文章编号: 1004-4353(2015)03-0207-08

一类带有分数阶边值条件的分数阶 q-差分方程解的存在性

范成涛, 葛琦*
(延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 研究了一类带有分数阶 q-差分边值条件的分数阶 q-差分方程解的存在性和唯一性. 首先分析了格林函数的一些性质;其次分别利用完备度量空间上的不动点定理、Banach空间上的Schauder不动点定理和Banach压缩映像原理,证明了该方程解的存在性和唯一性;最后通过实例验证了本文所得结论的正确性.

关键词: 分数阶 q-差分; 完备度量空间; 不动点定理; 解的存在性和唯一性
中图分类号: O175.6 **文献标识码:** A

Existence of solutions for a class of fractional q-differences equation with fractional boundary value conditions

FAN Chengtao, GE Qi*
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We study the existence and uniqueness of solutions for a class of the fractional q-differences equation with the fractional q-differences boundary conditions. Firstly, we analyze some properties of the Green function. Secondly, the existence and uniqueness of the solutions of the equation are proved by using the fixed point theorem in complete metric space, Schauder fixed point theorem in Banach space and Banach contraction principle. Finally, the correctness of the conclusion in this paper is verified by some examples.

Key words: fractional q-differences; complete metric space; fixed point theorem; existence and uniqueness of solutions

0 引言

近年来,q-差分微积分理论在数学物理问题、动力系统和量子模型等科学领域被广泛应用[1-2]. q-微积分概念是由 Jackson 于 1910 年提出的[3-4],之后由 Al-Salam[5] 和 Agarwal[6] 给出了分数阶 q-微积分的基本概念和性质. 近年来,关于分数阶 q-差分方程边值问题解存在性的研究受到人们关注,并取得了许多成果[7-13],但这些研究成果中大多数研究的是带有整数阶边值条件的分数阶 q-差分方程的解[9-13]. 本文研究带有分数阶边值条件的分数阶 q-差分方程

$$\begin{cases}(D_q^\alpha u)(x)=-f(x,u(x)),\ 0<x<1;\\ u(0)=0,\ (D_q^v u)(1)=\beta(D_q^v u)(\eta).\end{cases}\tag{1}$$

其中 $1<\alpha<2$, $0<v<1$, $\alpha-v>1$, $0<\eta<1$, $0\leqslant\beta<1$, $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为

收稿日期: 2015-01-12 ***通信作者:** 葛琦(1975—),女,副教授,研究方向为微分方程理论及其应用.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11161049);吉林省教育厅"十二五"科技项目(012015042)

连续函数.本文将分别利用完备度量空间上的不动点定理、Banach 空间上的 Schauder 不动点定理和 Banach 压缩映像原理,讨论方程(1)正解的存在性和唯一性.

1 预备知识

定义 1[14] $[a]_q=\dfrac{1-q^a}{1-q}$, $a\in\mathbf{R}$, $q\in(0,1)$.

定义 2[14] 幂指函数 $(a-b)^n$ 的 q-类似定义为:

$$(a-b)^{(0)}=1,\ (a-b)^{(n)}=a^n\prod_{k=0}^{n-1}(a-bq^k),\ n\in\mathbf{N},\ a,b\in\mathbf{R};$$

$$(a-b)^{(\alpha)}=a^\alpha\prod_{n=0}^{\infty}\frac{a-bq^n}{a-bq^{\alpha+n}},\ \alpha\in\mathbf{R},\text{特别地},b=0\text{ 时 }a^{(\alpha)}=a^\alpha.$$

定义 3[14] 函数 $f(x)$ 的 q-导数定义为:$(D_qf)(x)=\dfrac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}$, $(D_qf)(0)=\lim\limits_{x\to0}(D_qf)(x)$. 函数 f 的高阶 q-导数定义为:$(D_q^0f)(x)=f(x)$, $(D_q^nf)(x)=D_q(D_q^{n-1}f)(x)$, $n\in\mathbf{N}$.

定义 4[14] q-Γ 函数定义为 $\Gamma_q(x)=\dfrac{(1-q)^{(x-1)}}{(1-q)^{x-1}}$, $x\in\mathbf{R}\backslash\{0,-1,-2,\cdots\}$. 易知 $\Gamma_q(x+1)=[x]_q\Gamma_q(x)$.

定义 5[14] Riemann-Liouville 型分数阶 q-积分定义为:

$$(I_q^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^x(x-qt)^{(\alpha-1)}f(t)\mathrm{d}_qt,\ \alpha>0,\ x\in[0,1],$$

Riemann-Liouville 型分数阶 q-导数定义为:$(D_q^\alpha f)(x)=(D_q^mI_q^{m-\alpha}f)(x)$, $\alpha>0$, $x\in[0,1]$. 其中 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数,规定 $(I_q^0f)(x)=f(x)$, m 是不小于 α 的最小整数.

定义 6[15] 称函数 φ 为变距离函数,若函数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足:(i) 是连续函数,并且是递增的;(ii) $\varphi(t)=0$,当且仅当 $t=0$.

性质 1[14] 若 $\alpha>0$, $a\leqslant b\leqslant t$,则 $(t-a)^{(\alpha)}\geqslant(t-b)^{(\alpha)}$.

性质 2[14] $[a(t-s)]^{(\alpha)}=a^\alpha(t-s)^{(\alpha)}$, ${}_tD_q(t-s)^{(\alpha)}=[\alpha]_q(t-s)^{(\alpha-1)}$, $\left({}_xD_q\int_0^xf(x,t)\mathrm{d}_qt\right)(x)=\int_0^x{}_xD_qf(x,t)\mathrm{d}_qt+f(qx,x)$,其中 ${}_iD_q$ 表示与变量 i 有关的 q-导数.

引理 1[14] 设 $\alpha>0$, p 是正整数,则

$$(I_q^\alpha D_q^pf)(x)=(D_q^pI_q^\alpha f)(x)-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^{\alpha-p+k}}{\Gamma_q(\alpha+k-p+1)}(D_q^kf)(0).$$

引理 2[14] 设 $\alpha,\beta\geqslant0$, $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数,则:(i) $(I_q^\beta I_q^\alpha f)(x)=(I_q^{\alpha+\beta}f)(x)$; (ii) $(D_q^\alpha I_q^\alpha f)(x)=f(x)$.

引理 3[14] 设 $\alpha\in\mathbf{R}^+$, $\lambda\in(-1,+\infty)$,则 $I_q^\alpha((x-a)^{(\lambda)})=\dfrac{\Gamma_q(\lambda+1)}{\Gamma_q(\alpha+\lambda+1)}(x-a)^{(\alpha+\lambda)}$, $0<a<x<b$.

引理 4[15] 设 $(X,\leqslant)$ 是一个偏序集,并假设存在 X 上的一个度量 d,使得 (X,d) 是一个完备度量空间.假设下列条件成立:

(i) 如果 $\{x_n\}$ 是 X 中单调递增的序列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$,那么 $x_n\leqslant x\ (n\in\mathbf{N})$;

(ii) 对 $x,y\in X$ 存在 $z\in X$,使得 z 与 x,y 是可比较的;

(iii) $F:X\to X$ 是递增映射,对于任意 $x,y\in X$,且 $x\geqslant y$,满足

$$\psi(d(F(x),F(y)))\leqslant\psi(d(x,y))-\varphi(d(x,y)),\tag{2}$$

这里 ψ,φ 是变距离函数；

(iv) 存在 $x_0\in X$，使得 $x_0\leqslant F(x_0)$.

那么 F 在 X 内存在唯一的不动点.

引理 5[16]　设 $\alpha\in\mathbf{R}^+$，函数 $f:(0,a]\to\mathbf{C}$，如果 $f\in L_q^1[0,a]$，那么有 $I_q^\alpha f\in L_q^1[0,a]$，且 $\|I_q^\alpha f\|_1\leqslant\dfrac{a^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+1)}\|f\|_1$. 其中 $L_q^1[0,a]\ (a>0)$ 表示由所有定义在 $[0,a]$ 上使 $\|f\|_1=\int_0^a|f(t)|\mathrm{d}_qt<\infty$ 成立的全体函数 $f(x)$ 构成的 Banach 空间.

2　Green 函数及其性质

定理 1　设 $1<\alpha<2$，$0<v<1$，$\alpha-v>1$，$0<\eta<1$，$0\leqslant\beta<1$，若 $h\in C[0,1]$，则分数阶 q-差分方程

$$\begin{cases}(D_q^\alpha u)(x)=-h(x),\ 0<x<1;\\ u(0)=0,\ (D_q^v u)(1)=\beta(D_q^v u)(\eta)\end{cases}\tag{3}$$

有唯一解：

$$u(x)=\int_0^1 G(x,qs)h(s)\mathrm{d}_qs+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1 H(\eta,qs)h(s)\mathrm{d}_qs.\tag{4}$$

其中

$$G(x,s)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\begin{cases}(1-s)^{(\alpha-v-1)}x^{\alpha-1}-(x-s)^{(\alpha-1)},\ 0\leqslant s\leqslant x\leqslant 1;\\ (1-s)^{(\alpha-v-1)}x^{\alpha-1},\ 0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1;\end{cases}$$

$$H(x,qs)={}_xD_q^vG(x,qs)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha-v)}\begin{cases}(1-qs)^{(\alpha-v-1)}x^{\alpha-v-1}-(x-qs)^{(\alpha-v-1)},\ 0\leqslant s\leqslant x\leqslant 1;\\ (1-qs)^{(\alpha-v-1)}x^{\alpha-v-1},\ 0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

证明　假设 $u(x)$ 是问题(3) 的解，则由引理 1 有

$$u(x)=c_1x^{\alpha-1}+c_2x^{\alpha-2}-I_q^\alpha h(x),\ c_1,c_2\in\mathbf{R}.\tag{5}$$

由边值条件 $u(0)=0$ 解得 $c_2=0$. 根据定义 5、引理 2 和引理 3 有

$$(D_q^v u)(x)=\frac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(\alpha-v)}c_1x^{\alpha-v-1}-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha-v)}\int_0^x(x-qs)^{(\alpha-v-1)}h(s)\mathrm{d}_qs.$$

由边值条件 $(D_q^v u)(1)=\beta(D_q^v u)(\eta)$，解得

$$c_1=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\Big[\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}h(s)\mathrm{d}_qs-\beta\int_0^\eta(\eta-qs)^{(\alpha-v-1)}h(s)\mathrm{d}_qs\Big].\tag{6}$$

从而有

$$\begin{aligned}u(x)={}&-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^x(x-qs)^{(\alpha-1)}h(s)\mathrm{d}_qs+\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\Big[\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}h(s)\mathrm{d}_qs-\\&\beta\int_0^\eta(\eta-qs)^{(\alpha-v-1)}h(s)\mathrm{d}_qs\Big]=-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^x(x-qs)^{(\alpha-1)}h(s)\mathrm{d}_qs-\frac{\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\cdot\\&\int_0^\eta(\eta-qs)^{(\alpha-v-1)}h(s)\mathrm{d}_qs+\Big[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{\beta\eta^{\alpha-v-1}x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\Big]\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}h(s)\mathrm{d}_qs=\\&\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^x\big[(1-qs)^{(\alpha-v-1)}x^{\alpha-1}-(x-qs)^{(\alpha-1)}\big]h(s)\mathrm{d}_qs+\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_x^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}x^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}_qs+\\&\frac{\beta\eta^{\alpha-v-1}x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-v-1}h(s)\mathrm{d}_qs-\frac{\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^\eta(\eta-qs)^{(\alpha-v-1)}h(s)\mathrm{d}_qs=\\&\int_0^1G(x,qs)h(s)\mathrm{d}_qs+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1H(\eta,qs)h(s)\mathrm{d}_qs.\end{aligned}$$

定理2 Green 函数 $G(x,s)$ 具有下面的性质:

(i) $G(x,s)$ 是连续函数,且 $G(x,qs)\geqslant 0$, $x,s\in[0,1]$;

(ii) $G(x,qs)\leqslant G(qs,qs)$, $x,s\in[0,1]$.

证明 设 $h_1(x,qs)=(1-qs)^{(\alpha-v-1)}x^{\alpha-1}-(x-qs)^{(\alpha-1)}$, $0\leqslant qs\leqslant x\leqslant 1$; $h_2(x,qs)=(1-qs)^{(\alpha-v-1)}x^{\alpha-1}$, $0\leqslant x\leqslant qs\leqslant 1$.

i) 由 $G(x,s)$ 的表达式知其连续,$h_2(x,qs)\geqslant 0$ 显然成立.下面证明 $h_1(x,qs)\geqslant 0$.由前述性质1和性质2有 $h_1(x,qs)=(1-qs)^{(\alpha-v-1)}x^{\alpha-1}-(1-\frac{qs}{x})^{\alpha-1}x^{\alpha-1}\geqslant x^{\alpha-1}[(1-qs)^{(\alpha-v-1)}-(1-qs)^{(\alpha-1)}]$,由于 $\alpha-v>1$,则 $(1-qs)^{(\alpha-v-1)}-(1-qs)^{(\alpha-1)}=\prod\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1-qsq^n}{1-qsq^{n+\alpha-v-1}}-\prod\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1-qsq^n}{1-qsq^{n+\alpha-1}}\geqslant 0$,故 $h_1(x,qs)\geqslant 0$.因此有 $G(x,qs)\geqslant 0$.

ii) 利用前述性质2,类似i)的证明有 ${}_xD_qh_1(x,qs)=[\alpha-1]_qx^{\alpha-2}[(1-qs)^{(\alpha-v-1)}-(1-\frac{qs}{x})^{(\alpha-2)}]\leqslant x^{\alpha-2}[\alpha-1]_q[(1-qs)^{(\alpha-v-1)}-(1-qs)^{(\alpha-2)}]\leqslant 0$.因此对于 $\forall s\in[0,1]$, $h_1(x,qs)$ 在区间 $0\leqslant qs\leqslant x\leqslant 1$ 上关于 x 单调递减,故有 $h_1(x,qs)\leqslant h_1(qs,qs)$, $x,s\in[0,1]$.同理,易证 $h_2(x,qs)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant qs\leqslant 1$ 上关于 x 单调递增.于是对于 $\forall x,s\in[0,1]$ 有 $G(x,qs)\leqslant G(qs,qs)$.

注1 根据定理2易知 $H(x,qs)\geqslant 0$.

注2 如果定理1中 $h(x)\geqslant 0$, $x\in(0,1]$,那么方程(2)的解 $u(x)\geqslant 0$.

注3 求方程(1)的解,等价于求方程 $u(x)=\int_0^1 G(x,qs)f(s,u(s))\mathrm{d}_qs+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\cdot\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,u(s))\mathrm{d}_qs$ 的解.

3 主要结果及其证明

首先利用完备的度量空间上的不动点定理证明方程(1)唯一正解的存在性.记 Banach 空间 $B=C[0,1]$,赋范数 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|u(x)|$,并定义 B 中的度量为 $d(u,v)=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|u(x)-v(x)|\}$,则 (B,d) 是一个完备度量空间.在 B 上定义序关系"$\leqslant$"如下:对于 $u,v\in C[0,1]$, $u\leqslant v\Leftrightarrow u(x)\leqslant v(x)$, $x\in[0,1]$.因对于 $u,v\in C[0,1]$,有函数 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{u,v\}\in C[0,1]$,因此 $(B,\leqslant)$ 满足引理4中的条件.

定理3 假设如下条件(H_1)和(H_2)成立,则方程(1)存在唯一正解 $u(x)$:

(H_1) 函数 $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续函数,并且 f 关于第2个变量是递增的,同时满足 $f(x,u(x))\neq 0$, $x\in(0,1)$;

(H_2) 存在正数 λ 满足 $\lambda<(M+N)^{-1}$,并且对于 $u,v\in[0,+\infty)$,当 $u\geqslant v$ 时,有 $0\leqslant f(x,u)-f(x,v)\leqslant\lambda\ln(u-v+1)$, $x\in[0,1]$,这里 $M=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 G(x,qs)\mathrm{d}_qs>0$, $N=\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\cdot\int_0^1 H(\eta,qs)\mathrm{d}_qs>0$.

证明 在 $B=C[0,1]$ 上定义锥 $P=\{u\in B:u(x)\geqslant 0\}$,由于 P 是 B 的闭子集,因此 (P,d) 是一个完备度量空间.定义算子 $T:P\to B$ 如下:

$$(Tu)(x)=\int_0^1 G(x,qs)f(s,u(s))\mathrm{d}_qs+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,u(s))\mathrm{d}_qs,$$

由定理2和条件(H_1)可知 $T(P)\subset P$.

首先证明引理4中的所有条件都成立.事实上,对于 $u,v\in P$ 且 $u\geqslant v$ 有

$$(Tu)(x)=\int_0^1 G(x,qs)f(s,u(s))\mathrm{d}_qs+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,u(s))\mathrm{d}_qs\geqslant$$
$$\int_0^1 G(x,qs)f(s,v(s))\mathrm{d}_qs+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,v(s))\mathrm{d}_qs=(Tv)(x),$$

故有算子 T 是一个递增算子. 此外，由条件(H_2)，对于 $u,v\in P$ 且 $u\geqslant v$ 有

$$d(Tu,Tv)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|(Tu)(x)-(Tv)(x)|=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}((Tu)(x)-(Tv)(x))=$$
$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left[\int_0^1 G(x,qs)(f(s,u(s))-f(s,v(s)))\mathrm{d}_qs+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1 H(\eta,qs)(f(s,u(s))-\right.$$
$$\left.f(s,v(s)))\mathrm{d}_qs\right]\leqslant\int_0^1 G(qs,qs)\lambda\ln(u(s)-v(s)+1)\mathrm{d}_qs+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1 H(\eta,qs)\lambda\cdot$$
$$\ln(u(s)-v(s)+1)\mathrm{d}_qs\leqslant\lambda\ln(\|u-v\|+1)\left[\int_0^1 G(qs,qs)\mathrm{d}_qs+\right.$$
$$\left.\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1 H(\eta,qs)\mathrm{d}_qs\right]=\lambda\ln(\|u-v\|+1)(M+N)\leqslant$$
$$\|u-v\|-[\|u-v\|-\ln(\|u-v\|+1)]=d(u,v)-[d(u,v)-\ln(d(u,v)+1)].$$

取 $\psi(x)=x$，$\varphi(x)=x-\ln(x+1)$，显然 ψ,φ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上是变距离函数，因此对于 $u\geqslant v$，有 $\psi(d(Tu,Tv))\leqslant\psi(d(u,v))-\varphi(d(u,v))$. 又 $G(x,qs)\geqslant 0$，$f\geqslant 0$，$(T0)(x)=\int_0^1 G(x,qs)f(s,0)\mathrm{d}_qs+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,0)\mathrm{d}_qs\geqslant 0$，由引理 4 和定理 1 可知算子 T 存在唯一非负解.

其次证明零函数不是算子 T 的不动点. 事实上，假设零函数是算子 T 的不动点，则对于 $x\in[0,1]$ 有

$$\int_0^1 G(x,qs)f(s,0)\mathrm{d}_qs+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,0)\mathrm{d}_qs=0.$$

由于 $G(x,qs)\geqslant 0$，$H(\eta,qs)>0$，$f(x,u(x))\geqslant 0$，则 $G(x,qs)f(s,0)=0$，$H(\eta,qs)f(s,0)=0$. 因当 $x\neq 0,1$ 时，有 $G(x,qs)>0$，故有 $f(s,0)=0$，这与 $f(x,u(x))\neq 0$，$x\in(0,1)$ 矛盾，所以零函数不是 T 的不动点.

最后，在 $f(x,u(x))\neq 0$，$x\in(0,1)$ 的假设下，证明方程(1) 的解 $u(x)>0$，$x\in(0,1)$. 事实上，假设存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $u(x_0)=0$，由式(4) 有

$$u(x_0)=\int_0^1\left[G(x_0,qs)+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x_0^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}H(\eta,qs)\right]f(s,u(s))\mathrm{d}_qs=0.$$

由于 $G(x_0,qs)>0$，$H(\eta,qs)>0$，$f(x,u(x))\geqslant 0$，因此 $G(x_0,qs)+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x_0^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}H(\eta,qs)>0$，故有 $f(s,u(s))=0$，这与 $f(x,u(x))\neq 0$，$x\in(0,1)$ 矛盾. 因此，对于 $x\in(0,1)$，有 $u(x)>0$，即方程(1) 存在唯一的正解. 证毕.

下面利用 Banach 空间上 Schauder 不动点定理和 Banach 压缩映像原理，在 $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续的假设下，证明方程(1) 解的存在性和唯一性. 定义算子 $T_1:B\to B$ 如下：

$$(T_1u)(x)=\int_0^1 G(x,qs)f(s,u(s))\mathrm{d}_qs+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,u(s))\mathrm{d}_qs=$$
$$c_1x^{\alpha-1}-I_q^{\alpha}f(x,u(x)),$$

这里 c_1 如式(6) 所示，显然 T_1 的不动点是方程(1) 的解.

定理 4　假设 $f(x,u)$ 满足如下条件(H_3)，则方程(1) 至少有一个非负解：

(H_3) $\|f\|\leqslant\Gamma_q(\alpha+1)(\frac{r}{2}-c_1)$，其中 $r>0$，且满足 $r>2c_1$.

证明 定义算子 $T_1: B \to B$,有

$$(T_1 u)(x)=\int_0^1 G(x,qs)f(s,u(s))\mathrm{d}_q s+\frac{\Gamma_q(\alpha-v)\beta x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,u(s))\mathrm{d}_q s=$$

$$c_1 x^{\alpha-1}-I_q^\alpha f(x,u(x)),$$

由 $f,G(x,s)$ 的连续性可知,算子 T_1 是连续的.设 $B_r=\{u\in B \mid \|u-I_q^\alpha f(x,u(x))\|\leqslant r\}$ 是Banach空间 B 的有界凸闭子集.

首先证明 T_1 是 B_r 到 B_r 上的映射.事实上,根据条件(H_3)和引理5,对于 $u\in B_r$ 有

$$|T_1 u(x)-I_q^\alpha f(x,u(x))|=|c_1 x^{\alpha-1}-I_q^\alpha f(x,u(x))-I_q^\alpha f(x,u(x))|=$$

$$|c_1 x^{\alpha-1}-2I_q^\alpha f(x,u(x))|\leqslant 2|I_q^\alpha f(x,u(x))|+c_1|x^{\alpha-1}|\leqslant\frac{2\|f\|}{\Gamma_q(\alpha+1)}+c_1\leqslant r,$$

因此,T_1 是 B_r 到 B_r 上的映射.

其次证明 T_1 是完全连续的.设 $A=\max\limits_{x\in[0,1],u\in B_r}|f(x,u(x))|+1$,则对于 $\forall u\in B_r$ 有

$$|T_1 u(x)|=|c_1 x^{\alpha-1}-I_q^\alpha f(x,u(x))|\leqslant\frac{|f(x,u(x))|}{\Gamma_q(\alpha+1)}+c_1\leqslant\frac{A}{\Gamma_q(\alpha+1)}+c_1,$$

因此,$T_1(B_r)$ 是一致有界的.

最后证明 $T_1(B_r)$ 是等度连续的.对于 $u\in B_r$, $x_1,x_2\in[0,1]$,且 $x_1<x_2$ 有

$$|T_1 u(x_1)-T_1 u(x_2)|\leqslant\left|\int_0^{x_2}\frac{(x_2-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}f(s,u(s))\mathrm{d}_q s-\int_0^{x_1}\frac{(x_1-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}f(s,u(s))\mathrm{d}_q s\right|+$$

$$\left|\frac{x_2^{\alpha-1}-x_1^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}f(s,u(s))\mathrm{d}_q s\right|+$$

$$\left|\frac{\beta(x_2^{\alpha-1}-x_1^{\alpha-1})}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^\eta(\eta-qs)^{(\alpha-v-1)}f(s,u(s))\mathrm{d}_q s\right|\leqslant$$

$$\frac{A}{\Gamma_q(\alpha)}\left|\int_0^{x_2}(x_2-qs)^{(\alpha-1)}\mathrm{d}_q s+\int_0^{x_1}(x_1-qs)^{(\alpha-1)}\mathrm{d}_q s\right|+$$

$$\frac{A|x_2^{\alpha-1}-x_1^{\alpha-1}|}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}\mathrm{d}_q s+\frac{A\beta|x_2^{\alpha-1}-x_1^{\alpha-1}|}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^\eta(\eta-qs)^{(\alpha-v-1)}\mathrm{d}_q s\leqslant$$

$$\frac{A|x_2^\alpha-x_1^\alpha|}{\Gamma_q(\alpha+1)}+\frac{A|x_2^{\alpha-1}-x_1^{\alpha-1}|}{[\alpha-v]_q\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}+\frac{A\beta\eta^{\alpha-v}|x_2^{\alpha-1}-x_1^{\alpha-1}|}{[\alpha-v]_q\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\to 0,\ x_1\to x_2,$$

因此,$T_1(B_r)$ 是等度连续的.由 Arzela-Ascoli 定理知 $\overline{T_1(B_r)}$ 是紧的,由此可知 $T_1: B_r\to B_r$ 是全连续的,由 Schauder 不动点定理知方程(1)至少有一个非负解.

定理 5 假设如下条件(H_4)和(H_5)成立,则方程(1)存在唯一解 $u(x)$:

(H_4) 存在非负函数 $\rho\in C[0,1]$,使得对于 $u,v\in[0,+\infty)$, $f(x,u)$ 满足 $|f(x,u)-f(x,v)|\leqslant\rho(x)|u-v|$, $t\in[0,1]$;

(H_5) $K=\dfrac{1}{1-\beta\eta^{\alpha-v-1}}\displaystyle\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}s^{\alpha-1}\rho(s)\mathrm{d}_q s<\dfrac{\Gamma_q(\alpha)}{2}$.

证明 在条件(H_4)和(H_5)成立的假设下,证明当 $n\to+\infty$ 时,T_1^n 是压缩算子.由式(4)知,对于 $u,v\in B$ 有

$$|T_1 u(x)-T_1 v(x)|\leqslant\left|\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}[f(s,u(s))-f(s,v(s))]\mathrm{d}_q s\right|\leqslant$$

$$\frac{x^{\alpha-1}\|u-v\|}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\left[\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}\rho(s)\mathrm{d}_q s\right]=\frac{L\|u-v\|x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)},$$

这里 $L=\dfrac{1}{1-\beta\eta^{\alpha-v-1}}\displaystyle\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}\rho(s)\mathrm{d}_q s$.由此得

$$
\begin{aligned}
&|(T_1^2)u(x)-(T_1^2)v(x)| = |T_1(T_1u)(x)-T_1(T_1v)(x)| \leqslant \\
&\left|\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}[f(s,T_1u(s))-f(s,T_1v(s))]\mathrm{d}_qs\right| \leqslant \\
&\quad \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}|T_1u(s)-T_1v(s)|\rho(s)\mathrm{d}_qs \leqslant \\
&\quad \frac{x^{\alpha-1}L\|u-v\|}{[\Gamma_q(\alpha)]^2(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}s^{\alpha-1}\rho(s)\mathrm{d}_qs = \frac{KLx^{\alpha-1}}{[\Gamma_q(\alpha)]^2}\|u-v\|,
\end{aligned}
$$

这里 $K=\dfrac{1}{1-\beta\eta^{\alpha-v-1}}\displaystyle\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}s^{\alpha-1}\rho(s)\mathrm{d}_qs$. 依此类推可得

$$
|(T_1^nu)(t)-(T_1^nv)(t)| \leqslant \frac{LK^{n-1}x^{\alpha-1}}{[\Gamma_q(\alpha)]^n}\|u-v\|.
$$

由条件(H_5),可选择充分大的 n,使得 $\dfrac{LK^{n-1}}{[\Gamma_q(\alpha)]^n}=\dfrac{L}{K}\left[\dfrac{K}{\Gamma_q(\alpha)}\right]^n \leqslant \dfrac{L}{K}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \dfrac{1}{4}$,因此 $\|T_2^nu-T_2^nv\| \leqslant \dfrac{1}{4}\|u-v\|$, $n\to+\infty$. 根据 Banach 压缩映像原理,知方程(1)有唯一解.

4　应用举例

例 1　考虑方程

$$
\begin{cases}
(D_{0.5}^{1.5}u)(x) = -\left(\dfrac{1}{10}x^2+\dfrac{1}{3}\right)\ln(2+u(x)),\ 0<x<1; \\
u(0)=0,\ (D_{0.5}^{0.2}u)(1)=\beta(D_{0.5}^{0.2}u)(0.5).
\end{cases} \tag{7}
$$

这里 $\alpha=1.5$, $v=0.2$, $\beta=0.5$, $q=0.5$, $\eta=0.5$, $f(x,u)=\left(\dfrac{1}{10}x^2+\dfrac{1}{3}\right)\ln(2+u(x))$, $\Gamma_q(\alpha)\approx 0.607\,954$,则 $M=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\displaystyle\int_0^1 G(x,qs)\mathrm{d}_qs \leqslant \dfrac{1}{\Gamma_q(\alpha)[\alpha-v]_q}\approx 1.384\,858$, $N\approx 0.947\,048$, $\dfrac{1}{M+N}\approx 0.428\,834$. 另外,对于 $u\geqslant v$, $x\in[0,1]$ 有

$$
\begin{aligned}
&f(x,u)-f(x,v)=\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{3}\right)\ln(2+u)-\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{3}\right)\ln(2+v)=\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{3}\right)\cdot \\
&\quad \ln\left(\frac{2+u}{2+v}\right)=\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{3}\right)\ln\left(1+\frac{u-v}{2+v}\right)\leqslant\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{3}\right)\ln(1+(u-v))\leqslant\frac{13}{30}\ln(1+u-v).
\end{aligned}
$$

故取 $\lambda=\dfrac{13}{30}$,并且 $\dfrac{1}{M+N}>\dfrac{13}{30}=\lambda$,根据定理 3 可知方程(7)有唯一正解.

例 2　考虑方程

$$
\begin{cases}
(D_{0.5}^{1.5}u)(x) = -\dfrac{x}{5(1+x)}(\sin u+2),\ 0<x<1; \\
u(0)=0,\ (D_{0.5}^{0.2}u)(1)=\beta(D_{0.5}^{0.2}u)(0.5).
\end{cases} \tag{8}
$$

这里 $\alpha=1.5$, $\beta=0.5$, $v=0.2$, $q=0.5$, $\eta=0.5$, $f(x,u)=-\dfrac{x}{5(1+x)}(\sin u+2)$, $\Gamma_q(\alpha)\approx 0.607\,954$, $\rho(x)=\dfrac{x}{5(1+x)}$. 下面验证定理 5 中的条件($H_4$)和($H_5$)成立:

$$
|f(x,u)-f(x,v)|=\frac{x}{5(1+x)}|\sin u-\sin v|\leqslant\rho(x)|u-v|,
$$

$$
\begin{aligned}
K&=\frac{1}{1-\beta\eta^{\alpha-v-1}}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}s^{\alpha-1}\rho(s)\mathrm{d}_qs=\frac{1}{1-\beta\eta^{\alpha-v-1}}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}s^{\alpha-1}\ \frac{s}{5(1+s)}\mathrm{d}_qs \leqslant \\
&\quad \frac{1}{5(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}s^{\alpha-1}\mathrm{d}_qs \leqslant \frac{1}{5(1-\beta\eta^{\alpha-v-1})}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-v-1)}\mathrm{d}_qs \approx
\end{aligned}
$$

$$0.283\,538 < \frac{\Gamma_q(\alpha)}{2}.$$

显然,对于 $\forall n \geqslant 2$ 有 $\frac{LK^{n-1}}{[\Gamma_q(\alpha)]^n} \leqslant \frac{0.283\,538}{0.607\,954 \times 2^{n-1}} < 0.233\,19 < \frac{1}{4}$,因此由定理 5 可知问题(8)有唯一解.

参考文献:

[1] Page D N. Information in black hole radiation[J]. Phys Rev Lett, 1993,71(23):3743-3746.

[2] Youm D. q-Deformed conformal quantum mechanics[J]. Phys Rev D, 2000,62(9):095009.

[3] Jackson F H. On q-definite integrals, Quart[J]. J Pure Appl Math, 1910,41:193-203.

[4] Jackson F H. q-Difference equations Amer[J]. J Math, 1910,32(4):305-314.

[5] Al-Salam W A. Some fractional q-integrals and q-derivatives[J]. Proc Edinb Math Soc, 1996,15(2):135-140.

[6] Agarwal R P. Certain fractional q-integrals and q-derivatives[J]. Proc Cambridge Philos Soc, 1996,66:365-370.

[7] Neamaty A, Yadollahzadeh M, Darzi R. Existence of solution for a nonlocal boundary value problem with fractional q-derivatives[J]. Journal of Fractional Calculus and Applications, 2015,6(2):18-27.

[8] Ahmad B, Nieto J J, Alsaedi A, et al. Existence of solutions for nonlinear fractional q-difference integral equations with two fractional orders and nonlocal four-point boundary conditions[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351:2890-2909.

[9] Yang Wengui. Anti-periodic boundary value problems involving nonlinear fractional q-difference equations[J]. Malaya Journal of Matematik, 2013,4(1):107-114.

[10] Ahmad B, Ntouyas S, Purnaras I. Existence results for nonlocal boundary value problems of nonlinear fractional q-difference equations[J]. Adv Differ Equ, 2012,140:1-15.

[11] El-Shahed M, Hassan H A. Positive solutions of q-difference equation[J]. Proc Amer Math Soc, 2010,138:1733-1738.

[12] Li Xinhui, Han Zhenlai, Sun Shurong, et al. Boundary value problems for fractional q-difference equations with nonlocal conditions[J]. Adv Differ Equ, 2014(2014):1-16.

[13] Wang Jufang, Yu Changlong, Gao Yanping. Positive solutions for a class of singular boundary value problems with fractional q-difference equations[J]. Journal of Function Spaces, 2015,2015:1-8.

[14] 孙明哲,韩筱爽.一类分数阶 q-差分边值问题的正解[J].延边大学学报版(自然科学版),2013,39(4):252-255.

[15] Harjani J, Sadarangani K. Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 2010,72:1188-1197.

[16] Annaby M H, Mansour Z S. q-Fractional Calculus and Equations[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012.

[17] Ricardo Almeida, Natália Martins. Existence results for fractional q-difference equations of order with three-point boundary conditions[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014,19(6):1675-1685.