文章编号: 1004-4353(2015)03-0189-07

一类二阶 q-对称差分方程两点边值问题解的存在性

徐佳宁， 龚学， 吴凡， 侯成敏*
(延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要: 研究了一类二阶 q-对称差分方程两点边值问题解的存在性. 首先，利用 Bananch 空间压缩映像原理获得了解的存在唯一性结果；其次，在一定的边界条件下，通过假设非线性项具有超线性和次线性性，建立了该问题存在正解的充分性条件.

关键词: q-对称差分方程；边值问题；不动点；超线性和次线性
中图分类号: O175　　　　**文献标识码:** A

Existence of solutions for a class of q-symmetric difference equation two points boundary value problem

XU Jianing, GONG Xue, WU Fan, HOU Chengmin*
(*Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We considered the existence of solutions for a class of the two points boundary value problem of q-symmetric difference equation. First, we obtained the existence and uniqueness of solutions by using the generalized Banach contraction principle. Then under some boundary value conditions, sufficient conditions of existence of positive solutions are established in both the superlinear and sublinear cases.

Key words: q-symmetric difference equation; boundary value problem; fixed point; superlinear and sublinear

0 引言

2010 年，M. El-Shabed 等[1]研究了二阶差分方程边值问题：

$$-u''=a(t)f(u(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1;\tag{1}$$

$$\begin{cases}\alpha u(0)-\beta u'(0)=0,\\ \gamma u(1)+\delta u'(1)=0.\end{cases}\tag{2}$$

其中函数 f,a 以及式(2)中的常系数满足一定的条件. 在超线性和次线性的情况下，M. El-Shabed等建立了问题(1)—(2)正解的存在性条件. 2013 年，Yang Wengui[2]研究了如下q-差分方程的边值问题：

$$-D_q^2u(t)=a(t)f(u(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1;$$

$$\begin{cases}\alpha u(0)-\beta D_qu(0)=0,\\ \gamma u(1)+\delta D_qu(1)=0,\end{cases}$$

利用压缩映射原理及锥的伸拉缩定理获得了其正解的存在性. 受上述工作启发，本文考虑如下二阶

收稿日期: 2015-06-07
* **通信作者:** 侯成敏(1963—)，女，教授，研究方向为微分方程与离散动力系统.

q-对称差分方程的边值问题:

$$-\widetilde{D}_q^2u(t)=f(t,u(t)),\ a\leqslant t\leqslant b;\tag{3}$$

$$\begin{cases}\alpha u(a)-\beta\widetilde{D}_qu(a)=0,\\ \gamma u(b)+\delta\widetilde{D}_qu(b)=0.\end{cases}\tag{4}$$

其中 $a<0<b$, $\rho=\gamma\beta+\alpha\gamma(b-a)+\delta\alpha>0$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\geqslant 0$, $f(u)$ 是 $[a,b]\times\mathbf{R}$ 上非负的连续函数. 显然,在问题(3)—(4) 中,若 $f(t,u(t))=p(t)g(u(t))$, $a=0$, $b=1$, 则问题(3)—(4) 可化为:

$$-\widetilde{D}_q^2u(t)=p(t)g(u(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1;\tag{5}$$

$$\begin{cases}\alpha u(0)-\beta\widetilde{D}_qu(0)=0,\\ \gamma u(1)+\delta\widetilde{D}_q(1)=0.\end{cases}\tag{6}$$

这里 $p(t)$ 不恒等于0. 为研究问题(5)—(6) 正解的存在性,首先利用不动点定理建立边值问题(3)—(4) 解的存在性条件,然后在问题(5)—(6) 中假设 g 是超线性的或者是次线性的,即如果令 $g_0:=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{g(u)}{u}$, $g_\infty:=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{g(u)}{u}$, 则 $g_0=0$, $g_\infty=\infty$ 或者 $g_0=\infty$, $g_\infty=0$. 近年来,q-量子微积分[3-4] 得到了迅速的发展,并取得了大量的研究成果[5-11],然而关于 q-对称差分方程边值问题的研究未见文献报道,因此本文的结果是新的.

1 预备知识

假设 $q\in(0,1)$, 则称 B 是 (q,q^{-1})-几何的,如果对每一个 $x\in B$, 有 $qx, q^{-1}x\in B$.

定义 1 假设 f 是定义在一个 (q,q^{-1})-几何集 B 上的实值或复值函数,则当 $x\neq 0$ 时, f 的 q 对称导数定义为: $(\widetilde{D}_qf)(x)=\dfrac{f(qx)-f(q^{-1}x)}{(q-q^{-1})x}$, $x\neq 0$, 如果 f 在 0 处可微,则 $(\widetilde{D}_qf)(0)=f'(0)$.

定义 2 假设 f 是定义在一个 (q,q^{-1})-几何集 B 上的实值或复值函数,则 f 的 q 对称积分定义为: $\int_0^x f(t)\,\tilde{\mathrm{d}}_qt=x(1-q^2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^{2n}f(q^{2n+1}x)$, $x\in B$, 且有 $\int_a^b f(t)\,\tilde{\mathrm{d}}_qt=\int_0^b f(t)\,\tilde{\mathrm{d}}_qt-\int_0^a f(t)\,\tilde{\mathrm{d}}_q(t)$, $a,b\in B$.

莱布尼兹公式和 q-对称分部积分公式分别为:

$$\int_a^b\widetilde{D}_qf(t)\,\tilde{\mathrm{d}}_qt=f(b)-f(a),$$

$$\int_a^b f(t)\,\widetilde{D}_q[g](t)\,\tilde{\mathrm{d}}_qt=f(qt)g(t)\big|_a^b+\int_a^b g(qt)\,\widetilde{D}_q[f](qt)\,\tilde{\mathrm{d}}_qt.$$

记: $\overline{[a]}_q=\dfrac{1-q^{2a}}{1-q^2}$, $a\in\mathbf{R}$, $\overline{(a-b)}^{(0)}=1$, $\overline{(a-b)}^{(m)}=\prod\limits_{i=0}^{m-1}(a-bq^{2i+1})$, $m\in\mathbf{N}\cup\{\infty\}$, 则

$${}_x\widetilde{D}_q\,\overline{(x-\tau)}^{(m)}=q\,\overline{[m]}_q\,\overline{(q^{-1}x-\tau)}^{(m-1)},\quad {}_\tau\widetilde{D}_q\,\overline{(x-\tau)}^{(m)}=-q\,\overline{[m]}_q\,\overline{(x-q\tau)}^{(m-1)}.$$

引理 1[12] 设 X 是一个巴拿赫空间, $T:X\to X$ 是一个完全连续算子,并且符合 $V=\{u\subset X\mid u=\mu Tu,\ 0<\mu<1\}$ 是有界的,则 T 在 X 中有一个不动点.

引理 2[12] 设 X 是一个巴拿赫空间, Ω 是 X 的有界开子集, $\theta\in\Omega$ 并且 $T:\overline{\Omega}\to X$ 是一个完全连续的算子,满足 $\|Tu\|\leqslant\|u\|$, $\forall u\in\partial\Omega$, 则在 T 中 $\overline{\Omega}$ 有一个不动点.

引理 3 $\int_a^x\int_a^s f(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\,\tilde{\mathrm{d}}_qs=q\int_{q^{-1}a}^x\overline{(x-\tau)}^{(1)}f(q\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau-q\int_{q^{-1}a}^a\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau.$

证明 首先,考虑 $a=0$ 时的情形. 由定义 2,有:

$$\int_0^x\int_0^s f(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\,\tilde{\mathrm{d}}_qs=x(1-q^2)\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}\int_0^{q^{2k+1}x}f(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau=(x(1-q^2))^2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}q^{2k}q^{2m+}f(q^{2m+2k+2}x)=$$

$$(x(1-q^2))^2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}q^{2k}q^{2m+1}f(q^{2m+2}x)=(x(1-q^2))^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}q^{2k}q^{2m+1}f(q^{2m+2}x)=$$

$$(x(1-q^2))^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1-q^{2m+2}}{1-q^2}q^{2m+1}f(q^{2m+2}x)=x(1-q^2)\sum_{m=0}^{\infty}(x-q^{2m+2}x)q^{2m+1}f(q^{2m+2}x)=$$

$$\int_0^{qx}(x-\tau)f(\tau)\tilde{\mathrm{d}}_q\tau=q\int_0^x\overline{(x-\tau)}^{(1)}f(q\tau)\tilde{\mathrm{d}}_q\tau.$$

其次，考虑 $a\neq 0$ 时的情形. 由定义 2，并利用 $a=0$ 时的结论有

$$\int_a^x\int_a^s f(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\tilde{\mathrm{d}}_qs=\int_0^x\int_a^s f(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\tilde{\mathrm{d}}_qs-\int_0^a\int_a^s f(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\tilde{\mathrm{d}}_qs=\int_0^x\int_0^s f(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\tilde{\mathrm{d}}_qs-\int_0^x\int_0^a f(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\tilde{\mathrm{d}}_qs-$$

$$\int_0^a\int_0^s f(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\tilde{\mathrm{d}}_qs+\int_0^a\int_0^a f(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\tilde{\mathrm{d}}_qs=q\int_0^x\overline{(x-\tau)}^{(1)}f(q\tau)\tilde{\mathrm{d}}_q\tau-q\int_0^a\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau)\tilde{\mathrm{d}}_q\tau-$$

$$(x-a)\int_0^a f(\tau)\tilde{\mathrm{d}}_q\tau=q\int_{q^{-1}a}^x\overline{(x-\tau)}^{(1)}f(q\tau)\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+q\int_0^{q^{-1}a}\overline{(x-\tau)}^{(1)}f(q\tau)\tilde{\mathrm{d}}_q\tau-$$

$$q\int_0^a\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau)\tilde{\mathrm{d}}_q\tau-q\int_0^{q^{-1}a}(x-a)f(q\tau)\tilde{\mathrm{d}}_q\tau=$$

$$q\int_{q^{-1}a}^x\overline{(x-\tau)}^{(1)}f(q\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau-q\int_{q^{-1}a}^a\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau.$$

引理 4　假设 K 是巴拿赫空间 X 上的一个锥，Δ_1 和 Δ_2 是巴拿赫空间 X 上两个开集，满足 $0\in\Delta_1$，$\bar{\Delta}_1\subset\Delta_2$，则 A 在 $K\cap(\bar{\Delta}_2\backslash\Delta_1)$ 至少有一个不动点，若定义 $A:K\cap(\bar{\Delta}_2\backslash\Delta_1)\to K$ 是完全连续的，并且满足下列条件之一：

1）$\|Ax\|\leqslant\|x\|,\forall x\in K\cap\partial\Delta_1$ 且 $\|Ax\|\geqslant\|x\|,\forall x\in K\cap\partial\Delta_2$；

2）$\|Ax\|\geqslant\|x\|,\forall x\in K\cap\partial\Delta_1$ 且 $\|Ax\|\leqslant\|x\|,\forall x\in K\cap\partial\Delta_2$.

2　格林函数及存在性定理

引理 5　记 $W_\gamma(t)=\dfrac{\alpha\gamma}{\rho}(t-a)+\dfrac{\beta\gamma}{\rho}$，$\overline{W}_\delta(t)=\dfrac{\alpha\delta t+\beta\delta}{\rho}$. 边值问题(3)—(4) 的任意解为

$$u(t)=\int_{q^{-1}a}^b G(t,\tau)f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\int_{q^{-1}a}^a W_\gamma(t)\,\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$W_\delta(t)\int_a^b f(\tau,u(\tau))\tilde{\mathrm{d}}_q\tau,$$

其中 $G(t,\tau)=\begin{cases}\overline{(b-\tau)}^{(1)}W_\gamma(t)-\overline{(t-\tau)}^{(1)},\ a\leqslant\tau\leqslant t\leqslant b;\\ \overline{(b-\tau)}^{(1)}W_\gamma(t),\ 0\leqslant t<\tau\leqslant b.\end{cases}$

证明　$-\widetilde{D}^2u(t)=f(t,u(t))$，则 $u(t)=C_2+C_1(t-a)-q\displaystyle\int_{q^{-1}a}^t\overline{(t-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$ $q\displaystyle\int_{q^{-1}a}^a\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau$. 由边界条件(4)，有：

$$\alpha C_2-\beta C_1=0,\tag{7}$$

$$\gamma\Big[C_2+C_1(b-a)-q\int_{q^{-1}a}^b\overline{(b-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$q\int_{q^{-1}a}^a\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\delta\Big[C_1-\int_a^b f(\tau,u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\Big]\Big]=0.\tag{8}$$

解方程(7)—(8)，得

$$C_1=[\gamma\alpha q\int_{q^{-1}a}^b\overline{(b-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau-\alpha\gamma q\int_{q^{-1}a}^a\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$\alpha\delta\int_a^b f(\tau,u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau]/[\gamma\beta+\gamma\alpha(b-a)+\alpha\delta],$$

于是有

$$u(t)=\frac{(t-a)}{\rho}[\gamma\alpha q\int_{q^{-1}a}^{b}\overline{(b-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau-\alpha\gamma q\int_{q^{-1}a}^{a}(a-\tau)^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$\alpha\delta\int_a^b f(\tau,u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau]+\frac{\beta}{\alpha\rho}[\gamma\alpha q\int_{q^{-1}a}^{b}\overline{(b-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau-$$

$$\alpha\gamma q\int_{q^{-1}a}^{a}\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\alpha\delta\int_a^b f(\tau,u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau]-$$

$$q\int_{q^{-1}a}^{t}\overline{(t-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+q\int_{q^{-1}a}^{a}\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau=$$

$$-q\int_{q^{-1}a}^{t}\overline{(t-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+q\int_{q^{-1}a}^{a}\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$W_\gamma(t)q\int_{q^{-1}a}^{b}\overline{(b-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau-W_\gamma(t)q\int_{q^{-1}a}^{a}\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$W_\delta(t)\int_a^b f(\tau,u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau=q\int_{q^{-1}a}^{b}G(t,\tau)f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$(1-W_\gamma(t))q\int_{q^{-1}a}^{a}\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+W_\delta(t)\int_a^b f(\tau,u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau,$$

其中 $G(t,\tau)=\begin{cases}\overline{(b-\tau)}^{(1)}W_\gamma(t)-\overline{(t-\tau)}^{(1)},\ a\leqslant\tau\leqslant t\leqslant b;\\ \overline{(b-\tau)}^{(1)}W_\gamma(t),\ 0\leqslant t<\tau\leqslant b.\end{cases}$

推论 1 边值问题(5)—(6) 的解为

$$u(t)=q\int_0^1 G_1(t,\tau)p(q\tau)g(u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(t)\int_0^1 p(\tau)g(u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau,$$

其中 $G_1(t,\tau)=\begin{cases}\overline{(1-\tau)}^{(1)}\overline{W}_\gamma(t)-\overline{(t-\tau)}^{(1)},\ 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant 1;\\ \overline{(1-\tau)}^{(1)}\overline{W}_\gamma(t),\ 0\leqslant t<\tau\leqslant 1.\end{cases}$ (9)

定理 1 假设存在常数 $k>0$,使得 $|f(u)-f\overline{(u)}|\leqslant k|u-\bar{u}|$, $t\in[a,b]$, $u,\bar{u}\in\mathbf{R}$. 如果

$$pk[q(W_\gamma(b)+1)(b-q^{-1}a)(b-qa)(\overline{[2]}_q)^{-1}+$$

$$q(\alpha\gamma+\alpha\delta(b-a))\rho^{-1}a^2(1-q^{-1})(1-q)(\overline{[2]}_q)^{-1}+W_\delta(b)(b-a)]<1,\tag{10}$$

则边值问题(3)—(4) 在$[a,b]$上有唯一解.

证明 将问题(3)—(4) 变换为一个不动点问题,考虑 $F:C([a,b],\mathbf{R})\to C([a,b],\mathbf{R})$.定义

$$(Fu)(t)=q\int_{q^{-1}a}^{b}G(t,\tau)f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$(1-W_\gamma(t))q\int_{q^{-1}a}^{a}\overline{(a-\tau)}^{(1)}f(q\tau,u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+W_\delta(t)\int_a^b f(\tau,u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau,$$

显然算子 F 的不动点是问题(3)—(4) 的解. 假设 $u,z\in C([a,b],\mathbf{R})$,则对每一个 $t\in[a,b]$有

$$|(Fu)(t)-(Fz)(t)|\leqslant\Big|q\int_{q^{-1}a}^{b}G(t,\tau)(f(q\tau,u(q\tau))-f(q\tau,z(q\tau)))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$(1-W_\gamma(t))q\int_{q^{-1}a}^{a}\overline{(a-\tau)}^{(1)}(f(q\tau,u(q\tau))-f(q\tau,z(q\tau)))\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$W_\delta(t)\int_a^b(f(\tau,u(\tau))-f(\tau,z(\tau)))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\Big|\leqslant pk\,\|u-z\|\Big[q\int_{q^{-1}a}^{b}|G(t,\tau)|\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$(1-\frac{\beta\gamma}{\rho})q\int_{q^{-1}a}^{a}\overline{(a-\tau)}^{(1)}\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+W_\delta(b)(b-a)\Big]\leqslant pk\,\|u-z\|\,W_\gamma(b)q[\int_{q^{-1}a}^{b}\overline{(b-\tau)}^{(1)}\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$q\frac{\alpha\gamma+\alpha\delta(b-a)}{\rho}(-\frac{\overline{(a-q^{-1}\tau)}^{(2)}}{\overline{[2]}_q}\Big|_{q^{-1}a}^{a})+W_\delta(b)]=$$

$$pk\,\|u-z\|\,[(W_\gamma(b)+1)q\frac{\overline{(b-q^{-2}a)}^{(2)}}{\overline{[2]}_q}+q\frac{\alpha\gamma+\alpha\delta(b-a)}{\rho}\frac{\overline{a^2(1-q^{-2})}^{(2)}}{\overline{[2]}_q}+W_\delta(b)(b-a)]=$$

$$pk\|u-z\|[(W_\gamma(b)+1)q\frac{(b-q^{-1}a)(b-qa)}{[2]_q}+q\frac{\alpha\gamma+\alpha\delta(b-a)}{\rho}\frac{a^2(1-q^{-1})(1-q)}{[2]_q}+$$

$$W_\delta(b)(b-a)]<1.$$

由条件(10) 知 F 是一个压缩映射,因此存在唯一的不动点,即边值问题(3)—(4) 有唯一解.

定理 2　假设存在一个正常数 M,使得 $|p(t)g(u(t))|\leqslant M$, $t\in[0,1]$,且 $u\in C([0,1],\mathbf{R})$,则问题(5)—(6) 至少有一个解.

证明　由推论 1,定义 $T: C([0,1],\mathbf{R})\to C([0,1],\mathbf{R})$,

$$(Tu)(t)=-q\int_0^t\overline{(t-\tau)}^{(1)}p(q\tau)g(u(q\tau))\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$\overline{W}_\gamma(t)q\int_0^1\overline{(1-\tau)}^{(1)}p(q\tau)g(u(q\tau))\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(t)\int_0^1 p(\tau)g(u(\tau))\tilde{\mathrm{d}}_q\tau.$$

首先,证明 T 算子是完全连续的. 显然,T 算子的连续性依赖于 f 的连续性,另外 $\Omega\subset C([0,1],\mathbf{R})$ 是有界的,则对任意的 $u\in\Omega$ 有 $|p(q\tau)g(u(q\tau))|\leqslant M$,进而有

$$|(Tu)(t)|\leqslant\int_0^t\overline{(t-\tau)}^{(1)}|p(q\tau)g(u(q\tau))|\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\gamma(t)\int_0^1\overline{(1-\tau)}^{(1)}|p(q\tau)g(u(q\tau))|\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$\overline{W}_\delta(t)\int_0^1|p(\tau)g(u(\tau))|\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\leqslant M(\int_0^t\overline{(t-\tau)}^{(1)}\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\gamma(t)\int_0^1\overline{(1-\tau)}^{(1)}\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(t))\leqslant$$

$$M(\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha t+\rho}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}(1-q^{2n+2})(1-q^2)+\overline{W}_\delta(t))\leqslant M(2\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}(1-q^{2n+2})(1-q^2)+1)=M_2.$$

由此证明了 $\|(Tu)(t)\|\leqslant M_2$.

$$|\overline{D}_q(Tu)(t)|\leqslant\int_0^t q|p(q\tau)g(u(q\tau))|\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\frac{\gamma\alpha}{\rho}\int_0^1\overline{(1-\tau)}^{(1)}|p(q\tau)g(u(q\tau))|\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+$$

$$\frac{\delta\alpha}{\rho}\int_0^1|p(\tau)g(u(\tau))|\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\leqslant M(qt+\frac{\gamma\alpha}{\rho}\int_0^1\overline{(1-\tau)}^{(1)}\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\frac{\delta\alpha}{\rho})=$$

$$M(qt+\frac{\gamma\alpha}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}(1-q^{2n+2})(1-q^2)+\frac{\delta\alpha}{\rho})\leqslant M(q+\frac{\gamma\alpha}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}(1-q^{2n+2})(1-q^2)+1)=M_3.$$

所以,对于 $t_1,t_2\in[0,1]$, $t_1<t_2$,有 $|(Tu)(t_2)-(Tu)(t_1)|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}|\widetilde{D}_q(Tu)(s)\tilde{\mathrm{d}}_q s|\leqslant M_3(t_2-t_1)$,由此证明了 T 在 $[0,1]$ 是连续的. 再由 Arzela-Ascoli 定理知,算子 $T: u\in C([0,1],\mathbf{R})\to u\in C([0,1],\mathbf{R})$ 是完全连续的.

其次,考虑 $V=\{u\in X\mid u=\mu Tu,0<\mu<1\}$,证明 V 是有界的. 令 $u\in V$,有 $u=\mu Tu$, $0<\mu<1$,对于任意 $t\in[0,1]$, $|u(t)|\leqslant\mu|(Tu)(t)|\leqslant|(Tu)(t)|=M_2$. 因此,对于任意 $u\in V$ 有 $\|u\|\leqslant M_2$,所以 V 是有界的.

通过以上证明,再由引理 2 知,算子 T 至少有一个不动点,由此证明了问题(5)—(6) 至少有一个解.

引理 6　$G_1(t,\tau)\leqslant G_1(\tau,\tau)$, $0\leqslant t$, $\tau\leqslant 1$,记 $\ell=\min\left\{\frac{\beta\gamma}{\beta\gamma+\alpha\gamma},\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma q}{4(\beta\gamma+\alpha\gamma)}\right\}$,则当 $\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}$, $\tau\geqslant t$ 时, $G_1(t,\tau)\geqslant\ell G_1(\tau,\tau)$.

证明　${}_t\widetilde{D}_q G_1(t,\tau)=\overline{(1-\tau)}^{(1)}\frac{\gamma\alpha}{\rho}-1=(1-q\tau)\frac{\gamma\alpha}{\rho}-1\leqslant\frac{\gamma\alpha}{\rho}-1<0$,又因 $G_1(1,\tau)=0$,所以 $\max\limits_{t\in[0,1]}G_1(t,\tau)=G_1(\tau,\tau)=\overline{(1-\tau)}^{(1)}\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma\tau}{\rho}$. 当 $\tau>t$ 时,

$$\frac{G_1(t,\tau)}{G_1(\tau,\tau)}=\frac{\overline{(1-\tau)}^{(1)}\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma\tau}{\rho}}{\overline{(1-\tau)}^{(1)}\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha\tau}{\rho}}=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha t}{\beta\gamma+\gamma\alpha\tau}>\frac{\beta\gamma}{\beta\gamma+\alpha\gamma};$$

当$\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}$时,

$$\frac{G_1(t,\tau)}{G_1(\tau,\tau)}=\frac{\overline{(1-\tau)}^{(1)}\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma\tau}{\rho}-(t-\tau)^{(1)}}{(1-\tau)^{(1)}\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha\tau}{\rho}}=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha t}{\beta\gamma+\gamma\alpha\tau}-\frac{\rho(t-q\tau)}{(\beta\gamma+\gamma\alpha\tau)(1-q\tau)}>$$

$$\frac{(\beta\gamma+\frac{3}{4}\gamma\alpha)(1-q\tau)-\rho(\frac{3}{4}-q\tau)}{(\beta\gamma+\gamma\alpha\tau)(1-q\tau)}=\frac{\beta\gamma+\frac{3}{4}\gamma\alpha-\frac{3}{4}\rho+(\rho-\beta\gamma-\frac{3}{4}\gamma)q\tau}{(1-q\tau)(\beta\gamma+\alpha\gamma\tau)}>$$

$$\frac{\frac{1}{4}\beta\gamma+\frac{1}{4}\gamma\alpha q\tau}{(1-q\tau)(\beta\gamma+\alpha\gamma\tau)}>\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha q\tau}{4(\beta\gamma+\alpha\gamma\tau)}>\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha q}{4(\beta\gamma+\alpha\gamma)}.$$

所以,当$\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}$, $\tau\geqslant t$时, $G_1(t,\tau)\geqslant \ell G_1(\tau,\tau)$.

记 $X=C[0,1]$,范数 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$. 定义 $A:X\to X$, $Au(t)=q\int_0^1 G_1(t,\tau)p(q\tau)g(u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(t)\int_0^1 p(\tau)g(u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau$. 在 X 上定义锥 K, $K=\{u\in X\,|\,u(t)\geqslant 0,\ \min\limits_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}u(qt)\geqslant \ell\|u\|\}$.

引理 7 A 是一个正算子,即 $A(K)\subset K$ 时 $u\in K$.

证明 显然 $Au(t)\geqslant 0$,利用引理 6 得

$$\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}Au(t)=\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}(q\int_0^1 G_1(t,\tau)p(q\tau)g(q\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(t)\int_0^1 p(\tau)g(u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau)\geqslant$$

$$\ell(q\int_0^1 G_1(\tau,\tau)p(q\tau)g(q\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(t)\int_0^1 p(\tau)g(u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau)\geqslant$$

$$\ell\max_{0\leqslant t\leqslant 1}(q\int_0^1 G_1(t,\tau)p(q\tau)g(q\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(t)\int_0^1 p(\tau)g(u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau)\geqslant \ell\|Au\|.$$

定理 3 问题(5)—(6)在超线性和次线性的情况下至少存在一个正解.

证明 首先,考虑超线性边值条件. 若 $g_0=0$,则存在 ε,满足 $0<\varepsilon(q\int_0^1 G_1(\tau,\tau)p(q\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(t)\int_0^1 p(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau)\leqslant 1$. 存在 $\delta_1>0$,使当 $0<u\leqslant\delta_1$ 时, $g(u)\leqslant\varepsilon u$. 因此,如果 $u\in K$,则由引理 6 有 $Au(t)=q\int_0^1 G_1(t,\tau)p(q\tau)g(u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(t)\int_0^1 p(\tau)g(u(\tau))\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\leqslant q\int_0^1 G_1(\tau,\tau)p(q\tau)\varepsilon u(q\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(t)\int_0^1 p(\tau)\varepsilon u(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\leqslant\|u\|$. 定义 $\Delta_1:=\{u\in X:\|u\|<\delta_1\}$,则由式(7)有 $\|Au\|\leqslant\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Delta_1$,又因为 $g_\infty=\infty$,故存在 δ^*,当 $u\geqslant\delta^*$ 时, $g(u)\geqslant\mu u$,其中 μ 满足 $\mu\ell(q\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G_1(\frac{1}{2},\tau)p(q\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(\frac{1}{2})\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}p(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau)\geqslant 1$. 令 $\delta_2=\max\{2\delta_1,\delta^*/\ell\}$,且定义 $\Delta_2:=\{u\in X:\|u\|<\delta_2\}$,则当 $u\in K$ 且 $\|u\|=\delta_2$ 时,有 $\min\limits_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}u(qt)\geqslant\ell\|u\|>\delta^*$. 因此,有

$$Au(\frac{1}{2})=q\int_0^1 G_1(\frac{1}{2},\tau)p(\tau)g(u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(\frac{1}{2})\int_0^1 p(\tau)g(u(\tau))\tilde{\mathrm{d}}_q\tau\geqslant$$

$$\mu(q\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G_1(\frac{1}{2},\tau)p(q\tau)g(u(q\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(\frac{1}{2})\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}p(\tau)g(u(\tau))\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau)\geqslant$$

$$\mu\ell\|u\|(q\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G_1(\frac{1}{2},\tau)p(q\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau+\overline{W}_\delta(\frac{1}{2})\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}p(\tau)\,\tilde{\mathrm{d}}_q\tau)\geqslant\|u\|,$$

由此证明了当 $u\in K\cap\partial\Delta_2$ 时, $\|Au\|\geqslant\|u\|$.

其次，由不动点定理知，当 $\delta_1 \leqslant \| u \| \leqslant \delta_2$ 时，存在 $u \in K \cap (\Delta_2 \backslash \Delta_1)$，$u$ 是 A 内的不动点. 由次线性条件 $g_0 = \infty$ 知，当 $0 < u \leqslant \delta_1$ 时，存在 $\delta_1' > 0$ 使 $f(u) \geqslant \mu' u$，有 $\mu' \ell (q \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G_1(\frac{1}{2}, \tau) p(q\tau)\, \tilde{\mathrm{d}}_q \tau + \overline{W}_\delta(\frac{1}{2}) \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} p(\tau)\, \tilde{\mathrm{d}}_q \tau) \geqslant 1$. 因此，当 $u \in K$ 且 $\| u \| = \delta_1'$ 时，有 $Au(\frac{1}{2}) \geqslant \| u \|$ 且 $\| Au \| \geqslant \| u \|$，其中 $u \in K \cap \partial \Delta_1'$，$\Delta_1' := \{u \in X : \| u \| < \delta_1'\}$. 当 $g_\infty = 0$，存在 $\tilde{\delta}$，当 $u > \tilde{\delta}$ 时 $f(u) \leqslant \varepsilon' u$，有 $0 < \varepsilon' (q \int_0^1 G_1(\tau, \tau) p(q\tau)\, \tilde{\mathrm{d}}_q \tau + \overline{W}_\delta(t) \int_0^1 p(\tau)\, \tilde{\mathrm{d}}_q \tau) \leqslant 1$. 令 $\delta_2' = \max\{2\delta_1', \tilde{\delta}/\ell\}$，$\Delta_2' := \{u \in X : \| u \| < \delta_2'\}$，则对于 $u \in K$ 且 $\| u \| = \delta_2'$，有 $\min\limits_{\frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}} u(qt) \geqslant \ell \| u \| \geqslant \tilde{\delta}$.

综上，当 $u \in K$ 且 $\| u \| = \delta_2'$ 时，可得到 $\| Au \| \leqslant \| u \|$，$u \in K \cap \partial \Delta_2'$，由此得出 A 有一个不动点.

定理 4　当 $\lim\limits_{u \to 0} p(t) g(u(t))/u = 0$ 时，问题(5)—(6) 至少有一个解.

证明　因存在 $\sigma > 0$，使得 $M_2 \sigma < 1$. 由 $\lim\limits_{u \to 0} p(t) g(u(t))/u = 0$ 知，存在常数 $r > 0$，使得 $|p(t) g(u(t))| \leqslant \sigma |u| (0 < |u| < r)$. 定义 $\Omega = \{u \in C([0,1], \mathbf{R}) \mid \| u \| < r\}$，取 $u \in C([0,1], \mathbf{R})$ 且有 $u \in \partial \Omega$，则 $\| u \| = r$，

$$
\begin{aligned}
|(Tu)(t)| \leqslant & \int_0^t \overline{(t-\tau)}^{(1)} |p(q\tau) g(u(q\tau))|\, \tilde{\mathrm{d}}_q \tau + \\
& \overline{W}_\gamma(t) \int_0^1 \overline{(1-\tau)}^{(1)} |p(q\tau) g(u(q\tau))|\, \tilde{\mathrm{d}}_q \tau + \overline{W}_\delta(t) \int_0^1 |p(\tau) g(u(\tau))|\, \tilde{\mathrm{d}}_q \tau \leqslant M_2 \sigma \| u \|.
\end{aligned}
$$

由定理 2 知算子 T 至少有一个不动点，即当 $\lim\limits_{u \to 0} p(t) g(u(t))/u = 0$ 时，问题(5)—(6) 至少有一个解.

参考文献：

[1] El-Shabed M，Hassan H A. Positive solutions of q-difference equation[J]. Proc Amer Math Soc，2010，138：1733-1738.

[2] Yang Wengui. Anti-periodic boundary value problems involving nonlinear fractional q-difference equations[J]. Malaya Journal of Matematik，2013，4(1)：107-114.

[3] Jackson F H. On q-funtions and a certain difference operator[J]. Trans Roy Soc Edin，1908，46：253-281.

[4] Jackson F H. On q-definite integrals[J]. Quart J Pure and Appl Math，1910，41：193-203.

[5] Strominger A. Information in black hole radiation[J]. Phys Rer Lett，1993，71：3743-3746.

[6] Youm D. q-Deformed conformal quantum mechanics[J]. Phys Rev D，2000，62：095009.

[7] Lavagno A，Swamy N P. q-Deformed structures and nonextensive statistics：a comparative study[J]. Physica A：Statistical Mechanics & Its Applications，2002，305(1)：310-315.

[8] Boole G. Calculus of Finite Differences[M]. New York：Chelsea Publishing Company，1957.

[9] Ernst T. The different tongues of q-calculus[J]. Proc Est Acad Sci，2008，57(2)：8199.

[10] Kac V，Cheung P. Quantum Calculus[M]. New York：Springer，2002.

[11] Koekock R，Lesky P A，Swarttouw R F. Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues[M]. Berlin：Springer Monographs in Mathematics，2010.

[12] Smart D R. Fixed Point Theorems[M]. Cambridage：Cambridage University Press，1980.