文章编号: 1004-4353(2015)04-0279-06

一类离散非自治竞争系统的绝灭性和稳定性

余胜斌
(阳光学院 基础教研部, 福建 福州 350015)

摘要: 通过构造适当的 Lyapunov 绝灭函数,研究了一类离散非自治竞争系统,得到了保证系统中某个种群绝灭和另外一个种群全局吸引的充分性条件,所得的结果补充了前人的工作.

关键词: 竞争; 绝灭性; 稳定性; 离散; 非自治
中图分类号: O175.14 **文献标识码**: A

Extinction and stability in a class of discrete non-autonomous competition system

YU Shengbin
(*Department of Basic Teaching and Research*, *Yango College*, *Fuzhou* 350015, *China*)

Abstract: A class of discrete non-autonomous competitive system of two species is considered. By constructing some suitable Lyapunov type extinction functions, sufficient conditions which guarantee the extinction of species and the stability property of another species are obtain. The results supplement some known results.

Keywords: competitive; extinction; stability; discrete; non-autonomous

0 引言

近年来,如下具有非线性相互抑制项的竞争系统受到学者们的关注[1-6]:

$$\begin{cases} x_1(n+1)=x_1(n)\exp\left\{r_1(n)-a_1(n)x_1(n)-\dfrac{c_2(n)x_2(n)}{1+x_2(n)}\right\}, \\ x_2(n+1)=x_2(n)\exp\left\{r_2(n)-a_2(n)x_2(n)-\dfrac{c_1(n)x_1(n)}{1+x_1(n)}\right\}, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别表示 2 个竞争种群在第 n 代的种群密度, $r_i(n)$ $(i=1,2)$ 表示 2 个种群的内禀增长率, $a_i(n)$ $(i=1,2)$ 为 2 个种群的种内竞争系数, $c_i(n)$ $(i=1,2)$ 为 2 个种群的种间竞争系数. Qin Wenjie 等[1]探讨了系统(1)的持久性和全局稳定的周期解的存在性. 受文献[1]启发, Wang Qinglong 等[2-3]通过定义 Lyapunov 函数和适当的分析手法,得到了系统(1)相应的离散和连续概周期系统存在唯一全局渐进稳定的正概周期解的充分性判据. 考虑到自然界受人类开采等因素的影响, Wang Qinglong 等[4]进一步讨论了具反馈控制的系统(1)的动力学行为. 笔者在文献[5]中进一步探讨了反馈控制变量对系统(1)持久性的影响,得到了反馈控制变量不会影响系统持久性的结论,从而改进了文献[4]

收稿日期: 2015-10-28 **基金项目**: 福建省自然科学基金资助项目(2015J01012,2015J01019)
作者简介: 余胜斌(1984—),男,讲师,研究方向为生物数学.

的结果.但是,文献[1-5]均未探讨系统的绝灭性.由于绝灭性是生态系统研究中的一个重要课题,与物种或者自然资源的保护和开发等有直接的关系[6],因此本文就系统(1)的绝灭性进行探讨,类似的工作参见文献[6-9]及其所引文献.

基于生态学含义,本文恒设系统(1)满足初始条件:$x_1(0)>0$,$x_2(0)>0$,从而易知对于任意的 $n\geqslant 0$ 都有 $x_1(n)>0$,$x_2(n)>0$.对任一非负有界序列 $\{f(n)\}$,本文恒设:

$$f^{\mathrm{L}}=\inf_{n\in N}\{f(n)\},\quad f^{\mathrm{M}}=\sup_{n\in N}\{f(n)\}.$$

1 绝灭性

以下将证明在适当的条件下,种群 x_2 或 x_1 将趋于绝灭.

引理 1 系统(1)的任一正解 $(x_1(n),x_2(n))^{\mathrm{T}}$ 均满足:

$$\limsup_{n\to\infty} x_i(n)\leqslant \frac{\exp(r_i^{\mathrm{M}}-1)}{a_i^{\mathrm{L}}}\stackrel{\mathrm{def}}{=}B_i,\ i=1,2;\tag{2}$$

即系统(1)的任一正解是最终有界的.

证明 引理 1 的证明与文献[7]中引理 2.1 的证明类似,这里不再给出.

定理 1 假设如下条件(H_1)成立:

(H_1) $\quad \dfrac{r_2^{\mathrm{M}}}{r_1^{\mathrm{L}}}<\min\left\{\dfrac{c_1^{\mathrm{L}}}{a_1^{\mathrm{M}}(1+B_1)},\dfrac{a_2^{\mathrm{L}}}{c_2^{\mathrm{M}}}\right\}$,其中 B_1 由式(2)所定义,

则种群 x_2 将绝灭,即对系统(1)的任一正解 $(x_1(n),x_2(n))^{\mathrm{T}}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_2(n)=0$.

证明 由条件(H_1)可选取足够小的数 $\varepsilon_1>0$,使得

$$\frac{r_2^{\mathrm{M}}}{r_1^{\mathrm{L}}}<\min\left\{\frac{c_1^{\mathrm{L}}}{a_1^{\mathrm{M}}(1+B_1+\varepsilon_1)},\frac{a_2^{\mathrm{L}}}{c_2^{\mathrm{M}}}\right\}\tag{3}$$

成立.由式(3)可知,存在正常数 α,β 使得 $\dfrac{r_2^{\mathrm{M}}}{r_1^{\mathrm{L}}}<\dfrac{\beta}{\alpha}<\min\left\{\dfrac{c_1^{\mathrm{L}}}{a_1^{\mathrm{M}}(1+B_1+\varepsilon_1)},\dfrac{a_2^{\mathrm{L}}}{c_2^{\mathrm{M}}}\right\}$,从而有:

$$\alpha r_2^{\mathrm{M}}-\beta r_1^{\mathrm{L}}\stackrel{\mathrm{def}}{=}-\delta_1<0,\ \beta a_1^{\mathrm{M}}-\frac{\alpha c_1^{\mathrm{L}}}{1+B_1+\varepsilon_1}<0,\ \beta c_2^{\mathrm{M}}-\alpha a_2^{\mathrm{L}}<0.\tag{4}$$

对上述 ε_1,由引理 1 可知存在足够大的自然数 $N>0$,使得当 $n\geqslant N$ 时,有

$$x_i(n)<B_i+\varepsilon_1,\ i=1,2.\tag{5}$$

对任意的 $p\geqslant N$,由系统(1)和式(5)可知:

$$\begin{cases}\ln\dfrac{x_1(p+1)}{x_1(p)}=r_1(p)-a_1(p)x_1(p)-\dfrac{c_2(p)x_2(p)}{1+x_2(p)}\geqslant r_1^{\mathrm{L}}-a_1^{\mathrm{M}}x_1(p)-c_2^{\mathrm{M}}x_2(p),\\ \ln\dfrac{x_2(p+1)}{x_2(p)}=r_2(p)-a_2(p)x_2(p)-\dfrac{c_1(p)x_1(p)}{1+x_1(p)}\leqslant r_2^{\mathrm{M}}-a_2^{\mathrm{L}}x_2(p)-\dfrac{c_1^{\mathrm{L}}x_1(p)}{1+B_1+\varepsilon_1}.\end{cases}\tag{6}$$

由不等式(4)—(6)可得,对 $p\geqslant N$ 有

$$\begin{aligned}&\alpha\ln\frac{x_2(p+1)}{x_2(p)}-\beta\ln\frac{x_1(p+1)}{x_1(p)}\leqslant(\alpha r_2^{\mathrm{M}}-\beta r_1^{\mathrm{L}})+\left(\beta a_1^{\mathrm{M}}-\frac{\alpha c_1^{\mathrm{L}}}{1+B_1+\varepsilon_1}\right)x_1(p)+\\&(\beta c_2^{\mathrm{M}}-\alpha a_2^{\mathrm{L}})x_2(p)<\alpha r_2^{\mathrm{M}}-\beta r_1^{\mathrm{L}}=-\delta_1<0.\end{aligned}\tag{7}$$

对上式两边做从 N 到 $n-1$ 累加得 $\alpha\ln\dfrac{x_2(n)}{x_2(N)}-\beta\ln\dfrac{x_1(n)}{x_1(N)}<-\delta_1(n-N)$,所以

$$x_2(n)<\left[\left(\frac{x_1(n)}{x_1(N)}\right)^{\beta}(x_2(N))\,\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left(-\frac{\delta_1}{\alpha}(n-N)\right).\tag{8}$$

由式(8)和引理 1 的 $x_1(n)$ 的最终有界性可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_2(n)=0$,从而定理 1 得证.

定理 2　假设如下条件(H_2)成立：

(H_2)　$\dfrac{r_2^L}{r_1^M} > \max\left\{\dfrac{c_1^M}{a_1^L}, \dfrac{a_2^M(1+B_2)}{c_2^L}\right\}$，其中 B_2 由式(2)所定义，

则种群 x_1 将绝灭，即对系统(1)的任一正解$(x_1(n), x_2(n))^T$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_1(n) = 0$.

证明　由条件(H_1)可选取足够小的数 $\varepsilon_2 > 0$，使得

$$\frac{r_2^L}{r_1^M} > \max\left\{\frac{c_1^M}{a_1^L}, \frac{a_2^M(1+B_2+\varepsilon_2)}{c_2^L}\right\} \tag{9}$$

成立. 由式(9)可知，存在正常数 α, β 使得 $\dfrac{r_2^L}{r_1^M} > \dfrac{\beta}{\alpha} > \max\left\{\dfrac{c_1^M}{a_1^L}, \dfrac{a_2^M(1+B_2+\varepsilon_2)}{c_2^L}\right\}$，从而有：

$$\beta r_1^M - \alpha r_2^L \stackrel{\text{def}}{=} -\delta_2 < 0,\ \alpha c_1^M - \beta a_1^L < 0,\ \alpha a_2^M - \frac{\beta c_2^L}{1+B_2+\varepsilon_2} < 0. \tag{10}$$

对任意的 $p \geqslant N$，由系统(1)和式(5)可知：

$$\begin{cases} \ln \dfrac{x_1(p+1)}{x_1(p)} \leqslant r_1^M - a_1^L x_1(p) - \dfrac{c_2^L}{1+B_2+\varepsilon_2} x_2(p), \\ \ln \dfrac{x_2(p+1)}{x_2(p)} \geqslant r_2^L - a_2^M x_2(p) - c_1^M x_1(p). \end{cases} \tag{11}$$

由不等式(5)、(10)和(11)可知，当 $p \geqslant N$ 时，有

$$\begin{aligned} &\beta \ln \frac{x_1(p+1)}{x_1(p)} - \alpha \ln \frac{x_2(p+1)}{x_2(p)} \leqslant (\beta r_1^M - \alpha r_2^L) + (\alpha c_1^M - \beta a_1^L) x_1(p) + \\ &\left(\alpha a_2^M - \frac{\beta c_2^L}{1+B_2+\varepsilon_2}\right) x_2(p) < \beta r_1^M - \alpha r_2^L = -\delta_2 < 0. \end{aligned} \tag{12}$$

余下的证明与定理 1 的证明类似，故省略.

2　稳定性

以下将讨论在一个种群绝灭的情况下另一个种群的稳定性问题，为此，首先给出几个引理.

引理 2[10]　假设 $a(n)$ 和 $b(n)$ 为有正的上下界的非负序列，$\{x(n)\}$ 满足 $\limsup\limits_{n\to\infty} x(n) \leqslant x^*$ 且当 $n \geqslant N_0$ 时，有 $x(n+1) \geqslant x(n)\exp\{a(n) - b(n)x(n)\}$，其中 $N_0 \in N$ 且 $x(N_0) > 0$，则 $\liminf\limits_{n\to\infty} x(n) \geqslant \min\left\{\dfrac{a^L}{b^M}\exp\{a^L - b^M x^*\}, \dfrac{a^L}{b^M}\right\}$.

引理 3　假设(H_1)成立，则系统(1)的任一正解$(x_1(n), x_2(n))^T$ 均满足：

$$A_1 \leqslant \liminf_{n\to\infty} x_1(n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_1(n) \leqslant B_1,$$

这里 $A_1 = \dfrac{r_1^L}{a_1^M}\exp\{r_1^L - a_1^M B_1\}$，$B_1$ 如式(2)所定义.

证明　由引理 1 和定理 1 可知：

$$\lim_{n\to\infty} x_2(n) = 0,\ \limsup_{n\to\infty} x_1(n) \leqslant B_1. \tag{13}$$

进一步地，因为 $r_1^L > 0$，故可选取足够小的数 $\varepsilon > 0$，使得

$$A_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} r_1^L - c_2^M \varepsilon > 0. \tag{14}$$

由式(13)知，对上述 $\varepsilon > 0$，存在足够大的 $N_1 > 0$，使得对任意的 $n \geqslant N_1$，有 $x_1(n) \leqslant B_1 + \varepsilon$，$x_2(n) \leqslant \varepsilon$. 从而由系统(1)的第 1 个方程可知

$$x_1(n+1) \geqslant x_1(n)\exp\{r_1^L - a_1^M x_1(n) - c_2^M \varepsilon\}. \tag{15}$$

由引理 2 和式(14)、(15)可知 $\liminf\limits_{n\to\infty} x_1(n) \geqslant \min\left\{\dfrac{A_\varepsilon}{a_1^M}\exp\{A_\varepsilon - a_1^M B_1\}, \dfrac{A_\varepsilon}{a_1^M}\right\}$. 令 $\varepsilon \to 0$，得

$$\liminf_{n\to\infty} x_1(n) \geqslant \min\left\{\frac{r_1^{\mathrm{L}}}{a_1^{\mathrm{M}}}\exp\{r_1^{\mathrm{L}}-a_1^{\mathrm{M}}B_1\},\frac{r_1^{\mathrm{L}}}{a_1^{\mathrm{M}}}\right\}. \tag{16}$$

因为 $r_1^{\mathrm{L}}-a_1^{\mathrm{M}}B_1=r_1^{\mathrm{L}}-a_1^{\mathrm{M}}\dfrac{\exp(r_1^{\mathrm{M}}-1)}{a_1^{\mathrm{L}}}\leqslant r_1^{\mathrm{L}}-\exp(r_1^{\mathrm{M}}-1)\leqslant r_1^{\mathrm{L}}-r_1^{\mathrm{M}}\leqslant 0$,故由式(16)得

$$\liminf_{n\to\infty} x_1(n) \geqslant \frac{r_1^{\mathrm{L}}}{a_1^{\mathrm{M}}}\exp\{r_1^{\mathrm{L}}-a_1^{\mathrm{M}}B_1\}\overset{\mathrm{def}}{=}A_1.$$

引理3得证.

引理4 假设(H_2)成立,则系统(1)的任一正解$(x_1(n),x_2(n))^{\mathrm{T}}$均满足:

$$A_2\leqslant\liminf_{n\to\infty}x_2(n)\leqslant\limsup_{n\to\infty}x_2(n)\leqslant B_2,$$

这里 $A_2=\dfrac{r_2^{\mathrm{L}}}{a_2^{\mathrm{M}}}\exp\{r_2^{\mathrm{L}}-a_2^{\mathrm{M}}B_2\}$,$B_2$ 如式(2)所定义.

证明 类似于引理3的证明可以得到引理4的证明,故省略.

下面考虑如下 logistic 方程:

$$x(n+1)=x(n)\exp\{r_1(n)-a_1(n)x(n)\}, \tag{17}$$

这里 $r_1(n)$ 和 $a_1(n)$ 为非负有界序列.由文献[7]中的引理3.2可得:

引理5 方程(17)的任一正解 $x(n)$ 均满足 $A_1\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}x(n)\leqslant\limsup\limits_{n\to\infty}x(n)\leqslant B_1$,这里 A_1,B_1 如引理3所定义.

对如下 logistic 方程:

$$x(n+1)=x(n)\exp\{r_2(n)-a_2(n)x(n)\}, \tag{18}$$

与引理5类似的有如下结论:

引理6 方程(18)的任一正解 $\tilde{x}(n)$ 均满足 $A_2\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\tilde{x}(n)\leqslant\limsup\limits_{n\to\infty}\tilde{x}(n)\leqslant B_2$,这里 A_2,B_2 如引理4所定义.

定理3 假设(H_2)成立,且如下条件(H_3)也成立:

(H_3) $\dfrac{a_1^{\mathrm{M}}}{a_1^{\mathrm{L}}}\exp(r_1^{\mathrm{M}}-1)<2$,

则系统(1)的任一正解$(x_1(n),x_2(n))^{\mathrm{T}}$和方程(17)的任一正解 $x(n)$ 有:

$$\lim_{n\to\infty}(x_1(n)-x(n))=0,\ \lim_{n\to\infty}x_2(n)=0.$$

证明 由条件(H_1)成立和定理1可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_2(n)=0$.令 $y(n)=\ln x_1(n)-\ln x(n)$,则由系统(1)的第1个方程和式(17)得

$$y(n+1)=y(n)-a_1(n)x(n)(\exp\{y(n)\}-1)-\frac{c_2(n)x_2(n)}{1+x_2(n)}. \tag{19}$$

由微分中值定理,存在 $\theta(n)\in(0,1)$ 使得 $\exp\{y(n)\}-1=\exp\{\theta(n)y(n)\}y(n)$,从而式(19)可化为

$$y(n+1)=[1-a_1(n)x(n)\exp\{\theta(n)y(n)\}]y(n)-\frac{c_2(n)x_2(n)}{1+x_2(n)}. \tag{20}$$

因条件(H_3)隐含着 $-1<1-a_1^{\mathrm{M}}B_1$,故可选取足够小的数 $\varepsilon>0$ 使得 $-1<1-a_1^{\mathrm{M}}(B_1+\varepsilon)$.由引理3、引理5和 $\lim\limits_{n\to\infty}x_2(n)=0$ 可知,对上述 ε,存在足够大的 $N>0$,使得当 $n\geqslant N$ 时,有:

$$A_1-\varepsilon\leqslant x_1(n)\leqslant B_1+\varepsilon,\ x_2(n)\leqslant\varepsilon,\ A_1-\varepsilon\leqslant x(n)\leqslant B_1+\varepsilon. \tag{21}$$

由 $\theta(n)\in(0,1)$ 知 $x(n)\exp\{\theta(n)y(n)\}$ 位于 $x(n)$ 和 $x_1(n)$ 之间,从而由式(20)和(21)知,当 $n\geqslant N$ 时有 $|y(n+1)|\leqslant\max\{|1-a_1^{\mathrm{M}}(B_1+\varepsilon)|,|1-a_1^{\mathrm{L}}(A_1-\varepsilon)|\}|y(n)|+c_2^{\mathrm{M}}\varepsilon\overset{\mathrm{def}}{=}\lambda_\varepsilon|y(n)|+c_2^{\mathrm{M}}\varepsilon$,这里 $\lambda_\varepsilon=\max\{|1-a_1^{\mathrm{M}}(B_1+\varepsilon)|,|1-a_1^{\mathrm{L}}(A_1-\varepsilon)|\}$.从而当 $n\geqslant N$ 时,有

$$|y(n)| \leqslant \lambda_\varepsilon^{n-N}|y(N)| + \frac{1-\lambda_\varepsilon^{n-N}}{1-\lambda_\varepsilon}c_2^{\mathrm{M}}\varepsilon. \tag{22}$$

由 $1-a_1^{\mathrm{M}}(B_1+\varepsilon) \leqslant 1-a_1^{\mathrm{L}}(A_1-\varepsilon) < 1$，可知 $0<\lambda_\varepsilon<1$. 从而由式(22)可得 $\lim\limits_{n\to\infty} y(n)=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1(n)-x(n))=0$. 证毕.

类似地，可以得到如下定理：

定理 4　假设(H_2)成立，且如下条件(H_4)也成立：

(H_4)　$\dfrac{a_2^{\mathrm{M}}}{a_2^{\mathrm{L}}}\exp(r_2^{\mathrm{M}}-1)<2$，

则系统(1)的任一正解$(x_1(n),x_2(n))^{\mathrm{T}}$和方程(18)的任一正解$\tilde{x}(n)$有：

$$\lim_{n\to\infty}x_1(n)=0,\ \lim_{n\to\infty}(x_2(n)-\tilde{x}(n))=0.$$

3　应用举例

例 1　考虑如下系统：

$$\begin{cases} x_1(n+1)=x_1(n)\exp\left\{1.4-1.75x_1(n)-\dfrac{(1+0.3\cos(\sqrt{3}n))x_2(n)}{1+x_2(n)}\right\}, \\ x_2(n+1)=x_2(n)\exp\left\{0.7-2.6x_2(n)-\dfrac{(6+2\sin(\sqrt{7}n))x_1(n)}{1+x_1(n)}\right\}. \end{cases} \tag{23}$$

对系统(23)来说，经过验证发现条件(H_1)和(H_3)成立，从而由定理3可知x_2绝灭而x_1全局吸引，数值模拟(图1)也支持这一结果.

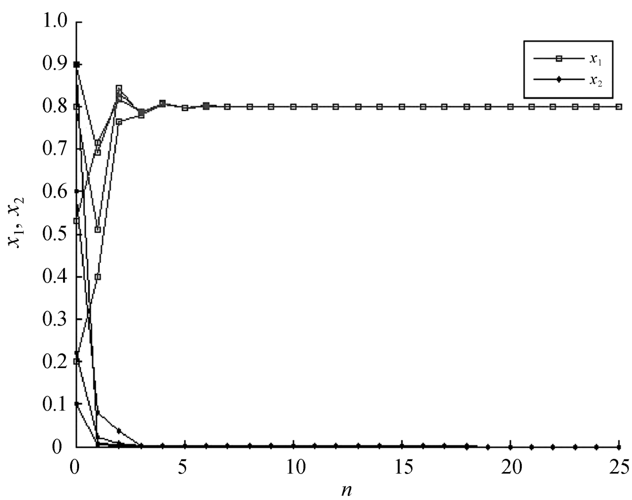

图 1　具初始条件为$(0.2,0.6)^{\mathrm{T}}$、$(0.9,0.1)^{\mathrm{T}}$、$(0.53,0.22)^{\mathrm{T}}$和$(0.8,0.9)^{\mathrm{T}}$的系统(23)的数值模拟

例 2　考虑如下系统：

$$\begin{cases} x_1(n+1)=x_1(n)\exp\left\{0.4-1.75x_1(n)-\dfrac{(3.4+0.4\sin(\sqrt{3}n))x_2(n)}{1+x_2(n)}\right\}, \\ x_2(n+1)=x_2(n)\exp\left\{1.6-1.3x_2(n)-\dfrac{(3+\cos(\sqrt{5}n))x_1(n)}{1+x_1(n)}\right\}. \end{cases} \tag{24}$$

对系统(24)来说，经过验证发现条件(H_2)和(H_4)成立，从而由定理3可知x_1绝灭而x_2全局吸引，数值模拟(图2)也支持这一结果.

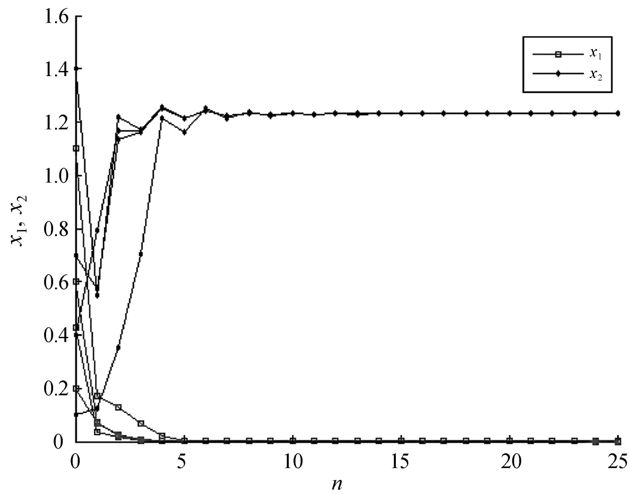

图2 具初始条件为$(0.2,0.4)^T$、$(1.1,0.1)^T$、$(0.43,1.4)^T$和$(0.6,0.7)^T$的系统(24)的数值模拟

参考文献:

[1] Qin W J, Liu Z J, Chen Y P. Permanence and global stability of positive periodic solutions of a discrete competitive system[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2009(2009):Article ID 830537,13.

[2] Wang Q L, Liu Z J. Uniformly asymptotic stability of positive almost periodic solutions for a discrete competitive system[J]. Journal of Applied Mathematics, 2013(2013):Article ID 182158,9.

[3] Wang Q L, Liu Z J, Li Z X. Existence and global asymptotic stability of positive almost periodic solutions of a two-species competitive system[J]. International Journal of Biomathematics, 2014,7(4):1450040.

[4] Wang Q L, Liu Z J, Li Z X. Positive almost periodic solutions for a discrete competitive system subject to feedback controls[J]. Journal of Applied Mathematics, 2013(2013):Article ID 429163,14.

[5] Yu S B. Permanence for a discrete competitive system with feedback controls[J]. Communications in Mathematical Biology and Neuroscience, 2015(2015):Article ID 16.

[6] 陈凤德,赵亮.一类非自治两种群浮游生物相克模型的绝灭性[J].沈阳大学学报(自然科学版),2014,26(1):1-3.

[7] Li Z, Chen F D. Extinction in two dimensional discrete Lotka-Volterra competitive system with the effect of toxic substances[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications & Algorithms, 2008,15(2):165-178.

[8] Chen F D, Gong X J, Chen W L. Extinction in two dimensional discrete Lotka-Volterra competitive system with the effect of toxic substances(II)[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications & Algorithms, 2013,20(4): 449-461.

[9] Chen L J, Chen F D. Extinction in a discrete Lotka-Volterra competitive system with the effect of toxic substances and feedback controls[J]. International Journal of Biomathematics, 2015,8(1):1550012(13).

[10] Chen F D. Permanence for the discrete mutualism model with time delays[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2008,47(3):431-435.