文章编号：1004-4353(2015)02-0142-03

电路量子电动力学系统中的几何相位门制备

张英俏
（延边大学理学院 物理系，吉林 延吉 133002）

摘要： 利用电路量子电动力学系统中传输线并联等离子振荡量子比特与共振器的色散耦合，提出了一个制备几何相位门的方案，方案中的相位门制备能在量子比特衰变和退相干之前完成，因此本文方案具有可行性.

关键词： 几何相位门；电路 QED；传输线并联等离子振荡量子比特
中图分类号： O431　　**文献标识码：** A

Generation of a geometric phase gate in circuit QED

ZHANG Yingqiao
(*Department of Physics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: A scheme to generate a geometric phase gate is proposed in circuit quantum electrodynamics (QED) based on transmons dispersively coupled to a transmission line resonator (TLR). Gate generation can be finished before the relaxation and dephasing of the qubits, which ensures the feasibility of the proposed scheme.

Key words: geometric phase gate; circuit QED; transmon

近些年来，基于超导量子比特的量子信息学取得了多项研究进展，例如：利用电荷量子比特实现了固态量子门[1]，利用磁通量子比特[2-3]和相位量子比特[4]分别实现了两个量子比特间的耦合，实验上实现了库珀对盒子与腔 QED 的强耦合[5]，首次将磁通量子比特用于电容并联抗噪声量子比特[6]等，但上述几种超导量子比特的相干时间仍不足以进行纠错和集成量子计算. 2007 年，一类新型的超导量子比特——传输线并联等离子振荡量子比特问世[7]，其相干时间大大增加，已经超过 2 μs. 此后，一系列利用传输线并联等离子振荡量子比特进行量子计算的研究相继被报道. 目前为止，实验上已经实现了传输线并联等离子振荡量子比特与腔的强耦合和色散耦合[8]、边带跃迁[9]，以及两比特量子算法[10]，而且基于传输线并联等离子振荡量子比特与共振器在强驱动外场[11]和色散相互作用条件下进行量子计算的理论方案也相继被提出. 在色散方案[12]中，微波场与共振器频率失谐量很大，大量光子在输入端被反射，共振器光子布居数为 $\bar{n}\approx(\frac{\varepsilon}{g})^2$，由此诱发的量子比特的拉比频率为 $\Omega_{\mathrm{R}}=g\sqrt{\bar{n}}$[13]，此时微波场哈密顿得到优化.

基于色散耦合模型，本文利用传输线并联等离子振荡量子比特与共振器的相互作用提出了一个制备几何相位门的方案. 利用当前的实验技术，方案中要求的色散极限条件很容易得到满足，保证了方案的可执行性.

收稿日期： 2014-11-03　　**作者简介：** 张英俏(1978—)，女，理学博士，副教授，研究方向为量子信息学.
基金项目： 吉林省科技发展计划青年科研基金资助项目(20130522148JH)；延边大学科技发展项目(延大科合字[2012]第 14 号)

1 基于色散相互作用的几何相位门制备

几何相位的相关知识见文献[14]. 在 Tavis-Cummings 模型[15]中，两个传输线并联等离子振荡量子比特与共振器的耦合系统的哈密顿可由式(1)给出：

$$H_{\mathrm{I}}=\omega_{\mathrm{r}}a^{\dagger}a+\sum_{j=1,2}\omega\sigma_{zj}+g\sum_{j=1,2}(a^{\dagger}\sigma_{-j}+a\sigma_{+j}),\tag{1}$$

其中 $\sigma_{zj}=\frac{1}{2}(|r\rangle_j\langle r|-|e\rangle_j\langle e|)$，$\sigma_{+j}=|r\rangle_j\langle e|$，$\sigma_{-j}=|e\rangle_j\langle r|$.

在频率为 $\omega_{\mathrm{L}}=\omega$ 的脉冲驱动下，共振器的哈密顿为[13]

$$H_{\mathrm{II}}=\varepsilon(t)(a^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{L}}t}+a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{L}}t}),\tag{2}$$

其中 $\varepsilon(t)$ 是外部驱动场的振幅. 当高 Q 共振器在大振幅驱动场条件下时，方程(2) 中的哈密顿可写成[13]

$$H'_{\mathrm{II}}=\Omega\sum_{j=1,2}(\sigma_{+j}+\sigma_{-j}),\tag{3}$$

其中 $\Omega\approx g\sqrt{\bar{n}}$ 是拉比频率，且 $\bar{n}\approx(\varepsilon/\Delta)^2$. 因此，整个系统的哈密顿可表示为

$$H''=H_{\mathrm{I}}+H'_{\mathrm{II}}.\tag{4}$$

以共振器频率 ω_{r} 为框架进行旋转可得

$$H''_{\mathrm{t}}=\delta\sum_{j=1,2}\sigma_{zj}+g\sum_{j=1,2}(a^{\dagger}\sigma_{-j}+a\sigma_{+j})+\Omega\sum_{j=1,2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{r}}t}\sigma_{+j}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{r}}t}\sigma_{-j}),\tag{5}$$

其中 $\delta=\omega-\omega_{\mathrm{r}}$. 在色散极限条件 $\delta\gg\Omega,g$ 下，传输线并联等离子振荡量子比特与共振器之间虽没有能量交换，但仍然存在色散耦合且有效哈密顿为

$$\begin{aligned}H''_{\mathrm{teff}}=&\sum_{j=1,2}\frac{1}{\delta}\{(g^2a^{\dagger}a+\Omega^2+\Omega g\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{r}}t}a^{\dagger}+\Omega g\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{r}}t}a)(|r\rangle_j\langle r|-|e\rangle_j\langle e|)+\\&g^2|r\rangle_j\langle r|\}+\frac{g^2}{\delta}(\sigma_{+1}\sigma_{-2}+\sigma_{-1}\sigma_{+2}),\end{aligned}\tag{6}$$

其中：$\sum_{j=1,2}(g^2a^{\dagger}a+\Omega^2)(|r\rangle_j\langle r|-|e\rangle_j\langle e|)/\delta$ 表示由共振器和驱动脉冲光子诱发的斯塔克位移，$\sum_{j=1,2}(\Omega g\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{r}}t}a^{\dagger}+\Omega g\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{r}}t}a)(|r\rangle_j\langle r|-|e\rangle_j\langle e|)/\delta$ 表示脉冲驱动下的共振器与传输线并联等离子振荡量子比特的耦合项，$\sum_{j=1,2}g^2|r\rangle_j\langle r|/\delta$ 表示真空共振器诱发的斯塔克位移，$g^2(\sigma_{+1}\sigma_{-2}+\sigma_{-1}\sigma_{+2})/\delta$ 表示共振器诱发的两个传输线并联等离子振荡量子比特之间的偶极耦合. 整个系统的演化由下面的薛定谔方程决定：

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}|\psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t}=H''_{\mathrm{teff}}|\psi(t)\rangle.\tag{7}$$

通过执行幺正变化得 $|\psi(t)\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H''_0t}|\psi'(t)\rangle$，其中 $H''_0=\sum_{j=1,2}\frac{1}{\delta}\{(g^2a^{\dagger}a+\Omega^2)(|r\rangle_j\langle r|-|e\rangle_j\langle e|)+g^2|r\rangle_j\langle r|\}$，于是可以得到：

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}|\psi'(t)\rangle}{\mathrm{d}t}=H''_{\mathrm{e}}|\psi'(t)\rangle,\tag{8}$$

$$\begin{aligned}H''_{\mathrm{te}}=&\sum_{j=1,2}\frac{\Omega g}{\delta}\{[a\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega_{\mathrm{r}}-g^2/\delta)t}+a^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{r}}+g^2/\delta)t}]|r\rangle_j\langle r|-[a\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega_{\mathrm{r}}+g^2/\delta)t}+a^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-\omega_{\mathrm{r}}+g^2/\delta)t}]|e\rangle_j\langle e|\}+\\&\frac{g^2}{\delta}(\sigma_{+1}\sigma_{-2}+\sigma_{-1}\sigma_{+2}),\end{aligned}\tag{9}$$

其中用于构建几何相位门并对编码态 $|i\rangle_j$ 和 $|e\rangle_j$ 的演化起作用的部分为

$$H''_{\mathrm{e}}=-\frac{\Omega g}{\delta}\sum_{j=1,2}[a\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega_{\mathrm{r}}+g^2/\delta)t}+a^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-\omega_{\mathrm{r}}+g^2/\delta)t}]|e\rangle_j\langle e|.\tag{10}$$

基于位移算符 $D''(\mathrm{d}\alpha'')$ 可以获得经过无限短的时间间隔 $\mathrm{d}t''$ 后的演化算符为

$$U''(\mathrm{d}t'') = D''(\mathrm{d}\alpha'') = \mathrm{e}^{a^{\dagger}\mathrm{d}\alpha'' - a\mathrm{d}\alpha''^{*}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H''_{\mathrm{e}}\mathrm{d}t''},$$

且 $\mathrm{d}\alpha'' = \mathrm{i}\dfrac{\Omega g}{\delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-\omega_{\mathrm{r}}+g^2/\delta)t''}\mathrm{d}t''$. 考虑哈密顿 H''_0 的影响,经过相互作用时间 t 后,两个传输线并联等离子振荡量子比特与初始真空腔 $|0\rangle$ 系统的演化为:

$$\begin{aligned}
&|i\rangle_1|i\rangle_2|0\rangle \to |i\rangle_1|i\rangle_2|0\rangle \to |i\rangle_1|i\rangle_2|0\rangle,\\
&|e\rangle_1|i\rangle_2|0\rangle \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega^2 t/\delta}D''(\alpha'')|e\rangle_1|i\rangle_2|0\rangle \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Omega^2 t/\delta)}|e\rangle_1|i\rangle_2|0\rangle,\\
&|i\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega^2 t/\delta}D''(\alpha'')|i\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Psi+\Omega^2 t/\delta)}|i\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle,\\
&|e\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\Omega^2 t/\delta}D''(2\alpha'')|e\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}(4\Psi+2\Omega^2 t/\delta)}|e\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle,
\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\Psi = -(\Omega g)^2[t-(-\omega_{\mathrm{r}}+g^2/\delta)^{-1}\sin(-\omega_{\mathrm{r}}+g^2/\delta)t]/[\delta(-\omega_{\mathrm{r}}\delta+g^2)]$ 且 $\Psi_2 = 4\Psi$[16]. 执行单比特操作 $|e\rangle_j \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Psi+\Omega^2 t/\delta)}|e\rangle_j$ 后,可获得一个几何相位门:

$$\begin{aligned}
&|i\rangle_1|i\rangle_2|0\rangle \to |i\rangle_1|i\rangle_2|0\rangle, \quad |e\rangle_1|i\rangle_2|0\rangle \to |e\rangle_1|i\rangle_2|0\rangle,\\
&|i\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle \to |i\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle, \quad |e\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle \to -|e\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle,
\end{aligned} \tag{12}$$

在制备过程中需满足条件 $(-\omega_{\mathrm{r}}+g^2/\delta)t = 2\pi$ 和 $2\Psi = -\pi$.

2 结果与讨论

本文方案是通过调节每个量子比特近端的磁通偏压线来改变其跃迁频率的,根据文献[8-10]的实验结果,量子比特的跃迁频率可通过控制每个量子比特线圈的磁通来实现静态调节,也可以利用偏压线产生的电压偏差以及可自调频率的共振器[17]实现频率调节. 此外,还有一种不需要额外调节任何参数的方法,但需要射频驱动振幅更加稳健的共振器,该方法常常产生较慢的逻辑门.

在色散极限条件下,共振器通常与传输线并联等离子振荡量子比特跃迁频率失谐较大,因此共振器与量子比特之间没有能量交换,此时共振器处于虚激发状态,光子损失的影响可以忽略不计. 文献[8-9]成功实现了共振器与传输线并联等离子振荡量子比特的色散耦合. 色散极限条件 $\delta \gg \Omega, g$ 在共振器频率为 $\dfrac{\omega_{\mathrm{r}}}{2\pi} = 6.44$ GHz、共振器-量子比特耦合强度为 $\dfrac{g}{2\pi} = 133$ MHz、拉比频率为 $\dfrac{\omega}{2\pi} = 4.5$ 或 4.85 GHz[9] 下能得到满足. 选择 $\delta = 10g$, 则相位门制备时间为 $t_{\mathrm{dis}} = \delta\pi/g^2 \sim 10^{-2}$ μs.

由以上讨论可知,本文提出的利用传输线并联等离子振荡量子比特与共振器的色散耦合制备几何相位门的方案,其门制备时间远小于量子比特的弛豫时间和退相干时间,能够保证方案在有效时间内完成,且该方案还适用于多比特情况.

参考文献:

[1] Yamamoto T, Pashkin Yu A, Astafiev O, et al. Demonstration of conditional gate operation using superconducting charge qubits[J]. Nature, 2003,425:941-944.

[2] Majer J B, Paauw F G, ter Haar A C J, et al. Spectroscopy on two coupled superconducting flux qubits[J]. Phys Rev Lett, 2005,94:090501(4).

[3] Hime T, Reichardt P A, Plourde B L T, et al. Solid-state qubits with current-controlled coupling[J]. Science, 2006,314:1427-1429.

[4] Berkley A J, Xu H, Ramos R C, et al. Entangled macroscopic quantum states in two superconducting qubits[J]. Science, 2003,300:1548-1550.

[5] Wallraff A, Schuster D I, Blais A, et al. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics[J]. Nature, 2004,431:162-167.

[6] You J Q, Hu X D, Ashhab S, et al. Low-decoherence flux qubit[J]. Phys Rev B, 2007,75:140515(R)(4).

(下转第 159 页)

基于簇首连任和多 sink 节点的 WSN 路由算法. 改进的算法主要包括：① 在网络成簇阶段，利用簇首连续担任多轮的机制，避免频繁选择簇首，节省簇首能量消耗. ② 在数据传输阶段，基站使用 2 个 sink 节点接收簇首发送来的数据，减小簇首传输距离. 仿真实验结果表明，改进算法比 LEACH 算法更高效和节能，能有效延长网络生存周期. 本文在研究中没有对 sink 节点的部署问题进行研究，今后将对此作进一步研究.

参考文献：

[1] 任丰原，黄海宁，林闯. 无线传感器网络[J]. 软件学报，2003，14(7)：1282-1291.

[2] 尚凤军. 无线传感器网络通信协议[M]. 北京：电子工业出版社，2011.

[3] 刘强，毛玉明，李龙江. 随机分布 WSN 中 sink 节点部署研究[J]. 计算机工程与科学，2013，35(2)：49-55.

[4] 刘强，毛玉明，李龙江. 无线传感器网络中多 sink 节点优化部署方法[J]. 计算机应用，2011，31(9)：2313-2316.

[5] 陈炳才，么华卓，杨明川. 一种基于 LEACH 协议改进的簇间多跳路由协议[J]. 传感器学报，2014，27(3)：373-377.

[6] 陈志雄，潘耘，李嫣. 用改进蚁群算法求解无线传感器网络多 sink 节点关联问题[J]. 计算机应用与软件，2012，29(2)：246-249.

[7] 陶志勇，蒋守凤. 负载均衡的无线传感器网络的分簇路由算法[J]. 计算机工程与应用，2015，3(1)：1-5.

[8] Sakkottai S, Rappaport T S, Karlsson P C. Cross layer design for wireless network[J]. IEEE Communications Magazine, 2003，41(10)：74-80.

[9] 胡艳华，张建军. LEACH 协议的簇头(LEACH-M)改进算法[J]. 计算机工程与应用，2009，45(34)：107-109.

[10] Meenakshi Sharma, Kalpana Sharma. An energy efficient extended LEACH (EEE LEACH)[C]//2012 International Conference Communication System and Network Technologies. Rajkot, India, 2012：377-382.

[11] 陈建明，王青海，路建军. 自适应分簇拓扑算法 EC-LEACH 的研究[J]. 测试技术学报，2008，22(6)：538-543.

[12] 李岩，张曦煌，李彦中. LEACH-EE-基于 LEACH 协议的高效聚类路由算法[J]. 计算机应用，2007，27(5)：1103-1105.

(上接第 144 页)

[7] Koch J, Yu T M, Gambetta J, et al. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pairbox[J]. Phys Rev A, 2007，76：042319(19).

[8] Majer J, Chow J M, Gambetta J M, et al. Coupling superconducting qubits via a cavity bus[J]. Nature, 2007，449：443-447.

[9] Leek P J, Filipp S, Maurer P, et al. Using sideband transitions for two-qubit operations in superconducting circuits[J]. Phys Rev B, 2009, 79：180511(R)(4).

[10] DiCarlo L, Chow J M, Gambetta J M, et al. Demonstration of two-qubit algorithms with a superconducting quantum processor[J]. Nature, 2009，460：240-244.

[11] Wu C W, Han Y, Li H Y, et al. Fast quantum phase gate in a small-detuning circuit QED model[J]. Phys Rev A, 2010，82：014303(4).

[12] Wu C W, Han Y, Zhong X J, et al. One-way quantum computation with circuit quantum electrodynamics[J]. Phys Rev A, 2010，81：034301(4).

[13] Blais A, Gambetta J, Wallraff A, et al. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics[J]. Phys Rev A, 2007，75：032329(21).

[14] 张英俏. 基于传输线并联等离子振荡量子比特制备几何受控相位门[J]. 延边大学学报：自然科学版，2013，39：256-259.

[15] Walls D F, Milburn G J. Quantum Optics[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[16] Zheng S B. Unconventional geometric quantum phase gates with a cavity QED system[J]. Phys Rev A, 2004，70：052320(4).

[17] Wallquist M, Shumeiko V S, Wendin G. Selective coupling of superconducting charge qubits mediated by a tunable stripline cavity[J]. Phys Rev B, 2006，74：224506(10).