int_k^{k+1}g(t)f_{xy}(t)\mathrm{d}t+\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)g(k+h)_{k+h}p_{\overline{xy}}}{\sum_{k=0}^{n-1}g(k)_k p_{\overline{xy}}-(C\sum_{k=0}^{n-1}(1+k)\int_k^{k+1}g(t)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t+Cn\sum_{k=n}^{\infty}\int_k^{k+1}g(t)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t)}. \tag{20}$$

而在 UDD 假设下，有：

$$\int_k^{k+1}g(t)f_{xy}(t)\mathrm{d}t=2(q_x+q_y)\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{Mt}[1-\Phi(\delta\sqrt{t})]\mathrm{d}t-4q_xq_y\int_k^{k+1}t\,\mathrm{e}^{Mt}[1-\Phi(\delta\sqrt{t})]\mathrm{d}t=$$

$$2(q_x+q_y)\Gamma_k-4q_xq_y\Omega_k,$$

$$\int_k^{k+1}g(t)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t=4q_xq_y\int_k^{k+1}t\,\mathrm{e}^{Mt}[1-\Phi(\delta\sqrt{t})]\mathrm{d}t=4q_xq_y\Omega_k,$$

其中，$f_{xy}(t)={}_tp_x{}_tp_y(\mu_x(t)+\mu_y(t))=q_x+q_y-2tq_xq_y$，$f_{\overline{xy}}(t)={}_tp_x{}_tq_y\mu_x(t)+{}_tq_x{}_tp_y\mu_y(t)=2tq_xq_y$.
因此可得

$$P=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}A(1+\alpha k)[2(q_x+q_y)\Gamma_k-4q_xq_y\Omega_k]+\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)g(k+h)[1-(k+h)^2q_xq_y]}{\sum_{k=0}^{n-1}g(k)[1-k^2q_xq_y]-(C\sum_{k=0}^{n-1}(1+k)4q_xq_y\Omega_k+Cn\sum_{k=n}^{\infty}4q_xq_y\Omega_k)}. \tag{21}$$

若生命表中的极限年龄已确定，则当 $k\to\infty$ 时，上式中的各项都各自收敛于某一个确定的常数；因此，此式可以通过查表或简单的算数运算就可以得到误差极小的值，其中误差来自 Ω_k 的计算.

3　实例分析

假若一对夫妻在年龄分别为 $x=25$ 岁和 $y=23$ 岁时投 $n=25$ 年期的本文所述的保险产品，假设人类极限年龄为 $M=105$ 岁，国家法定的退休年龄为 $R=65$ 岁，本试验中累积利息力采用式(1)，其中 $\delta=0.02$，$\sigma=0.03$，$\gamma=0.05$，泊松过程 Z_t 的强度 $\lambda=0.1$. 在这类参数假设下，平均利率大致为 $-\ln(g(1))=4.87\%$. 同时，保险的各个参数分别为：$A=100\,000$，$B=2\,000\times12=24\,000$，$C=1$，$\alpha=0.05$，$\beta=0.01$，$n=25$，则 $h=R-\max(x,y)$. 根据中国人寿保险业经验生命表(CLM03 & CLF03)可知：$q_x=0.660\times$

10^{-3}，$q_y=0.285\times10^{-3}$.

若假定这对夫妻的分数年龄满足死亡均匀分布的假设(UDD)，则根据式(21)计算得到的年均衡保费为13 276.998. 为了比较投保人和寿险公司的所得，假设 $T(x)=(1,2,\cdots,M-x)$，$T(y)=(1,2,\cdots,M-y)$，此时，在各个年龄组合上本文所述保险产品的寿险部分、年金部分以及还本部分的折现价值如表1— 表3所示. 所以3个部分的和即为这对夫妻所得到的资金，其在各年龄组合上的折现现值如表4所示.

表1 寿险部分的折现价值

x 的年龄	对应 y 年龄的折现价值								
	24	34	44	54	64	74	84	94	104
26	100 014	100 014	100 014	100 014	100 014	100 014	100 014	100 014	100 014
36	100 014	109 088	109 088	109 088	109 088	109 088	109 088	109 088	109 088
46	100 014	109 088	109 316	109 316	109 316	109 316	109 316	109 316	109 316
56	100 014	109 088	109 316	103 721	103 721	103 721	103 721	103 721	103 721
66	100 014	109 088	109 316	103 721	94 968	94 968	94 968	94 968	94 968
76	100 014	109 088	109 316	103 721	94 968	84 812	84 812	84 812	84 812
86	100 014	109 088	109 316	103 721	94 968	84 812	74 363	74 363	74 363
96	100 014	109 088	109 316	103 721	94 968	84 812	74 363	64 288	64 288
105	100 014	109 088	109 316	103 721	94 968	84 812	74 363	64 288	55 855

表2 年金部分的折现价值

x 的年龄	对应 y 年龄的折现价值								
	24	62	63	65	75	85	90	95	100
26	0	0	7 674	22 049	76 954	109 588	119 658	126 459	130 550
64	0	0	7 674	22 049	76 954	109 588	119 658	126 459	130 550
65	7 674	7 674	7 674	22 049	76 954	109 588	119 658	126 459	130 550
70	41 328	41 328	41 328	41 328	76 954	109 588	119 658	126 459	130 550
75	67 997	67 997	67 997	67 997	76 954	109 588	119 658	126 459	130 550
80	88 749	88 749	88 749	88 749	88 749	109 588	119 658	126 459	130 550
85	104 504	104 504	104 504	104 504	104 504	109 588	119 658	126 459	130 550
90	116 056	116 056	116 056	116 056	116 056	116 056	119 658	126 459	130 550
95	124 093	124 093	124 093	124 093	124 093	124 093	124 093	126 459	130 550
100	129 207	129 207	129 207	129 207	129 207	129 207	129 207	129 207	130 550
105	131 906	131 906	131 906	131 906	131 906	131 906	131 906	131 906	131 906

表3 还本部分的折现价值

x 的年龄	对应 y 年龄的折现价值								
	24	34	44	54	64	74	84	94	104
26	14 601	107 885	81 742	62 351	47 730	36 622	28 146	21 659	16 684
36	107 885	107 885	81 742	62 351	47 730	36 622	28 146	21 659	16 684
46	81 742	81 742	81 742	62 351	47 730	36 622	28 146	21 659	16 684
56	62 351	62 351	62 351	62 351	47 730	36 622	28 146	21 659	16 684
66	47 730	47 730	47 730	47 730	47 730	36 622	28 146	21 659	16 684
76	36 622	36 622	36 622	36 622	36 622	36 622	28 146	21 659	16 684
86	28 146	28 146	28 146	28 146	28 146	28 146	28 146	21 659	16 684
96	21 659	21 659	21 659	21 659	21 659	21 659	21 659	21 659	16 684
105	17 124	17 124	17 124	17 124	17 124	17 124	17 124	17 124	16 684

表 4　夫妻所得资金的折现价值

x 的年龄	对应 y 年龄的折现价值								
	24	34	44	54	64	74	84	94	104
26	112 660	202 801	248 693	235 024	218 386	251 903	268 086	272 245	268 336
36	202 801	211 874	257 766	244 098	227 460	260 977	277 160	281 319	277 409
46	248 693	257 766	257 995	244 326	227 688	261 205	277 388	281 547	277 638
56	235 024	244 098	244 326	238 731	222 093	255 610	271 793	275 952	272 043
66	218 386	227 460	227 688	222 093	213 340	246 857	263 040	267 199	263 289
76	251 903	260 977	261 205	255 610	246 857	238 701	252 884	257 043	253 134
86	268 086	277 160	277 388	271 793	263 040	252 884	242 435	246 594	242 685
96	272 245	281 319	281 547	275 952	267 199	257 043	246 594	236 519	232 610
105	268 999	278 073	278 301	272 707	263 953	253 798	243 348	233 274	224 176

参考文献:

[1] Pollard J H. On fluctuating interest rates[J]. Bulletin de 1'Association des Actuaries Belges, 1971,66:68-97.

[2] Dhaene J. Stochastic interest rates and auto regressive integrated moving average processes[J]. ASTIN Bulletin, 1989,19(1):131-138.

[3] Gary Parker. Moments of the present value of the future of a portfolio of policies[J]. Scandinavia Actuarial Journal, 1994,1:53-67.

[4] Beekman J A, Fuelling C P. Extra randomness in some annuities in certain annuity models and mortality randomness in some annuities[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1991,10:275-287.

[5] Beekman J A, Fuelling C P. One approach to dual randomness in life insurance[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 1993,76(2):173-182.

[6] Pesand, Skinner. Duration for bonds with default risk[J]. Journal of Banking and Finance, 1974,21(4):1-16.

[7] Hoedemakers T, Beirlant J, Goovaerts M J, et al. On the distribution of discounted loss reserves using generalized linear models[J]. Scand Actuarial Journal, 2005(1):25-45.

[8] Yang J P, Wu L. On the limit distribution of n-year term life insurance[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, 1997,33(5):561-566.

[9] 王明姬,田乃硕.息力函数综合寿险模型[J].运筹与管理,2003,13(1):5-8.

[10] 郭春增,王秀瑜.随机利率下的寿险精算模型[J].统计与决策,2008,9:53-55.

[11] 王丽燕,冯恩民.一种家庭联合保险的双随机模型[J].工程数学学报,2003,20(8):69-72.

[12] 王丽燕,郝亚丽,张海娇,等.随机利率下增额两全保险[J].大连理工大学学报,2010,50(5):827-830.

[13] 柳扬,洪宇,王丽燕.一个随机利率下的夫妻综合保险模型[J].辽宁师范大学学报(自然科学版),2014,37(4):461-468.

[14] Gary Parker. Limiting distribution of the present value of a portfolio[J]. ASTIN Bulletin, 1994,24(1):47-60.