文章编号: 1004-4353(2015)04-0275-04

在黎曼流形上 α-型(π,ω)半对称非度量联络的常曲率条件

许达允[1], 全哲勇[1], 朴东哲[2*]
(1.金日成综合大学 数学系,平壤;2.延边大学理学院 数学系,吉林 延吉 133002)

摘要: 在黎曼流形上定义了一个 α-型(π,ω)半对称非度量联络,研究了其常曲率条件,同时讨论了其联络的相互连络的常曲率条件.

关键词: 半对称非度量联络; 相互联络; 常曲率
中图分类号: O186　　**文献标识码:** A

A constant curvature condition of α-type (π,ω) semi-symmetric non-metric connection in a Riemannian manifold

HO Talyun[1], JEN Cholyong[1], PIAO Dongzhe[2*]
(1. *Department of Mathematics, Kim Il Sung University, Pyongyang, DPRK*; 2. *Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We defined an α-type (π,ω)-semi-symmetric non-metric connection in a Riemannian manifold and studied its constant curvature condition. And we studied constant curvature condition of a mutual connection of this contact.

Key words: semi-symmetric non-metric connection; mutual connection; constant curvature

A. Fridman 等[1]首次提出黎曼流形上的半对称联络概念后,文献[2]利用非对称度量联络的思想[3]定义了半对称度量联络,并研究了其性质.在此基础上,文献[4]的作者对半对称度量联络做了更进一步的探讨.文献[5-6]把 Levi-Civita 联络与射影等效的半对称联络定义为射影半对称联络,并研究了它的一些性质;文献[7-8]研究了半对称联络与度量联络的物理模型;文献[9-10]研究了度量联络与非度量联络的常曲率条件.本文利用已存在的半对称非度量联络,定义一个新的 α-型(π,ω)半对称非度量联络,并研究该联络的几何学性质,同时还研究了 α-型(π,ω)半对称非度量联络的常曲率条件和相互连络的常曲率条件.

1 α-型(π,ω)半对称非度量联络

定义 1 黎曼流形(M,g)中的联络 ∇ 称为 α-型(π,ω) 半对称非度量联络,如果它满足如下关系:

$$\nabla_k g_{ij}=-2(\alpha-1)\omega_k g_{ij}-\alpha\omega_i g_{jk}-\alpha\omega_j g_{ik},\ T^k_{ij}=\varphi_j\delta^k_i-\varphi_i\delta^k_j, \tag{1}$$

其中 $\alpha\in\mathbf{R}$ 且 ω,π 是 1-型.

收稿日期: 2015-11-16
* **通信作者:** 朴东哲(1960—),男,副教授,研究方向为微分几何.

定义1中的α-型(π,ω)半对称非度量联络∇是一个以α为参数的联络族,它的联络系数为:

$$\Gamma_{ij}^{k}=\{{}_{ij}^{k}\}+(\alpha-1)\omega_i\delta_j^k+[(\alpha-1)\omega_j+\varphi_j]\delta_i^k+g_{ij}(\omega^k-\varphi^k), \tag{2}$$

其中$\{{}_{ij}^{k}\}$是Levi-Civita联络$\mathring{\nabla}$的联络系数.

如果$\alpha=0$,则0-型(π,ω)半对称非度量联络∇满足:

$$\nabla_k g_{ij}=2\omega_k g_{ij},\ T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k, \tag{3}$$

其联络系数为$\Gamma_{ij}^{k}=\{{}_{ij}^{k}\}-\omega_i\delta_j^k-(\omega_j-\varphi_j)\delta_i^k+g_{ij}(\omega^k-\varphi^k)$.此联络在文献[11]中作为再归度量半对称联络已得到讨论.

如果$\alpha=1$,则1-型(π,ω)半对称非度量联络∇满足:

$$\nabla_k g_{ij}=-\omega_i g_{jk}-\omega_j g_{ik},T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k, \tag{4}$$

其联络系数为$\Gamma_{ij}^{k}=\{{}_{ij}^{k}\}-\varphi_j\delta_i^k+g_{ij}(\omega^k-\varphi^k)$.文献[12]在$\pi=\omega$的条件下已研究了这个联络.

如果$\alpha=2$,则2-型(π,ω)半对称非度量联络∇满足:

$$\nabla_k g_{ij}=-2\omega_k g_{ij}-2\omega_i g_{jk}-2\omega_j g_{ki},T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k, \tag{5}$$

其联络系数为$\Gamma_{ij}^{k}=\{{}_{ij}^{k}\}+\omega_i\delta_j^k+(\omega_j+\varphi_j)\delta_i^k+g_{ij}(\omega^k-\varphi^k)$.此联络在$\pi=0$时是Amari- chenstov联络的一种.

α-型(π,ω)半对称非度量联络∇的曲率张量是

$$R_{ijk}^{l}=K_{ijk}^{l}+\delta_j^l\lambda_{ik}-\delta_i^l\lambda_{jk}+g_{jk}\nu_i^l-g_{ik}\nu_j^l+\delta_k^l\omega_{ij}, \tag{6}$$

其中:

$$\lambda_{ik}=\mathring{\nabla}_i[(\alpha-1)\omega_k+\varphi_k]-[(\alpha-1)\omega_i+\varphi_i][(\alpha-1)\omega_k+\varphi_k]-\frac{1}{2}g_{ik}[(\alpha-1)\omega_p+\varphi_p](\omega^p-\varphi^p),$$

$$\nu_{ik}=\mathring{\nabla}_i(\omega_k-\varphi_k)+(\omega_i-\varphi_i)(\omega_k-\varphi_k)+\frac{1}{2}g_{ik}[(\alpha-1)\omega_p+\varphi_p](\omega^p-\varphi^p),$$

$$\omega_{ik}=(\alpha-1)(\mathring{\nabla}_i\omega_k-\mathring{\nabla}_k\omega_i).$$

如果$\alpha=0$,则$\lambda_{ik}=-\nu_i^k$.曲率张量R_{ijk}^l的Bianchi-Ⅰ型恒等式为

$$R_{ijk}^l+R_{jki}^l+R_{kij}^l=\delta_i^l\varphi_{jk}+\delta_j^l\varphi_{ik}+\delta_k^l\varphi_{ij}, \tag{7}$$

若1-型π是封闭的,则$R_{ijk}^l+R_{jki}^l+R_{kij}^l=0$. Bianchi-Ⅱ型恒等式为

$$\nabla_h R_{ijk}^l+\nabla_i R_{jhk}^l+\nabla_j R_{hik}^l=2(\varphi_h R_{ijk}^l+\varphi_i R_{jhk}^l+\varphi_j R_{hik}^l), \tag{8}$$

其中$\varphi_{ij}=\mathring{\nabla}_i\varphi_j-\mathring{\nabla}_j\varphi_i$.

2 α-型(π,ω)半对称非度量联络的常曲率条件

如果在黎曼流体的任何点P的截面曲率与二维子空间的选择无关,则曲率张量为

$$R_{ijkl}=K(p)(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl}). \tag{9}$$

在此情形下,若K是常数,则联络为常曲率联络.

定理1 在连接的黎曼流体(M,g) $(\dim M\geqslant 3)$上,α-型(π,ω)半对称非度量联络∇为常曲率联络的充要条件是

$$(\alpha-2)\omega_h+\varphi_h=0. \tag{10}$$

证明 把式(9)代入式(8)可得

$$\begin{aligned}&[\nabla_h K+2K(\alpha-2)\omega_h](g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl})+[\nabla_i K+2K(\alpha-2)\omega_i](g_{jl}g_{hk}-g_{jk}g_{hl})+\\&[\nabla_j K+2K(\alpha-2)\omega_j](g_{hl}g_{ik}-g_{hk}g_{il})=\\&2K[\varphi_h(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl})+\varphi_i(g_{jl}g_{hk}-g_{jk}g_{hl})+\varphi_j(g_{hl}g_{ik}-g_{hk}g_{il})],\end{aligned}$$

把g^{jk}乘于上式并整理可得

$$(n-2)\{\delta_i^l[\nabla_h K-2K((\alpha-2)\omega_h+\varphi_h)]-\delta_h^l[\nabla_i K-2K((\alpha-2)\omega_i+\varphi_i)]\}=0,$$

对 i 和 l 进行整理可得

$$(n-1)(n-2)[\nabla_h K-2K((\alpha-2)\omega_h+\varphi_h)]=0. \tag{11}$$

在式(11)中可以看出，当 $n\geqslant 3$ 时 K 取常数的充要条件是式(10)成立. 式(10)是 $n\geqslant 3$ 的情况下，K 是常数的充要条件.

由定理 1 可知，在连接的黎曼流形(M,g)($\dim M\geqslant 3$)上，可以给出满足 Schur 定理的 α-型(π,ω)半对称非度量联络的 3 种类型：

1) 如果 $\alpha=0$ ($2\omega_h=\varphi_h$)，则

$$\nabla_k g_{ij}=\varphi_k g_{ij},\ T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k,\ \Gamma_{ij}^k=\left\{{k \atop ij}\right\}-\frac{1}{2}(\varphi_i\delta_j^k-\varphi_j\delta_i^k+g_{ij}g^k).$$

2) 如果 $\alpha=1$ ($\omega_h=\varphi_h$)，则

$$\nabla_k g_{ij}=-\varphi_i g_{jk}-\varphi_j g_{ik},\ T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k,\ \Gamma_{ij}^k=\left\{{k \atop ij}\right\}+\varphi_j\delta_i^k;$$

文献[12]虽研究了此联络，但并未提及常曲率联络.

3) 如果 $\alpha=2$ ($\varphi_h=0$)，则

$$\nabla_k g_{ij}=-2\omega_k g_{ij}-2\omega_i g_{jk}-2\omega_j g_{ik},T_{ij}^k=0,\ \Gamma_{ij}^k=\left\{{k \atop ij}\right\}+\omega_i\delta_j^k+\omega_j\delta_i^k+g_{ij}\omega^k;$$

此联络是 Amari-chenstov 联络的一种[4].

3　$\boldsymbol{\alpha}$-型$(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\omega})$半对称非度量联络的相互联络的常曲率条件

α-型(π,ω)半对称非度量联络的相互联络 $\bar{\nabla}$ 满足如下关系式：

$$\bar{\nabla}_k g_{ij}=-2[(\alpha-1)\omega_k+\varphi_k]g_{ij}-(\alpha\omega_i-\varphi_i)g_{kj}-(\alpha\omega_j-\varphi_j)g_{ki},$$

$$\bar{T}_{ij}^k=\varphi_i\delta_j^k-\varphi_j\delta_i^k. \tag{12}$$

其联络系数 $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ 为

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k=\left\{{k \atop ij}\right\}-[(\alpha-1)\omega_i+\varphi_i]\delta_j^k+(\alpha-1)\omega_j\delta_i^k+g_{ij}(\omega^k-\varphi^k). \tag{13}$$

由式(13)可知，相互联络 $\bar{\nabla}$ 的曲率度量为

$$\bar{R}_{ijk}^l=K_{ijk}^l+\delta_j^l\omega_{ik}-\delta_i^l\omega_{jk}+g_{jk}\alpha_i^l-g_{ik}\alpha_j^l+\delta_k^l\beta_{ij}, \tag{14}$$

其中：

$$\omega_{ik}=(\alpha-1)[\mathring{\nabla}_i\omega_k-(\alpha-1)\omega_i\omega_k],$$

$$\alpha_{ik}=\mathring{\nabla}_i(\omega_k-\varphi_k)+(\omega_i-\varphi_i)(\omega_k-\varphi_k)+(\alpha-1)g_{ik}\omega_p(\omega^p-\varphi^p),$$

$$\beta_{ik}=\mathring{\nabla}_i[(\alpha-1)\omega_k+\varphi_k]-\mathring{\nabla}_k[(\alpha-1)\omega_i+\varphi_i].$$

定理 2　在黎曼流体(M,g)($\dim M\geqslant 3$)上，α-型(π,ω)半对称非度量联络 ∇ 的相互联络 $\bar{\nabla}$ 是常曲率的充要条件为

$$(\alpha-2)\omega_h+2\varphi_h=0. \tag{15}$$

证明　将 $\bar{R}_{ijkl}=K(p)(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl})$ 代入到如下 Bianchi-Ⅱ型恒等式：

$$\bar{\nabla}_h\bar{R}_{ijk}^l+\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jhk}^l+\bar{\nabla}_j\bar{R}_{hik}^l=-2(\varphi_h\bar{R}_{ijk}^l+\varphi_i\bar{R}_{jhk}^l+\varphi_j\bar{R}_{hik}^l),$$

得

$$\begin{aligned}&[\nabla_h K-2K(\alpha-2)\omega_h-3\varphi_h](g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl})+[\nabla_i K-2K(\alpha-2)\omega_i-3\varphi_i](g_{jl}g_{hk}-\\&\quad g_{jk}g_{hl})+[\nabla_j K-2K(\alpha-2)\omega_j-3\varphi_j](g_{hl}g_{ik}-g_{hk}g_{il})=\\&\quad -2[\varphi_h(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl})+\varphi_i(g_{jl}g_{hk}-g_{jk}g_{hl})+\varphi_j(g_{hl}g_{ik}-g_{hk}g_{il})].\end{aligned}$$

将 g^{jk} 乘于上式并整理后得

$$(n-2)\{\delta_i^l[\nabla_h K-2K(\alpha-2)\omega_h+2\varphi_h]-\delta_h^l[\nabla_i K-2K(\alpha-2)\omega_i+2\varphi_i]\}=0\ .$$

对 i,l 进行整理可得

$$(n-1)(n-2)[\nabla_h K-2K(\alpha-2)\omega_h+2\varphi_h]=0\ . \tag{16}$$

在式(16)中可以看出,当 $n\geqslant 3$ 时 K 取常数的充要条件是式(15)成立. 式(16)是 $n\geqslant 3$ 的情况下,K 是常数的充要条件.

由定理2可以看出,在连接的黎曼流形上可以给出满足Schur定理的 α-型 (π,ω) 半对称非度量联络的相互联络的3种类型:

1) 如果 $\alpha=0\ (\omega_h=\varphi_h)$,则:

$$\bar{\nabla}_k g_{ij}=\varphi_i g_{jk}+\varphi_j g_{ik},\ \bar{T}_{ij}^k=\varphi_i\delta_j^k-\varphi_j\delta_i^k,\ \bar{\Gamma}_{ij}^k=\left\{{k \atop ij}\right\}-\varphi_j\delta_i^k; \tag{17}$$

2) 如果 $\alpha=1\ (\omega_h=2\varphi_h)$,则:

$$\bar{\nabla}_k g_{ij}=-\varphi_k g_{ij}-\varphi_i g_{jk}-\varphi_j g_{ik},\ \bar{T}_{ij}^k=\varphi_i\delta_j^k-\varphi_j\delta_i^k,\ \bar{\Gamma}_{ij}^k=\left\{{k \atop ij}\right\}+\varphi_j\delta_i^k+g_{ij}\varphi^k; \tag{18}$$

3) 如果 $\alpha=3\ (\varphi_h=0)$,则:

$$\bar{\nabla}_k g_{ij}=-2\omega_k g_{ij}-2\omega_i g_{jk}-2\omega_j g_{ik},\ \bar{T}_{ij}^k=0,\ \bar{\Gamma}_{ij}^k=\left\{{k \atop ij}\right\}-\omega_i\delta_j^k+\omega_j\delta_i^k+g_{ij}\omega^k. \tag{19}$$

这3种联络是具有常曲率的非度量联络.

参考文献:

[1] Fridman A, Schouten J A. Uber die geometric der halb-symmerschen uber tragungen[J]. Math Zeitschrift, 1924, 21:211-233.

[2] Indranu Suhendro. A new semi-symmetric unified field theory of the classical fields of gravity and electromagnetism [J]. Progress in Physics, 2007,4:47-62.

[3] Hayden H A. Subspaces of a space with torsion[J]. Proc of London Math Soc, 1932,34:27-50.

[4] Muniraja G. Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and ageneralization of Schur's theorem[J]. Int J Contemp Math Sci, 2008,3(25/28):1223-1232.

[5] Hong Van Le. Statistical manifolds are statistical models[J]. J Geom, 2005,24:83-93.

[6] Zhao P B. Some properties of projective semi-symmetric connections[J]. International Mathematical Forum, 2008, 3(7):341-347.

[7] Dunn K A. A geometric model for scalar-tensor theories of gravitation tensor[J]. N S, 1775,29:214-216.

[8] Han Yanling, Ho Talyun, Zhao Peibiao. Some invariants of quarter-symmetric metric connections under projective transformation[J]. Filomat, 2013,27(4):679-691.

[9] Lam K S, Chern S S, Chen W H. Lectures on Differential Geometry[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1999.

[10] Ho Talyun. On the projective semi-symmetric connection and conformal semi-symmetric connection on the Riemannian manifold[J]. Journal of Kim Il Sung University (Natural Science), 2013,2(2):3-10.

[11] Zhao P B, Song H Z. An invariant of the projective semi-symmetric connection[J]. Chinese Quarterly J of Math, 2001,16(4):49-54.

[12] Agache N S, Chalfe M R. A semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold[J]. Indian J Pure Appl Math,1992,20(6):309-409.