

文章编号: 1004-4353(2015)04-0267-08

# 基于 POD 方法的 BBM-Burgers 方程 向后欧拉有限元降维格式

姜美燕, 朴光日\*

( 延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002 )

**摘要:** 利用特征正交分解 (proper orthogonal decomposition, POD) 方法讨论了 BBM-Burgers 方程的降维模型. 首先, 简要介绍了 POD 方法, 并利用此方法把通常的向后欧拉有限元格式简化为一个自由度极少的向后欧拉有限元格式. 最后, 给出了降维的向后欧拉有限元解的误差估计.

**关键词:** 降维模型; 向后欧拉有限元格式; 特征正交分解; 误差分析; BBM-Burgers 方程

**中图分类号:** O241.82

**文献标识码:** A

## A reduced-order backward Euler finite element scheme for the BBM-Burgers equation based on POD

JIANG Meiyang, PIAO Guangri\*

( Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China )

**Abstract:** In this paper, we study reduced-order modeling for the BBM-Burgers equation by using proper orthogonal decomposition (POD) method. First of all, brief review of the POD method are provided; secondly, the POD method is applied to a usual backward Euler finite element (BEFE) scheme such that it is reduced into a BEFE scheme with fewer degrees of freedom, and the errors of reduced-order BEFE solution are analyzed.

**Keywords:** reduced-order modeling; backward Euler finite element method; proper orthogonal decomposition; error analysis; BBM-Burgers equation

## 0 引言

求解复杂的非线性流体方程时, 为了得到足够高的精度, 任何形式的离散化格式 (比如有限元、有限差分、谱元、有限体积等) 都需要较多的自由度, 从而使得在内存和计算上需要付出很高的代价; 因此, 在保证其数值解具有足够高精度的前提下, 如何简化计算和降低内存要求具有重要意义. 降维是解决该问题的有效方法之一, 其中特征正交分解 (proper orthogonal decomposition, POD) 方法是普遍较为熟悉的一种降维方法<sup>[1]</sup>. POD 方法具备一种有效逼近大量数据的功能, 其实质是在最小二乘意义下可寻找能代表已知数据的一组正交基, 是一种求已知数据的最优逼近方法. 同时, POD 方法可与一些偏微分方程数值解法相结合, 将无限维的微分方程降成低维模型, 由此能极大地减少计算量和降低内存要求, 所以, POD 方法已被广泛地应用于很多复杂的系统中<sup>[2-12]</sup>.

当讨论小振幅长波在非线性色散介质中的传播时, 为准确反映其真实情况, 往往要考虑耗散原理.

因为 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBM-Burgers) 方程

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + uu_x + \beta u_x = 0 \tag{1}$$

包含了非线性色散项和耗散项,因此其被视为一种长波传播的模型方程来加以研究<sup>[13]</sup>. 在方程(1) 中  $\alpha > 0$ ,  $\beta$  是常数,  $u = u(x, t)$  是水平方向上的流体速度. 近年来,许多研究者从数学理论和物理意义上研究了 BBM-Burgers 方程解的性态<sup>[13-17]</sup>,而且还利用有限差分、有限元或区域分解方法讨论了其方程的数值解<sup>[18-21]</sup>. 但是,对 BBM-Burgers 方程的降维模型研究得还较少,如文献[22] 虽然给出了基于 POD 方法的分布反馈控制的简化有限元格式及其科学计算,但并没有讨论通常的有限元解和降维模型解之间的误差分析. 本文应用 POD 方法把 BBM-Burgers 方程的通常的时间一阶精度向后欧拉有限元格式简化成维数较低的时间一阶精度向后欧拉格式,并类似于文献[23-24] 进行了降维的向后欧拉有限元解的误差分析.

本文考虑的 BBM-Burgers 方程如下:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \alpha \Delta u = -\nabla \cdot f(u), & x \in \Omega, t \in (0, T]; \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, T]; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

其中,  $f(u) = (f_1(u), \dots, f_d(u))$  是  $d$  维向量,每个分量  $f_k(u) = (u + \frac{1}{p+1}u^{p+1})$ ,  $k = 1, \dots, d$ ,  $p \geq 1$  是正整数. 当  $p = 1$  时,方程(2) 与方程(1) 相互等价.  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  ( $d \leq 2$ ) 是一个有界区域,并具有光滑边界. 本文根据误差分析的需要,假设初始条件  $u_0(x)$  是足够光滑的.

1 BBM-Burgers 方程通常的欧拉有限元格式

本文用到的空间是 Sobolev 空间<sup>[25]</sup>,令  $X = H_0^1(\Omega)$ , 则式(2) 的变分形式为:

对任意的  $t \in (0, T]$ , 求  $u \in X$  使得满足

$$\begin{cases} (u_t, v) + (\nabla u_t, \nabla v) + \alpha (\nabla u, \nabla v) = (f(u), \nabla v), \forall v \in X; \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3}$$

其中  $(\cdot, \cdot)$  表示  $L^2$ -内积.

变分问题(3) 的解的存在唯一性可参见文献[21, 26]. 为了求式(3) 的数值解,用欧拉有限元方法将式(3) 离散化. 设  $N$  为正整数,时间步长取  $k = T/N$ ,  $t_n = nk$  ( $0 \leq n \leq N$ ). 再设  $\mathfrak{S}_h$  是  $\overline{\Omega}$  的一个剖分(比如,一维时取线段,二维时取三角形剖分等),则  $X$  的有限元空间可取为

$$X_h = \{V_h \in X \cap C^0(\Omega); V_h|_K \in P_m(K), V_h|_{\partial\Omega} = 0, \forall K \in \mathfrak{S}_h\},$$

其中  $m \geq 1$ ,  $P_m(K)$  是  $K$  上次数不超过  $m$  的多项式空间<sup>[27]</sup>. 记  $u(t_n) = u(x, t_n)$ , 用  $U_h^n$  表示  $u$  的全离散逼近,则式(3) 的通常的欧拉有限元全离散格式可表示为:

求  $U_h^n \in X_h$  使得对于  $1 \leq n \leq N$ ,

$$\begin{cases} (U_h^n, V_h) + (\nabla U_h^n, \nabla V_h) + \alpha k (\nabla U_h^{n-1}, \nabla V_h) = \\ k(f(U_h^{n-1}), \nabla V_h) + (U_h^{n-1}, V_h) + (\nabla U_h^{n-1}, \nabla V_h), \forall V_h \in X_h, 1 \leq n \leq N; \\ U_h^0 = u_h^0, \end{cases} \tag{4}$$

其中  $u_h^0 \in X_h$  是  $u_0$  的适当的近似值.

**定理 1** 系统(4) 存在唯一的解  $U_h^n \in X_h$ , 并且  $U_h^n$  满足

$$\|U_h^n\|_\infty \leq C(\|U_h^0\|_1), n \geq 1; \tag{5}$$

若  $u_h^0$  是  $u_0$  在  $X_h$  上的投影,而且问题(3) 的解满足  $u_t \in H^{m+1}(\Omega)$  和  $u_{tt} \in L^2(\Omega)$ , 则存在与  $h$  和  $k$  无关的常数  $C$ , 使得对充分小的  $k$  有如下的误差估计公式:

$$\|u(t_n) - U_h^n\|_\infty \leq C(h^m + k), \quad 1 \leq n \leq N. \quad (6)$$

定理1的证明过程可参考文献[21]. 由此,只要给定初始条件  $u_0^h$  和时间步长  $k$  及空间步长  $h$ , 就可得到系统(4)的解  $\{U_h^n\}_{n=1}^N$ . 令这些解为  $N$  个样本点,则在POD方法中,这些样本点称为瞬像. 实际计算时,瞬像集合可以从实际物理过程中抽样并通过插值(或资料同化)得到.

## 2 POD基的生成

对于上述构造的瞬像  $U_h^i(x)$  ( $i=1,2,\dots,N$ ), 令  $Z_i(x) = U_h^i(x)$  ( $i=1,2,\dots,N$ ),  $\nu = \text{span}\{Z_1, Z_2, \dots, Z_N\}$ , 这时称  $\nu$  为由瞬像  $\{Z_i\}_{i=1}^N$  张成的空间, 其中  $\{Z_i\}_{i=1}^N$  至少有一个非零元. 记  $l = \dim \nu$ , 并用  $\{\phi_j\}_{j=1}^l$  表示  $l$  维空间  $\nu$  的标准正交基, 于是有

$$Z_i = \sum_{j=1}^l (Z_i, \phi_j)_X \phi_j, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (7)$$

其中  $(Z_i, \phi_j)_X = (U_h^i, \phi_j) + (\nabla U_h^i, \nabla \phi_j)$ ,  $X = H_0^1(\Omega)$ .

**定义1** POD方法是指求标准正交基  $\phi_j$  ( $j=1,2,\dots,l$ ) 使得对于每个  $d$  ( $1 \leq d \leq l$ ), 元素  $Z_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) 与式(7)的  $d$  项和之间的均方误差最小, 即求标准正交基  $\phi_j$  ( $i=1,2,\dots,l$ ) 使得

$$\min_{(\phi_j)_{j=1}^d} \sum_{i=1}^N \left\| Z_i - \sum_{j=1}^d (Z_i, \phi_j)_X \phi_j \right\|_X^2 \quad (8)$$

满足

$$(\phi_i, \phi_j)_X = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad 1 \leq j \leq i, \quad (9)$$

其中  $\|Z_i\|_X = \|U_h^i\|_0 + \|\nabla U_h^i\|_0$ .

式(8)和(9)的解  $\{\phi_j\}_{j=1}^d$  称为秩等于  $d$  的POD基, 由式(7)和  $\phi_j$  的标准正交性, 可将式(8)改写为

$$\sum_{i=1}^N \left\| Z_i - \sum_{j=1}^d (Z_i, \phi_j)_X \phi_j \right\|_X^2 = \sum_{i=1}^N \left\| \sum_{j=d+1}^l (Z_i, \phi_j)_X \phi_j \right\|_X^2 = \sum_{j=d+1}^l \left[ \sum_{i=1}^N |(Z_i, \phi_j)_X|^2 \right]. \quad (10)$$

这里, 要使式(10)达到最小, 等价于求标准正交基  $\phi_j$  ( $j=1,2,\dots,l$ ) 使得  $\max_{(\phi_j)_{j=1}^d} \sum_{j=1}^d \left[ \sum_{i=1}^N |(Z_i, \phi_j)_X|^2 \right]$  满足  $(\phi_i, \phi_j)_X = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq d$ ,  $1 \leq j \leq i$ . 即式(8)和(9)等价于找一个函数  $\psi$  (称为POD基元), 使式(11)达到最大:

$$\sum_{i=1}^N |(Z_i, \psi)_X|^2 \text{ 满足 } (\psi, \psi)_X = \|\psi\|_1^2 = 1. \quad (11)$$

选择如下形式的一类特殊试验函数  $\psi$ :

$$\psi = \sum_{i=1}^N a_i Z_i, \quad (12)$$

其中  $a_i$  是保证  $\psi$  使得式(11)达到最大的待定系数. 为此定义  $G(x, x') = \sum_{i=1}^N Z_i(x) Z_i(x')$  及  $R\psi =$

$\int_\Omega (G(x, x') \psi(x') + \nabla' G(x, x') \nabla' \psi(x')) dx'$ , 其中  $R: X \rightarrow X$ ,  $\nabla'$  表示相对于  $(x', y')$  的梯度. 直接计算得

$$\begin{aligned} (R\psi, \psi)_X &= \int_\Omega (R\psi(x) \cdot \psi(x) + \nabla R\psi(x) \cdot \nabla \psi(x)) dx = \\ &= \int_\Omega \left( \int_\Omega (G(x, x') \psi(x') + \nabla' G(x, x') \nabla' \psi(x')) dx' \right) \psi(x) dx + \\ &= \int_\Omega \nabla \left( \int_\Omega (G(x, x') \psi(x') + \nabla' G(x, x') \nabla' \psi(x')) dx' \right) \nabla \psi(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \int_\Omega Z_i(x') \psi(x') dx' \int_\Omega Z_i(x) \psi(x) dx + \int_\Omega \nabla' Z_i(x') \nabla' \psi(x') dx' \int_\Omega Z_i(x) \psi(x) dx + \right. \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} Z_i(x') \psi(x') dx' \int_{\Omega} \nabla Z_i(x) \nabla \psi(x) dx + \int_{\Omega} \nabla' Z_i(x') \nabla' \psi(x') dx' \int_{\Omega} Z_i(x) \psi(x) dx \Big) = \sum_{i=1}^N ((Z_i, \psi)^2 + 2(Z_i, \psi)(\nabla Z_i, \nabla \psi) + (\nabla Z_i, \nabla \psi)^2),$$

则

$$(R\psi, \psi)_X = \sum_{i=1}^N |(Z_i, \psi)_X|^2. \tag{13}$$

进一步, 有  $(R\varphi, \psi)_X = (\varphi, R\psi)_X, \forall \varphi, \psi \in X$ . 于是,  $R$  是  $X$  上的非负定对称算子. 由此求式(11) 的最大值问题, 等价于求式(14) 的最大特征值:

$$R\psi = \lambda \psi \text{ 满足 } \|\psi\|_1 = 1, \tag{14}$$

即

$$R\psi = \int_{\Omega} (G(x, x') \psi(x') + \nabla' G(x, x') \nabla' \psi(x')) dx' = \lambda \psi \text{ 满足 } \|\psi\|_1 = 1, \tag{15}$$

其中  $\lambda$  与  $h$  和  $k$  有关(因为  $\nu$  与  $h$  和  $k$  有关). 将式(12) 和  $G$  代入到式(15) 可得

$$\sum_{i=1}^N \left[ \sum_{k=1}^N \left( \int_{\Omega} (Z_i(x') Z_k(x') + \nabla' Z_i(x') \nabla' Z_k(x')) dx' \right) a_k \right] Z_i(x) = \sum_{i=1}^N \lambda a_i Z_i(x).$$

即  $\sum_{k=1}^N \left( \int_{\Omega} (Z_i(x') Z_k(x') + \nabla' Z_i(x') \nabla' Z_k(x')) dx' \right) a_k = \lambda a_i, i=1, 2, \dots, N$ . 将上式写成矩阵形式, 即

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \text{ 其中 } \mathbf{A} = (A_{ik})_{N \times N}, A_{ik} = \int_{\Omega} (Z_i(x') Z_k(x') + \nabla' Z_i(x') \nabla' Z_k(x')) dx', \mathbf{v} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T.$$

由于  $\mathbf{A}$  是秩为  $l$  的非负定矩阵, 因此, 对应于非零的特征值, 存在一组完备的标准正交特征向量:

$$\mathbf{v}^1 = (a_1^1, a_2^1, \dots, a_N^1)^T, \mathbf{v}^2 = (a_1^2, a_2^2, \dots, a_N^2)^T, \dots, \mathbf{v}^l = (a_1^l, a_2^l, \dots, a_N^l)^T.$$

这样, 利用第 1 个最大的特征值对应的特征向量, 就可得到问题(8) 的最优解, 即第 1 个 POD 基为  $\psi_1 =$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \sum_{i=1}^N a_i^1 Z_i, \text{ 其中 } a_i^1 \text{ 是对应于最大特征值 } \lambda_1 \text{ 的特征向量 } \mathbf{v}^1 \text{ 的分量, 其余的 POD 基元 } \psi_i (i=2, 3, \dots,$$

$l)$  可由其他的特征向量  $\mathbf{v}^i (i=2, 3, \dots, l)$  的分量得到, 即  $\psi_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \sum_{k=1}^N a_k^i Z_k, i=2, 3, \dots, l$ . 利用  $\{\mathbf{v}^k\}_{k=1}^l$  的

标准正交性条件, 即  $\mathbf{v}^k \cdot \mathbf{v}^{k'} = \sum_{i=1}^N a_i^k a_i^{k'} = \begin{cases} 1, & k = k'; \\ 0, & k \neq k', \end{cases}$  可得

$$\begin{aligned} (\psi_k, \psi_{k'})_X &= \int_{\Omega} (\psi_k(x) \psi_{k'}(x) + \nabla \psi_k(x) \nabla \psi_{k'}(x)) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_{k'}}} \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N a_i^k Z_i(x) \sum_{j=1}^N a_j^{k'} Z_j(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N a_i^k \nabla Z_i(x) \sum_{j=1}^N a_j^{k'} \nabla Z_j(x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_{k'}}} \sum_{i=1}^N a_i^k \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Omega} (Z_i(x) Z_j(x) + \nabla Z_i(x) \nabla Z_j(x)) dx \right) a_j^{k'} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_{k'}}} \sum_{i=1}^N a_i^k \sum_{j=1}^N A_{ij} a_j^{k'} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_{k'}}} \mathbf{v}^k \cdot \mathbf{A} \mathbf{v}^{k'} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_{k'}}} \mathbf{v}^k \cdot \lambda_k \mathbf{v}^{k'} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_{k'}}} \lambda_k \mathbf{v}^k \cdot \mathbf{v}^{k'}. \end{aligned}$$

由此  $(\psi_k, \psi_{k'})_X = \begin{cases} 1, & k = k'; \\ 0, & k \neq k'. \end{cases}$  这样, POD 基  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_l\}$  构成一个正交集, 而且有如下的结论:

**命题 1** 设  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$ , 为矩阵  $\mathbf{A}$  的正的特征值, 而且  $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^l$  是对应的特征向量, 则秩  $d \leq l$  的 POD 基为

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \sum_{j=1}^N (\mathbf{v}^i)_j Z_j, 1 \leq i \leq d \leq l,$$

其中  $(\mathbf{v}^i)_j$  表示特征向量  $\mathbf{v}^i$  的第  $j$  个分量. 进一步,有如下的误差公式:

$$\sum_{i=1}^N \left\| Z_i - \sum_{j=1}^d (Z_i, \phi_j)_X \phi_j \right\|_X^2 = \sum_{j=d+1}^l \lambda_j. \quad (16)$$

**证明** 命题的前半部分已经由上述讨论给出. 下面仅需证明公式(16). 由于  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l$  满足式(14),所以从式(13)和(15)可得

$$\sum_{i=1}^N |(Z_i, \phi_j)_X|^2 = (R\phi_j, \phi_j)_X = \lambda_j. \quad (17)$$

这样,如果前面  $d$  个特征值的和  $\sum_{j=1}^d \lambda_j$  最大,则余下的特征值之和  $\sum_{j=d+1}^l \lambda_j$  就会变小. 因此,由式(10)和(17)可知

$$\sum_{i=1}^N \left\| Z_i - \sum_{j=1}^d (Z_i, \phi_j)_X \phi_j \right\|_X^2 = \sum_{j=d+1}^l \sum_{i=1}^N |(Z_i, \phi_j)_X|^2 \sum_{j=d+1}^l \lambda_j. \quad (18)$$

命题 1 得证.

令  $X^d = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d\}$ . 定义 Ritz 投影  $P^h: X \rightarrow X_h$  (如果  $P^h$  是被限制为从  $X_h$  到  $X^d$  的 Ritz 投影时记为  $P^d$ ),使得  $P^h|_{X_h} = P^d: X_h \rightarrow X^d$  和  $P^h: X \setminus X_h \rightarrow X_h \setminus X^d$  如下:

$$(P^h U, V_h)_X = (U, V_h) + (\nabla U, \nabla V_h), \forall V_h \in X_h, \quad (19)$$

其中  $U \in X$ . 由式(19)定义的线性算子  $P^h$  满足  $\|P^h U\|_1 \leq \|U\|_1$ .

**引理 1** 对于每个  $d$  ( $1 \leq d \leq l$ ), 投影算子  $P^d$  满足:

$$\sum_{i=1}^n \|U_h^i - P^d U_h^i\|_1^2 \leq \sum_{j=d+1}^l \lambda_j, \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^n \|U_h^i - P^d U_h^i\|_0^2 \leq Ch^2 \sum_{j=d+1}^l \lambda_j, \quad (21)$$

其中  $U_h^i \in \mathcal{V}$  是问题(4)的解.

**证明** 对于任意的  $U \in X$ , 由式(19)得

$$\begin{aligned} \|U - P^h U\|_1^2 &= (U - P^h U, U - P^h U)_X = (U - P^h U, U - V_h + V_h - P^h U)_X = \\ &= (U - P^h U, U - V_h)_X + (U - P^h U, V_h - P^h U)_X \leq \|U - P^h U\|_1 \|U - V_h\|_1, \forall V_h \in X_h, \end{aligned}$$

因此有

$$\|U - P^h U\|_1 \leq \|U - V_h\|_1, \forall V_h \in X_h. \quad (22)$$

如果  $U = Z_h^i$ , 而且  $P^h$  被限制为从  $X_h$  到  $X^d$  的 Ritz 投影并使得  $P^h|_{X_h} = P^d: X_h \rightarrow X^d$ , 即  $P^h Z_h^i = P^d Z_h^i \in X^d$ , 在上式中取  $V_h = \sum_{j=1}^d (Z_h^i, \phi_j)_X \phi_j \in X^d$ , 由式(18)可得到式(20). 为了证明式(21), 考虑如下的变分问题:

$$(W, V)_X = (U - P^h U, V), \forall V \in X_h.$$

则  $W \in H^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ , 而且满足  $\|W\|_2 \leq C\|U - P^h U\|_0$ . 取  $V = U - P^h U$ , 由式(19)可得

$$\begin{aligned} \|U - P^h U\|_0^2 &= (W, U - P^h U)_X = (W - W_h, U - P^h U)_X \leq \\ &\leq \|W - W_h\|_1 \|U - P^h U\|_1, \forall W_h \in X_h. \end{aligned} \quad (23)$$

取  $W_h = \pi_h W$  为  $W$  在  $X_h$  上的差值, 则由插值理论<sup>[27]</sup>和式(23)可得

$$\|U - P^h U\|_0^2 \leq Ch \|W\|_2 \|U - P^h U\|_1 \leq Ch \|U - P^h U\|_0 \|U - P^h U\|_1,$$

于是有

$$\|U - P^h U\|_0 \leq Ch \|U - P^h U\|_1. \quad (24)$$

这样,如果  $U = Z_h^i$ , 而且  $P^h$  是被限制为从  $X_h$  到  $X^d$  的 Ritz 投影, 即  $P^h Z_h^i = P^d Z_h^i \in X^d$ , 则由式(20)和(24)可得到式(21), 引理 1 得证.

### 3 基于 POD 方法的简化欧拉有限元格式及其误差估计

利用  $X^d$  可以将方程(4) 化为如下的基于 POD 方法的向后欧拉有限元降维格式:

求  $U_d^n \in X^d$  使得

$$\begin{cases} (U_d^n, V_d) + (\nabla U_d^n, \nabla V_d) + \alpha k (\nabla U_d^n, \nabla V_d) = \\ k(f(U_d^n), \nabla V_d) + (U_d^{n-1}, V_d) + (\nabla U_d^{n-1}, \nabla V_d), \forall V_d \in X_d, 1 \leq n \leq N; \\ U_d^0 = u_0^d, \end{cases} \quad (25)$$

其中  $u_0^d \in X^d$  是  $u_0^h$  的适当的近似值.

当  $k$  充分小时,对给定的初始条件  $u_0^d \in X^d$ , 系统(25) 存在唯一的解  $U_d^n \in X^d$ . 按照系统(4) 的分析过程,可以证明系统(25) 的解的存在唯一性. 下面借助于通常的有限元方法,给出基于 POD 方法的向后欧拉有限元降维格式的解的误差估计. 为此,需要引入如下的离散 Gronwall 引理.

**引理 2**(离散的 Gronwall 不等式) 若  $\omega(n), \rho(n)$  是非负的函数且  $\rho(n)$  是不减的,对于  $C > 0$  和

$$\omega(n) \leq \rho(n) + Ck \sum_{j=0}^{n-1} \omega(j), \forall n, \text{ 有 } \omega(n) \leq \rho(n) e^{Ckn}, \forall n.$$

对于 BBM-Burgers 方程向后欧拉有限元降维格式,式(25) 有如下的解的误差估计:

**定理 2** 如果  $U_d^n \in X_d$  是系统(25) 的解,则有

$$\|U_d^n\|_\infty \leq C \|U_d^0\|_1, \quad (26)$$

并且,若  $P^d u_0^h = u_0^d$ , 则存在与  $h$  和  $k$  无关的常数  $C$ , 对充分小的  $k$  有如下的误差估式:

$$\|u(t_n) - U_d^n\|_\infty \leq Ch^m + Ck + C(k + kh^2)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

**证明** 首先,证明  $U_d^n$  的有界性. 在式(26) 中取  $V_d = U_d^n$ , 得到

$$(U_d^n, U_d^n) + (\nabla U_d^n, \nabla U_d^n) + \alpha k (\nabla U_d^n, \nabla U_d^n) = k(f(U_d^n), \nabla U_d^n) + (U_d^{n-1}, U_d^n) + (\nabla U_d^{n-1}, \nabla U_d^n),$$

这里  $(f(U_d^n), \nabla U_d^n) = 0^{[28]}$ . 根据  $\alpha > 0$  和 Cauchy 不等式,可得

$$\begin{aligned} \|U_d^n\|_1^2 &\leq k(f(U_d^n), \nabla U_d^n) + (U_d^{n-1}, U_d^n) + (\nabla U_d^{n-1}, \nabla U_d^n) \leq \\ &\frac{1}{2} \|U_d^{n-1}\|_0^2 + \frac{1}{2} \|U_d^n\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\nabla U_d^{n-1}\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\nabla U_d^n\|_0^2. \end{aligned}$$

整理后得出  $\|U_d^n\|_1^2 \leq \|U_d^{n-1}\|_1^2$ , 故有  $\|U_d^n\|_1 \leq \|U_d^0\|_1$ . 再根据 Sobolev 嵌入定理,可得

$$\|U_d^n\|_\infty \leq C \|U_d^n\|_1 \leq C \|U_d^0\|_1.$$

其次,证明误差估计式(27). 由于  $X^d \subset X_h$ , 在式(4) 中取  $V_h = V_d$  并与式(25) 相减可得

$$\begin{aligned} (U_h^n - U_d^n, V_d) + (1 + \alpha k) (\nabla (U_h^n - U_d^n), \nabla V_d) = \\ k(f(U_h^n) - f(U_d^n), \nabla V_d) + (U_h^{n-1} - U_d^{n-1}, V_d) + (\nabla (U_h^{n-1} - U_d^{n-1}), \nabla V_d). \end{aligned} \quad (28)$$

令  $(U_h^n - U_d^n) = (U_h^n - P^d U_h^n) + (P^d U_h^n - U_d^n)$ , 则根据式(19),并由式(28) 可推出

$$\begin{aligned} (P^d U_h^n - U_d^n, V_d) + \alpha k (\nabla (U_h^n - P^d U_h^n), \nabla V_d) + (1 + \alpha k) (\nabla (P^d U_h^n - U_d^n), \nabla V_d) = \\ k(f(U_h^n) - f(U_d^n), \nabla V_d) + (P^d U_h^{n-1} - U_d^{n-1}, V_d) + (\nabla (P^d U_h^{n-1} - U_d^{n-1}), \nabla V_d). \end{aligned}$$

取  $V_d = P^d U_h^n - U_d^n$ , 则有

$$\begin{aligned} \|P^d U_h^n - U_d^n\|_0^2 + (1 + \alpha k) \|\nabla (P^d U_h^n - U_d^n)\|_0^2 = \\ \alpha k (\nabla (P^d U_h^n - U_h^n), \nabla (P^d U_h^n - U_d^n)) + k(f(U_h^n) - f(U_d^n), \nabla (P^d U_h^n - U_d^n)) + \\ (P^d U_h^{n-1} - U_d^{n-1}, P^d U_h^n - U_d^n) + (\nabla (P^d U_h^{n-1} - U_d^{n-1}), \nabla (P^d U_h^n - U_d^n)) \leq \\ \frac{\alpha k}{4} \|\nabla (P^d U_h^n - U_h^n)\|_0^2 + \alpha k \|\nabla (P^d U_h^n - U_d^n)\|_0^2 + \frac{1}{2} \|P^d U_h^{n-1} - U_d^{n-1}\|_0^2 + \\ \frac{1}{2} \|P^d U_h^n - U_d^n\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\nabla (P^d U_h^{n-1} - U_d^{n-1})\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\nabla (P^d U_h^n - U_d^n)\|_0^2 + \end{aligned}$$

$$k \|f(U_h^n) - f(U_d^n)\|_0 \|\nabla(P^d U_h^n - U_d^n)\|_0,$$

简化后可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|P^d U_h^n - U_d^n\|_1^2 &\leq \frac{\alpha k}{4} \|\nabla(P^d U_h^n - U_h^n)\|_0^2 + \frac{1}{2} \|P^d U_h^{n-1} - U_d^{n-1}\|_1^2 + \\ &k \|f(U_h^n) - f(U_d^n)\|_0 \|\nabla(P^d U_h^n - U_d^n)\|_0. \end{aligned} \quad (29)$$

因为  $f$  满足 Lipschitz 条件,再根据式(5) 和(26) 可得  $\|f(U_h^n) - f(U_d^n)\|_0 \leq C \|U_h^n - U_d^n\|_0$ . 将其代入到式(29),有

$$\begin{aligned} \|P^d U_h^n - U_d^n\|_1^2 &\leq \frac{\alpha k}{2} \|\nabla(P^d U_h^n - U_h^n)\|_0^2 + \|P^d U_h^{n-1} - U_d^{n-1}\|_1^2 + Ck \|U_h^n - P^d U_h^n\|_0^2 + \\ &Ck \|P^d U_h^n - U_d^n\|_1^2 \leq k(C \|U_h^n - P^d U_h^n\|_0^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla(P^d U_h^n - U_h^n)\|_0^2) + \\ &\|P^d U_h^{n-1} - U_d^{n-1}\|_1^2 + Ck \|P^d U_h^n - U_d^n\|_1^2. \end{aligned}$$

上式对  $n$  从 1 到  $J$  ( $\leq N$ ) 累加,即得(为了书写方便用  $n$  代替  $J$ )

$$\begin{aligned} (1 - Ck) \|P^d U_h^n - U_d^n\|_1^2 &\leq k \sum_{j=1}^n \left( C \|U_h^j - P^d U_h^j\|_0^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla(P^d U_h^j - U_h^j)\|_0^2 \right) + \\ &Ck \sum_{j=0}^{n-1} \|P^d U_h^j - U_d^j\|_1^2. \end{aligned}$$

选取充分小的  $k$ ,使得当  $(1 - Ck) \geq 0$  时,有

$$\begin{aligned} \|P^d U_h^n - U_d^n\|_1^2 &\leq \frac{k}{1 - Ck} \sum_{j=1}^n \left( C \|U_h^j - P^d U_h^j\|_0^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla(P^d U_h^j - U_h^j)\|_0^2 \right) + \\ &\frac{Ck}{1 - Ck} \sum_{j=0}^{n-1} \|P^d U_h^j - U_d^j\|_1^2. \end{aligned}$$

再由引理 1 和引理 2,得

$$\|P^d U_h^n - U_d^n\|_1 \leq C(k + kh^2) \sum_{j=d+1}^l \lambda_j. \quad (30)$$

根据 Sobolve 嵌入定理、三角不等式、引理 1 和式(30) 可得到式(27),定理 2 得证.

## 参考文献:

- [1] Holmes P, Lumley J L, Berkooz G. Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry[M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1996.
- [2] Berkooz G, Holmes P, Lumley J. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows[J]. Ann Rev Fluid Mech, 1993,25:539-575.
- [3] Berkooz G, Titi E. Galerkin projections and the proper orthogonal decomposition for equivariant equations[J]. Phys Lett, 1993,A174:94-102.
- [4] Burkardt J, Gunzburger M, Lee H C. POD and CVT-based reduced-order modeling of Navier-Stokes flows[J]. Comp Meth Appl Mech Engrg, 2006,196:337-355.
- [5] Christensen E, Brons M, Sorensen J. Evaluation of proper orthogonal decomposition based decomposition techniques applied to parameter-dependent nonturbulent flows[J]. SIAM J Sci Comp, 2000,21:1419-1434.
- [6] Deane A, Kevrekidis I, Karniadakis G, et al. Low-dimensional models for complex geometry flows: application to grooved channels and circular cylinders[J]. Phys Fluids A, 1991,3:2337-2354.
- [7] Kunisch K, Volkwein S. Control of the Burgers equation by a reduced-order approach using proper orthogonal decomposition[J]. J Optim Theory Appl, 1999,102:345-371.
- [8] Lee H C, Piao G R. Boundary feedback control of the Burgers equations by a reduced-order approach using centroidal Voronoi tessellations[J]. J Sci Comp, 2010,43:369-387.
- [9] Ly H V, Tran H T. Modeling and control of physical processes using proper orthogonal decomposition[J]. Comp Math Appl, 2001,33:223-236.
- [10] Park H, Lee J. Solution of an inverse heat transfer problem by means of empirical reduction of modes[J]. Z An-

- gew Math Phys, 2000,51:17-38.
- [11] Park H, Lee W. An efficient method of solving the Navier-Stokes equations for flow control[J]. Int J Numer Mech Eng, 1998,41:1133-1151.
- [12] Piao G R, Lee H C, Lee J Y. Distributed feedback control of the Burgers equation by a reduced-order approach using weighted centroidal Voronoi tessellation[J]. J KSIAM, 2009,13:293-305.
- [13] Benjamin T B, Bona J L, Mahony J J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems[J]. Phi Trans Roy Soc London: Series A, 1972,272:47-78.
- [14] Bona J L, Dougalis V A. An initial and boundary value problem for a model equation for propagation of long waves [J]. J Math Anal Appl, 1980,75:503-522.
- [15] Mei M. Large-Time behavior of solutions for Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equations[J]. Nonlinear Analysis, 1998,33:699-714.
- [16] Zhang H, Wei G M, Gao Y T. On the general form of the Benjamin-Bona-Mahony equation in fluid mechanics [J]. Czech J Phys, 2002,52:344-373.
- [17] Chen Y, Li B, Zhang H. Exact solutions of two nonlinear wave equations with simulation terms of any order[J]. Comm Nonlinear Sci Numer Simulation, 2005,10:133-138.
- [18] Omrani K, Ayadi M. Finite difference discretization of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) equation [J]. Numer Meth Partial Diff Eq, 2008,24:239-248.
- [19] Omrani K. The convergence of the fully discrete Galerkin approximations for the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation[J]. Appl Math Comput, 2006,180:614-621.
- [20] Al-Khaled K, Momani S, Alawneh A. Approximate wave solutions for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equations[J]. Appl Math Comp, 2005,171:281-292.
- [21] Kadri T, Khiari N, Abidi F, et al. Methods for the numerical solution of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2008,24:1501-1516.
- [22] Piao G R, Lee H C. Distributed feedback control of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation by a reduced-order model[J]. East Asian Journal Applied Mathematics, 2015,5(1):61-74.
- [23] Luo Zhendong, Zhou Yanjie, Yang Xiaozhong. A reduced finite element formulation based on proper orthogonal decomposition for Burger equation[J]. Appl Numer Math, 2009,59:1933-1946.
- [24] 罗振东,陈静,谢正辉,等. 抛物型方程基于 POD 方法的时间二阶精度 CN 有限元降维格式 [J]. 中国科学:数学, 2011,41(5):447-460.
- [25] Adams R A. Sobolev Space[M]. New York: Academic Press, 1975.
- [26] Thomée V. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [27] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. Amsterdam: North-Holland, 1978.
- [28] Atouani N, Omrani K. Galerkin finite element method for the Rosenau-RLW equation [J]. Compu Math Appl, 2013,66:289-303.