文章编号: 1004-4353(2015)03-0196-03

一类一维临界非线性薛定谔方程组解的渐近行为

石仁淑
(延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 讨论了一类一维临界非线性薛定谔方程组解的渐近行为. 在粒子质量满足一定关系的条件下, 通过运用所研究非线性薛定谔方程组解的衰减估计, 得出了此类方程组渐近自由解的非存在性.

关键词: 临界非线性薛定谔方程组; 渐近自由; 时间衰减估计
中图分类号: O175.29　　**文献标识码:** A

The asymptotic behavior of solutions to a system of one-dimensional critical NLS equations

SHI Renshu
(*Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*)

Abstract: This paper concerns the asymptotic behavior of the system of time dependent Schrödinger equations with critical nonlinearities in one space dimension. Under some mass conditions, we show that there does not exist any asymptotic free solutions to the system by using the time decay estimates of nonlinear solutions.

Key words: a system of critical nonlinear Schrödinger equations; asymptoti-cally free; time decay estimates

本文讨论如下非线性薛定谔方程组

$$\begin{cases} i\,\partial_t w_1 + \dfrac{1}{2m_1}\Delta w_1 = \alpha_1 |w_1|^2 w_1 + \beta_1 \overline{w}_1^2 w_2, \\ i\,\partial_t w_2 + \dfrac{1}{2m_2}\Delta w_2 = \alpha_2 |w_2|^2 w_2 + \beta_2 w_1^3, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $w_j(0,x)=\psi_j(x)$, $(t,x)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $\partial_t=\partial/\partial t$, Δ 是拉普拉斯算子, m_j 为粒子的质量, $\alpha_j,\beta_j\in\mathbf{C}$, $j=1,2$, w_j 为未知复值函数.

薛定谔方程被广泛应用于非线性光学、凝聚态物理、激光聚变等领域. 非线性薛定谔方程组(1) 源于物理问题[1-2]. 在方程组(1) 中, 若 $\beta_1=\beta_2=0$, 则方程组(1) 演变为 2 个独立的薛定谔方程. 由文献[3-4] 知, 当 $p=1+\dfrac{2}{n}$ 时, 非线性薛定谔方程

$$i\,\partial_t w + \frac{1}{2}\Delta w = \lambda |w|^{p-1} w, \tag{2}$$

的非线性项为临界的(在方程(2) 中 $(t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$, $p>1$ 且 $\lambda\in\mathbf{C}$). 临界非线性薛定谔方程是非线性色散方程的一个重要研究课题. 在 $\lambda\in\mathbf{R}$ 或 $\mathrm{Im}\lambda<0$ 的条件下, $p=1+\dfrac{2}{n}$ 且 $n=1,2,3$ 时, 文献[5-6] 对方程(2) 的 Cauchy 问题进行了讨论. 文献[7] 的作者研究了 2 维类似薛定谔方程组的 Cauchy 问题. 本文

收稿日期: 2015－07－12
作者简介: 石仁淑(1960—), 女, 副教授, 研究方向为微分方程.

对一维临界薛定谔方程组(1) 渐近自由解的非存在性进行研究.

1　定理及其证明

首先定义 f 的 Fourier 变换如下：

$$\mathscr{F}[f](x)=\hat{f}(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}f(\xi)\mathrm{d}\xi,\ x\in\mathbf{R}.$$

对 $m,s\in\mathbf{R}$, Sobolev 空间 $\mathbf{H}^{m,s}(\mathbf{R})$ 满足 $\mathbf{H}^{m,s}(\mathbf{R})=\{f\in\mathbf{L}^2(\mathbf{R}):\|(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}(1-\Delta)^{\frac{m}{2}}f\|_{\mathbf{L}^2}<\infty\}$. 用 C 表示不同的正常数. 由方程组(1) 可以得到相应的自由薛定谔方程组

$$\begin{cases}i\partial_t u_1+\dfrac{1}{2m_1}\Delta u_1=0,\\ i\partial_t u_2+\dfrac{1}{2m_2}\Delta u_2=0,\end{cases}\tag{3}$$

其中 $u_j(0,x)=\phi_j(x)$, $j=1,2$. 若存在方程组(3) 的 $\mathbf{L}^2$-自由解(u_1,u_2)，使得 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}(\|w_1-u_1\|_{\mathbf{L}^2}+\|w_2-u_2\|_{\mathbf{L}^2})=0$，则称非线性薛定谔方程组(1) 的解$(w_1,w_2)$ 是渐近自由的.

将方程组(1) 的各方程两边分别乘以 $\overline{w}_1$ 和 $\overline{w}_2$，取虚部并在 $\mathbf{R}$ 上积分，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w_1\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|w_2\|_{\mathbf{L}^2}^2)=2\sum_{j=1}^{2}\mathrm{Im}\,\alpha_j\|w_j\|_{\mathbf{L}^4}^4+2\,\mathrm{Im}\left(\beta_1\int_{\mathbf{R}}\overline{w}_1^3w_2\mathrm{d}x+\beta_2\int_{\mathbf{R}}w_1^3\overline{w}_2\mathrm{d}x\right).$$

假设 $\mathrm{Im}\,\alpha_j\leqslant0$, $j=1,2$ 且 $\beta_1=\bar{\beta}_2$，则有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w_1\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|w_2\|_{\mathbf{L}^2}^2)\leqslant0$. 应用文献[7] 中的方法，可以得到方程组(1) 的 Cauchy 问题解的存在性和解的 $\mathbf{L}^\infty$-时间衰减估计. 证明略.

性质 1　设 $\mathrm{Im}\alpha_j\leqslant0$, $\beta_1=\bar{\beta}_2$, $3m_1=m_2$, $\psi_i(x)\in\mathbf{H}^{1,1}(\mathbf{R})$, $j=1,2$. 假设对某个 $\varepsilon>0$，有 $\|\psi_1(x)\|_{\mathbf{H}^{1,1}}+\|\psi_2(x)\|_{\mathbf{H}^{1,1}}<\varepsilon$，则存在非线性薛定谔方程组的解 $w=(w_j)_{j=1,2}$，使得 $w\in C([0,\infty);\mathbf{H}^{1,1}(\mathbf{R}))$，且$\|w\|_{\mathbf{L}^\infty}\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}}$.

本文应用性质 1 中方程组(1) 解的衰减估计来证明其渐近自由解的非存在性. 本文的证明是基于对 $H(t)$ 的研究，这里 $H(t)=\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}u_1\overline{w}_1+u_2\overline{w}_2\mathrm{d}x$. 通过对$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)$ 的研究，由反证法得到方程组(1) 的渐近自由解的非存在性.

定理 1　设 $3m_1=m_2$, $\mathrm{Re}\alpha_j>0$, $\mathrm{Im}\,\alpha_j\leqslant0$, $\beta_1=\bar{\beta}_2$, $j=1,2$. 若一维临界非线性薛定谔方程组(1) 的解 $w\in C([0,\infty);\mathbf{H}^{1,1}(\mathbf{R}))$ 满足衰减估计$\|w\|_{\mathbf{L}^\infty}\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}}$，则不存在方程组(2) 的自由解$(u_1,u_2)$ 使得 $\phi=(\phi_1(x),\phi_2(x))\neq(0,0)$, $\phi\in\mathbf{H}^{1,1}(\mathbf{R})$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}(\|w_1(t)-u_1(t)\|_{\mathbf{L}^2}+\|w_2(t)-u_2(t)\|_{\mathbf{L}^2})=0$.

在证明定理 1 之前，首先引入一个引理，它给出了相应自由方程组(2) 解的衰减估计，其证明过程可参考文献[3].

引理 1　设(u_1,u_2) 为方程组(2) 的一个光滑解. 若 $\phi_j\in\mathbf{L}^1(\mathbf{R})\cap\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, $j=1,2$，则存在正常数 C_j 使得$\|u_j\|_{\mathbf{L}^q}\geqslant C_jt^{-(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}$，其中 $q\geqslant2$.

定理 1 的证明　假设存在方程组(2) 的解(u_1,u_2)，使得

$$\lim_{t\to\infty}(\|w_1-u_1\|_{\mathbf{L}^2}+\|w_2-u_2\|_{\mathbf{L}^2})=0.\tag{4}$$

令 $H(t)=\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}u_1\overline{w}_1+u_2\overline{w}_2\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}u_1(\overline{w}_1-\bar{u}_1)+u_2(\overline{w}_2-\bar{u}_2)\mathrm{d}x$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)=\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}(\partial_tu_1)\overline{w}_1+u_1(\partial_t\overline{w}_1)+(\partial_tu_2)\overline{w}_2+u_2(\partial_t\overline{w}_2)\mathrm{d}x.$$

由方程组(1) 和(2) 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)=\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\bar{\alpha}_1u_1|w_1|^2\overline{w}_1+\bar{\beta}_1u_1w_1^2\overline{w}_2+\bar{\alpha}_2u_2|w_2|^2\overline{w}_2+\bar{\beta}_2u_2\overline{w}_1^3\mathrm{d}x=$$

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\bar{\alpha}_1|u_1|^4+\bar{\alpha}_2|u_2|^4\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\bar{\alpha}_1u_1|w_1|^2\overline{w}_1-\bar{\alpha}_1|u_1|^4\mathrm{d}x+$$

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\bar{\alpha}_2u_2|w_2|^2\overline{w}_2-\bar{\alpha}_2|u_2|^4\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\bar{\beta}_1u_1w_1^2\overline{w}_2+\bar{\beta}_2u_2\overline{w}_1^3\mathrm{d}x.$$

因为 $\mathrm{Re}\,\alpha_j>0$，$j=1,2$，于是由引理 1 可得

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\bar{\alpha}_1|u_1|^4+\bar{\alpha}_2|u_2|^4\mathrm{d}x\geqslant Ct^{-1}.\tag{5}$$

下面考虑 $\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\bar{\alpha}_1u_1|w_1|^2\overline{w}_1-\bar{\alpha}_1|u_1|^4\mathrm{d}x$. 由于

$$\left|\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\bar{\alpha}_1u_1|w_1|^2\overline{w}_1-\bar{\alpha}_1|u_1|^4\mathrm{d}x\right|\leqslant C\int_{\mathbf{R}}|u_1|\,||\overline{w}_1|^2\overline{w}_1-\bar{u}_1|\bar{u}_1|^2|\mathrm{d}x,$$

利用 Hölder 不等式，有

$$\left|\int_{\mathbf{R}}|u_1|\,||\overline{w}_1|^2\overline{w}_1-\bar{u}_1|\bar{u}_1|^2|\mathrm{d}x\right|\leqslant C\|w_1-u_1\|_{\mathbf{L}^2}(\|w_1\|_{\mathbf{L}^\infty}+\|u_1\|_{\mathbf{L}^\infty})\|u_1\|_{\mathbf{L}^4}^2+$$

$$C\|w_1-u_1\|_{\mathbf{L}^2}\cdot\|u_1\|_{\mathbf{L}^2}\cdot\|w_1\|_{\mathbf{L}^\infty}^2.$$

由定理 1 的假设，及不等式 $\|u_j\|_{\mathbf{L}^q}\leqslant Ct^{-\frac{q-2}{2q}}$，$j=1,2$，$q\geqslant 2$，有 $\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\bar{\alpha}_1u_1|w_1|^2\overline{w}_1-\bar{\alpha}_1|u_1|^4\mathrm{d}x=o(t^{-1})$，$t\to 0$. 利用同样的方法有 $\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\bar{\alpha}_2u_2|w_2|^2\overline{w}_2-\bar{\alpha}_2|u_2|^4\mathrm{d}x=o(t^{-1})$，$t\to 0$，且 $\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}\bar{\beta}_1u_1w_1^2\overline{w}_2+\bar{\beta}_2u_2\overline{w}_1^3\mathrm{d}x=o(t^{-1})$，$t\to 0$. 综合上面的结果，对 $t\geqslant T$（假设 $T\geqslant 1$）有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)\geqslant Ct^{-1}$. 对 t 积分得

$$H(5T)-H(T)\geqslant C\int_T^{5T}t^{-1}\mathrm{d}t=C\ln 5>0.\tag{6}$$

另外，由 $H(t)$ 的定义知 $H(t)=\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}u_1(\overline{w}_1-\bar{u}_1)+u_2(\overline{w}_2-\bar{u}_2)\mathrm{d}x$. 利用 Schwartz 不等式，有 $|H(t)|\leqslant\|u_1\|_{\mathbf{L}^2}\|w_1-u_1\|_{\mathbf{L}^2}+\|u_2\|_{\mathbf{L}^2}\|w_2-u_2\|_{\mathbf{L}^2}$. 由此知 $\lim\limits_{t\to\infty}|H(t)|=0$，这与式(6) 相矛盾，故此定理得证.

参考文献：

[1] Akhmediev N, Ankiewicz A. Partially coherent solitons on a finite background[J]. Phys Rev Lett, 1999,82:2661-2664.

[2] Colin M, Colin T. On a quasilinear Zakharov system describing laser-plasma interactions[J]. Differential Integral Equations, 2004,17:297-330.

[3] Barab J E. Nonexistence of asymptotically free solutions for a nonlinear Schrödinger equation[J]. J Math Phys, 1984,25:3270-3273.

[4] Tsutsumi Y, Yajima K. The asymptotic behavior of nonlinear Schrödinger equations[J]. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 1984,11:186-188.

[5] Hayashi N, Naumkin P I. Asymptotics in large time of solutions to nonlinear Schrödinger and Hartree equations [J]. Amer J Math, 1998,120:369-389.

[6] Shimomura A. Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities[J]. Communications in Partial Differential Equations, 2006,31:1407-1423.

[7] Hayashi N, Li C, Naumkin P I. On a system of nonlinear Schrödinger equations in 2d[J]. Differential Integral Equations, 2011,24:417-434.