文章编号：1004-4353(2015)02-0136-06

量子系统 $C^2 \otimes C^3$ 中无偏的不可扩展最大纠缠基的新构造

卜繁强[1]， 杨强[2]， 陶元红[2]*
（1.延边朝鲜族自治州学校后勤服务中心，吉林 延吉 133000；2.延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002）

摘要： 讨论量子系统 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$ 中无偏的不可扩展最大纠缠基的新构造.首先选取空间 $\mathbf{C}^2$ 中的任意规范正交基，构造出 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$ 中一类 4-成员的不可扩展的最大纠缠系统，然后再通过添加 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$ 中的两个规范正交向量将其扩充成 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$ 中的基底；其次通过变换 $\mathbf{C}^3$ 空间的基底，构造出 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$ 中另一组完全不同的不可扩展的最大纠缠基，并讨论这两组基无偏的充分必要条件.

关键词： 无偏基；最大纠缠态；不可扩展的最大纠缠基
中图分类号： O177.3　　**文献标识码：** A

New construction of mutually unbiased unextendible maximally entangled bases in quantum system $C^2 \otimes C^3$

BU Fanqiang[1]， YANG Qiang[2]， TAO Yuanhong[2]*
(1. *School Logistics Service Center of Yanbian Korean Autonomous Prefecture*, *Yanji* 133000, *China*;
2. *Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: New constructions of mutually unbiased unextendible maximally entangled bases in quantum system $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$ are discussed. Firstly, by choosing an arbitrary orthonormal basis in $\mathbf{C}^2$, we construct a kind of 4-member unextendible maximally entangled system in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$, which becomes an unextendible maximally entangled basis in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$ after we add two orthonormal vectors in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$. Secondly, through changing the basis of $\mathbf{C}^3$, another unextendible maximally entangled basis is established, and the sufficient and necessary conditions of mutually unbiaseness of them are discussed.

Key words: mutually unbiased bases; maximally entangled state; unextendible maximally entangled basis

在量子系统 $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^d$ 中，n-成员的不可扩展的最大纠缠基[1]是由 $n\,(n<d^2)$ 个规范正交的最大纠缠向量构成的集合，该集合不再含有与这些向量正交的任何最大纠缠向量.由于该集合中的向量个数 $n<d^2$，需要填补 d^2-n 个规范正交的向量才能构成 $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^d$ 中的基底，所以为区别起见，本文将其称为 n-成员的不可扩展的最大纠缠系统(UMES).文献[1]证明了量子系统 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$ 中不存在 UMES，并分别给出了量子系统 $\mathbf{C}^3 \otimes \mathbf{C}^3$ 和 $\mathbf{C}^4 \otimes \mathbf{C}^4$ 中由 6-成员和 12-成员组成的 UMES 的例子.

无偏基在量子信息处理中有许多重要的应用，例如量子态层析、加密协议和均值王氏问题等[2-7].若空间 $\mathbf{C}^d$ 中的两组规范正交基 $B_1=\{|b_i\rangle\}_{i=1}^{d}$ 和 $B_2=\{|c_j\rangle\}_{j=1}^{d}$ 满足关系 $|\langle b_i|c_j\rangle|=\frac{1}{\sqrt{d}}$，$i,j=1,2,$

收稿日期： 2015-05-14　　*通信作者：陶元红(1973—)，女，博士，副教授，研究方向为泛函分析及应用.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11361065)；吉林省自然科学基金资助项目(201215239)

$\cdots,d$，则称这两组规范正交基是无偏基（MUBs）.

2013 年，陈斌等[8] 将 UMES 的概念进一步推广到不同维数空间构成的两体系统中，建立了一种在任意两体系统 $\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^{d'}\left(\frac{d'}{2}<d<d'\right)$ 上含有 d^2 个成员的 UMES 的构造方法，并在 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中构造了一对彼此无偏的不可扩展的最大纠缠基；文献[9-11] 分别构造了 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中多对无偏的不可扩展的最大纠缠基；2014 年，海里且木等[12] 给出了 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中系统构造成对的无偏的不可扩展的最大纠缠基的方法. 以上的构造方法均是基于在 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中将第一个空间 $\mathbf{C}^2$ 中的基底取作 $\{|\mathbf{0}\rangle,|\mathbf{1}\rangle\}$ 而构造的，本文讨论将 $\mathbf{C}^2$ 中的基底取作任意规范正交基时去构造无偏的不可扩展的最大纠缠基的问题.

1　$\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中 4-成员的不可扩展的最大纠缠系统

定义 1[8]　设 $|\boldsymbol{\varphi}\rangle$ 为两体系统 $\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^{d'}(d\leqslant d')$ 中的任意态，称 $|\boldsymbol{\varphi}\rangle$ 为 $d\otimes d'$ 最大纠缠态是指对子系统 A 的任意规范正交完备基 $\{|\boldsymbol{i}_A\rangle\}$，都存在子系统 B 的规范正交基 $\{|\boldsymbol{i}_B\rangle\}$，使得 $|\boldsymbol{\varphi}\rangle=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum\limits_{i=0}^{d-1}|\boldsymbol{i}_A\rangle\otimes|\boldsymbol{i}_B\rangle$.

定义 2[1]　由 n 个态 $\{|\boldsymbol{\varphi}_i\rangle\in\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^{d'}: i=1,2,\cdots,n,\ n<dd'\}$ 构成的集合称为 $\mathbf{C}^d\otimes\mathbf{C}^{d'}$ 中含有 n-成员的不可扩展的最大纠缠系统，当且仅当如下条件成立：① $|\boldsymbol{\varphi}_i\rangle$，$i=1,2,\cdots,n$ 均为最大纠缠态；② $\langle\boldsymbol{\varphi}_i|\boldsymbol{\varphi}_j\rangle=\delta_{ij}$；③ 若对任意 $i=1,2,\cdots,n$，均有 $\langle\boldsymbol{\varphi}_i|\boldsymbol{\psi}\rangle=0$，则 $\boldsymbol{\psi}$ 必然不是最大纠缠态.

2013 年，陈斌等[8] 构造了量子系统 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中的 4-成员的不可扩展的最大纠缠系统：

$$|\boldsymbol{\varphi}_i\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\sigma}_i\otimes\boldsymbol{I}_3)(|\mathbf{0}\rangle|\mathbf{0}'\rangle+|\mathbf{1}\rangle|\mathbf{1}'\rangle),\ i=0,1,2,3,\tag{1}$$

其中 $\{|\mathbf{0}\rangle,|\mathbf{1}\rangle\}$ 和 $\{|\mathbf{0}'\rangle,|\mathbf{1}'\rangle,|\mathbf{2}'\rangle\}$ 分别为 $\mathbf{C}^2$ 和 $\mathbf{C}^3$ 中的规范正交基；$\boldsymbol{\sigma}_i$，$i=1,2,3$ 是 Pauli 矩阵且 $\boldsymbol{\sigma}_0=\boldsymbol{I}_2$.

本文将要构造的是量子系统 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中新型的不可扩展的最大纠缠系统和不可扩展的最大纠缠基. 首先，选取 $\{|\boldsymbol{a}\rangle,|\boldsymbol{b}\rangle\}$ 为 $\mathbf{C}^2$ 中的任意规范正交基. 不妨设 $(|\boldsymbol{a}\rangle,|\boldsymbol{b}\rangle)=\boldsymbol{S}(|\mathbf{0}\rangle,|\mathbf{1}\rangle)$，其中 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}s_{11}&s_{12}\\s_{21}&s_{22}\end{pmatrix}$ 为幺正矩阵.

定理 1　如下 4 个向量可以构成 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中一组不可扩展的最大纠缠系统：

$$\begin{cases}|\boldsymbol{\varphi}_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{a}\rangle|\mathbf{0}'\rangle+|\boldsymbol{b}\rangle|\mathbf{1}'\rangle);\\[2mm]|\boldsymbol{\varphi}_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{a}\rangle|\mathbf{0}'\rangle-|\boldsymbol{b}\rangle|\mathbf{1}'\rangle);\\[2mm]|\boldsymbol{\varphi}_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{b}\rangle|\mathbf{0}'\rangle+|\boldsymbol{a}\rangle|\mathbf{1}'\rangle);\\[2mm]|\boldsymbol{\varphi}_3\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{b}\rangle|\mathbf{0}'\rangle-|\boldsymbol{a}\rangle|\mathbf{1}'\rangle).\end{cases}\tag{2}$$

证明　根据定义 1，显然式(2) 中的每个向量都是 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中的最大纠缠态，而且可以直接验证式(2) 中的 4 个向量彼此规范正交，即式(2) 中的 $\{|\boldsymbol{\varphi}_i\rangle\}_{i=0}^{3}$ 满足定义 2 中的条件 ① 和 ②，因此，只需要证明满足定义 2 中的条件 ③ 即可. 假设 $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ 是纠缠态，则可将 $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ 进行 Schmidt 分解，得 $|\boldsymbol{\psi}\rangle=(\boldsymbol{U}\otimes\mathbf{V})(\alpha|\mathbf{00}'\rangle+\beta|\mathbf{11}'\rangle)$，其中 $\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha^2+\beta^2=1$，而且 $\boldsymbol{U}=(u_{ij})_{2\times2}$，$\mathbf{V}=(v_{ij})_{3\times3}$ 均为幺正矩阵. 由已知 $\langle\boldsymbol{\varphi}_0|\boldsymbol{\psi}\rangle=0$ 可得

$$0=\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\mathbf{0}|\langle\mathbf{0}'|+\langle\mathbf{1}|\langle\mathbf{1}'|)(\boldsymbol{S}^{\mathrm{t}}\otimes\boldsymbol{I})(\boldsymbol{U}\otimes\mathbf{V})(\alpha|\mathbf{0}\rangle|\mathbf{0}'\rangle+\beta|\mathbf{1}\rangle|\mathbf{1}'\rangle)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\langle\mathbf{0}|(\boldsymbol{S}^{t}\boldsymbol{U})|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}'|\boldsymbol{V}|\mathbf{0}'\rangle+\beta\langle\mathbf{0}|(\boldsymbol{S}^{t}\boldsymbol{U})|\mathbf{1}\rangle\langle\mathbf{0}'|\boldsymbol{V}|\mathbf{1}'\rangle+$$
$$\alpha\langle\mathbf{1}|(\boldsymbol{S}^{t}\boldsymbol{U})|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{1}'|\boldsymbol{V}|\mathbf{0}'\rangle+\beta\langle\mathbf{1}|(\boldsymbol{S}^{t}\boldsymbol{U})|\mathbf{1}\rangle\langle\mathbf{1}'|\boldsymbol{V}|\mathbf{1}'\rangle)=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(s_{11}u_{11}+s_{21}u_{21})v_{11}+\beta(s_{11}u_{12}+s_{21}u_{22})v_{12}+\alpha(s_{12}u_{11}+s_{22}u_{21})v_{21}+\beta(s_{12}u_{12}+s_{22}u_{22})v_{22}],$$

式中 t 表示矩阵的转置. 由上式得

$$\alpha(s_{11}u_{11}+s_{21}u_{21})v_{11}+\beta(s_{11}u_{12}+s_{21}u_{22})v_{12}+\alpha(s_{12}u_{11}+s_{22}u_{21})v_{21}+\beta(s_{12}u_{12}+s_{22}u_{22})v_{22}=0. \tag{3}$$

同理,由$\langle\boldsymbol{\varphi}_i|\boldsymbol{\psi}\rangle=0$, $i=1,2,3$ 可得如下 3 个方程:

$$\alpha(s_{11}u_{11}+s_{21}u_{21})v_{11}+\beta(s_{11}u_{12}+s_{21}u_{22})v_{12}-\alpha(s_{12}u_{11}+s_{22}u_{21})v_{21}-\beta(s_{12}u_{12}+s_{22}u_{22})v_{22}=0, \tag{4}$$

$$\alpha(s_{11}u_{11}+s_{21}u_{21})v_{21}+\beta(s_{11}u_{12}+s_{21}u_{22})v_{22}+\alpha(s_{12}u_{11}+s_{22}u_{21})v_{11}+\beta(s_{12}u_{12}+s_{22}u_{22})v_{12}=0, \tag{5}$$

$$-\alpha(s_{11}u_{11}+s_{21}u_{21})v_{21}-\beta(s_{11}u_{12}+s_{21}u_{22})v_{22}+\alpha(s_{12}u_{11}+s_{22}u_{21})v_{11}+\beta(s_{12}u_{12}+s_{22}u_{22})v_{12}=0. \tag{6}$$

显然,式(3)—(6) 可写成如下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{21} & v_{22} \\ v_{21} & v_{22} & v_{11} & v_{12} \\ -v_{21} & -v_{22} & v_{11} & v_{12} \\ v_{11} & v_{12} & -v_{21} & -v_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11}u_{11}+s_{21}u_{21} \\ s_{11}u_{12}+s_{21}u_{22} \\ s_{12}u_{11}+s_{22}u_{21} \\ s_{12}u_{12}+s_{22}u_{22} \end{pmatrix}=0, \tag{7}$$

即为齐次方程组:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}, \tag{8}$$

其中: $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{V}_1 \\ -\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{V}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{W} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{W} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{V}_1=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{\lambda}=(s_{11}u_{11}+s_{21}u_{21}, s_{11}u_{12}+s_{21}u_{22}, s_{12}u_{11}+s_{22}u_{21}, s_{12}u_{12}+s_{22}u_{22})^{t}$. 显然, $\det\boldsymbol{B}\neq 0$, 所以方程组(8) 只有零解, 即 $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$, 从而有

$$s_{11}u_{11}+s_{21}u_{21}=s_{11}u_{12}+s_{21}u_{22}=s_{12}u_{11}+s_{22}u_{21}=s_{12}u_{12}+s_{22}u_{22}=0.$$

于是 $\boldsymbol{S}^{t}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} s_{11}u_{11}+s_{21}u_{21} & s_{11}u_{12}+s_{21}u_{22} \\ s_{12}u_{11}+s_{22}u_{21} & s_{12}u_{12}+s_{22}u_{22} \end{pmatrix}$ 是零矩阵,这与 $\boldsymbol{S}^{t}\boldsymbol{U}$ 是幺正矩阵相矛盾,因此关于 $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ 是纠缠的假设不真,从而 $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ 必不是最大纠缠态.

综上,式(2) 中的 4 个向量构成了 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中的一组不可扩展的最大纠缠系统.

2 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中不可扩展的最大纠缠基的无偏构造

基于形式(1), 陈斌等[8] 构造了量子系统 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中的一对无偏的不可扩展的最大纠缠基 $\{|\boldsymbol{\varphi}_i\rangle\}_{i=0}^{5}$ 和 $\{|\boldsymbol{\psi}_i\rangle\}_{i=0}^{5}$:

$$\begin{cases} |\boldsymbol{\varphi}_i\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\sigma}_i\otimes\boldsymbol{I}_3)(|\mathbf{0}\rangle|\mathbf{0}'\rangle+|\mathbf{1}\rangle|\mathbf{1}'\rangle), \ i=0,1,2,3; \\ |\boldsymbol{\varphi}_4\rangle=\dfrac{1}{2}|\mathbf{0}\rangle|\mathbf{2}'\rangle+\dfrac{\sqrt{3}}{2}|\mathbf{1}\rangle|\mathbf{2}'\rangle; \\ |\boldsymbol{\varphi}_5\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|\mathbf{0}\rangle|\mathbf{2}'\rangle-\dfrac{1}{2}|\mathbf{1}\rangle|\mathbf{2}'\rangle. \end{cases}$$

$$\begin{cases}|\boldsymbol{\psi}_i\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\sigma}_i\otimes\boldsymbol{I}_3)(|\mathbf{0}\rangle|\boldsymbol{x}'\rangle+|\mathbf{1}\rangle|\boldsymbol{y}'\rangle),\ i=0,1,2,3;\\ |\boldsymbol{\varphi}_4\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}|\mathbf{0}\rangle|\boldsymbol{z}'\rangle+\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}|\mathbf{1}\rangle|\boldsymbol{z}'\rangle);\\ |\boldsymbol{\varphi}_5\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}|\mathbf{0}\rangle|\boldsymbol{z}'\rangle+\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}|\mathbf{1}\rangle|\boldsymbol{z}'\rangle).\end{cases}$$

其中 $\{|\boldsymbol{x}'\rangle,|\boldsymbol{y}'\rangle,|\boldsymbol{z}'\rangle\}$ 是 $\mathbf{C}^3$ 中另一个规范正交基,满足如下关系:

$$\begin{cases}|\boldsymbol{x}'\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(|\mathbf{0}'\rangle+\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}|\mathbf{1}'\rangle+|\mathbf{2}'\rangle);\\ |\boldsymbol{y}'\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\dfrac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}|\mathbf{0}'\rangle+\mathrm{i}|\mathbf{1}'\rangle-\mathrm{i}|\mathbf{2}'\rangle);\\ |\boldsymbol{z}'\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-|\mathbf{0}'\rangle+|\mathbf{1}'\rangle+\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}|\mathbf{2}'\rangle).\end{cases}$$

本文基于 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中式(2)这一组不可扩展的最大纠缠系统,可以填补两个规范正交向量使其成为 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 的一个基底,这两个规范正交向量可以是 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中的直积态,也可以是非最大纠缠的纠缠态,只要保证与式(2)中所有的向量分别正交即可.不妨先给式(2)填补 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中两个最容易构造的规范正交直积态,构成量子系统 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中如下不可扩展的最大纠缠基:

$$\begin{cases}|\boldsymbol{\varphi}_0\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{a}\rangle|\mathbf{0}'\rangle+|\boldsymbol{b}\rangle|\mathbf{1}'\rangle);\\ |\boldsymbol{\varphi}_1\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{a}\rangle|\mathbf{0}'\rangle-|\boldsymbol{b}\rangle|\mathbf{1}'\rangle);\\ |\boldsymbol{\varphi}_2\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{b}\rangle|\mathbf{0}'\rangle+|\boldsymbol{a}\rangle|\mathbf{1}'\rangle);\\ |\boldsymbol{\varphi}_3\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{b}\rangle|\mathbf{0}'\rangle-|\boldsymbol{a}\rangle|\mathbf{1}'\rangle);\\ |\boldsymbol{\varphi}_4\rangle=|\boldsymbol{a}\rangle|\mathbf{2}'\rangle;\\ |\boldsymbol{\varphi}_5\rangle=|\boldsymbol{b}\rangle|\mathbf{2}'\rangle.\end{cases}\tag{9}$$

设 $\{|\boldsymbol{x}'\rangle,|\boldsymbol{y}'\rangle,|\boldsymbol{z}'\rangle\}$ 为 $\mathbf{C}^3$ 中的任意规范正交基,且有 $(|\boldsymbol{x}'\rangle,|\boldsymbol{y}'\rangle,|\boldsymbol{z}'\rangle)=\boldsymbol{T}(|\mathbf{0}'\rangle,|\mathbf{1}'\rangle,|\mathbf{2}'\rangle)$,其中 $\boldsymbol{T}=(t_{ij})_{3\times3}$ 是幺正矩阵.类似于以上讨论,可以得到如下另一组不可扩展的最大纠缠基:

$$\begin{cases}|\boldsymbol{\psi}_0\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{a}\rangle|\boldsymbol{x}'\rangle+|\boldsymbol{b}\rangle|\boldsymbol{y}'\rangle);\\ |\boldsymbol{\psi}_1\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{a}\rangle|\boldsymbol{x}'\rangle-|\boldsymbol{b}\rangle|\boldsymbol{y}'\rangle);\\ |\boldsymbol{\psi}_2\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{b}\rangle|\boldsymbol{x}'\rangle+|\boldsymbol{a}\rangle|\boldsymbol{y}'\rangle);\\ |\boldsymbol{\psi}_3\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{b}\rangle|\boldsymbol{x}'\rangle-|\boldsymbol{a}\rangle|\boldsymbol{y}'\rangle);\\ |\boldsymbol{\psi}_4\rangle=\dfrac{|\boldsymbol{a}\rangle+|\boldsymbol{b}\rangle}{\sqrt{2}}\otimes|\boldsymbol{z}'\rangle;\\ |\boldsymbol{\psi}_5\rangle=\dfrac{|\boldsymbol{a}\rangle-|\boldsymbol{b}\rangle}{\sqrt{2}}\otimes|\boldsymbol{z}'\rangle.\end{cases}\tag{10}$$

显然，

$$\begin{cases} |\boldsymbol{\psi}_i\rangle = \boldsymbol{I}_2 \otimes \boldsymbol{T}\,|\boldsymbol{\varphi}_i\rangle,\ i=0,1,2,3; \\ |\boldsymbol{\psi}_i\rangle = \boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{T}\,|\boldsymbol{\varphi}_i\rangle,\ i=4,5. \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{H}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. 若要保证式(9)和(10)中两组不可扩展的最大纠缠基彼此无偏，当且仅当如下式子成立：

$$\begin{cases} |\langle\boldsymbol{\varphi}_i|\boldsymbol{\psi}_j\rangle| = |\langle\boldsymbol{\varphi}_i|\,\boldsymbol{I}_2 \otimes \boldsymbol{T}\,|\boldsymbol{\varphi}_j\rangle| = \frac{1}{\sqrt{6}},\ i=0,1,2,3,4,5;\ j=0,1,2,3; \\ |\langle\boldsymbol{\varphi}_i|\boldsymbol{\psi}_j\rangle| = |\langle\boldsymbol{\varphi}_i|\,\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{T}\,|\boldsymbol{\varphi}_j\rangle| = \frac{1}{\sqrt{6}},\ i=0,1,2,3,4,5;\ j=4,5. \end{cases} \tag{11}$$

由于式(2)中 $\{|\boldsymbol{\varphi}_i\rangle\}_{i=0}^{5}$ 是 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中的规范正交基，所以(11)式表明：矩阵 $\boldsymbol{I}_2\otimes\boldsymbol{T}$ 在基底 $\{|\boldsymbol{\varphi}_i\rangle\}_{i=0}^{5}$ 下的表示矩阵中前 4 列每一个元素的模均等于 $\frac{1}{\sqrt{6}}$；矩阵 $\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{T}$ 在基底 $\{|\boldsymbol{\varphi}_i\rangle\}_{i=0}^{5}$ 下的表示矩阵中后 2 列的每一个元素的模均等于 $\frac{1}{\sqrt{6}}$. 若设 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中的两个基底 $\{|\boldsymbol{a}\rangle|\boldsymbol{0}'\rangle, |\boldsymbol{a}\rangle|\boldsymbol{1}'\rangle, |\boldsymbol{a}\rangle|\boldsymbol{2}'\rangle, |\boldsymbol{b}\rangle|\boldsymbol{0}'\rangle, |\boldsymbol{b}\rangle|\boldsymbol{1}'\rangle, |\boldsymbol{b}\rangle|\boldsymbol{2}'\rangle\}$ 与 $\{|\boldsymbol{\varphi}_i\rangle\}_{i=0}^{5}$ 之间的幺正矩阵为 $\boldsymbol{A}$，即 $(|\boldsymbol{\varphi}_0\rangle, |\boldsymbol{\varphi}_1\rangle, |\boldsymbol{\varphi}_2\rangle, |\boldsymbol{\varphi}_3\rangle, |\boldsymbol{\varphi}_4\rangle, |\boldsymbol{\varphi}_5\rangle) = \boldsymbol{A}(|\boldsymbol{a}\rangle|\boldsymbol{0}'\rangle, |\boldsymbol{a}\rangle|\boldsymbol{1}'\rangle, |\boldsymbol{a}\rangle|\boldsymbol{2}'\rangle, |\boldsymbol{b}\rangle|\boldsymbol{0}'\rangle, |\boldsymbol{b}\rangle|\boldsymbol{1}'\rangle, |\boldsymbol{b}\rangle|\boldsymbol{2}'\rangle)$，则显然

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\
\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

而矩阵 $\boldsymbol{I}_2\otimes\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{T}$ 在基底 $\{|\boldsymbol{\varphi}_i\rangle\}_{i=0}^{5}$ 下的表示矩阵分别为：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{I}_2\otimes\boldsymbol{T})\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
\frac{t_{11}}{\sqrt{2}} & \frac{t_{11}}{\sqrt{2}} & \frac{t_{12}}{\sqrt{2}} & -\frac{t_{12}}{\sqrt{2}} & t_{13} & 0\\
\frac{t_{21}}{\sqrt{2}} & \frac{t_{21}}{\sqrt{2}} & \frac{t_{22}}{\sqrt{2}} & -\frac{t_{22}}{\sqrt{2}} & t_{23} & 0\\
\frac{t_{31}}{\sqrt{2}} & \frac{t_{31}}{\sqrt{2}} & \frac{t_{32}}{\sqrt{2}} & -\frac{t_{32}}{\sqrt{2}} & t_{33} & 0\\
\frac{t_{12}}{\sqrt{2}} & -\frac{t_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{t_{11}}{\sqrt{2}} & \frac{t_{11}}{\sqrt{2}} & 0 & t_{13}\\
\frac{t_{22}}{\sqrt{2}} & -\frac{t_{22}}{\sqrt{2}} & \frac{t_{21}}{\sqrt{2}} & \frac{t_{21}}{\sqrt{2}} & 0 & t_{23}\\
\frac{t_{32}}{\sqrt{2}} & -\frac{t_{32}}{\sqrt{2}} & \frac{t_{31}}{\sqrt{2}} & \frac{t_{31}}{\sqrt{2}} & 0 & t_{33}
\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{T})\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\times&\times&\times&\times&\dfrac{t_{13}+t_{23}}{2}&\dfrac{t_{13}-t_{23}}{2}\\ \times&\times&\times&\times&\dfrac{t_{13}-t_{23}}{2}&\dfrac{t_{13}+t_{23}}{2}\\ \times&\times&\times&\times&\dfrac{t_{13}+t_{23}}{2}&\dfrac{-t_{13}+t_{23}}{2}\\ \times&\times&\times&\times&\dfrac{-t_{13}+t_{23}}{2}&\dfrac{t_{13}+t_{23}}{2}\\ \times&\times&\times&\times&\dfrac{t_{33}}{\sqrt{2}}&\dfrac{t_{33}}{\sqrt{2}}\\ \times&\times&\times&\times&\dfrac{t_{33}}{\sqrt{2}}&-\dfrac{t_{33}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

根据以上分析可得

$$|t_{11}|=|t_{12}|=|t_{21}|=|t_{22}|=|t_{31}|=|t_{32}|=|t_{33}|=\frac{1}{\sqrt{3}};\ \ |t_{13}+t_{23}|=|t_{13}-t_{23}|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \tag{12}$$

于是，在保证幺正性的前提下，可以很容易地构造出满足条件(12)的矩阵 $\boldsymbol{T}$，例如：$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&\omega&\mathrm{i}\\ \mathrm{i}\omega&\mathrm{i}&1\\ \mathrm{i}&-\mathrm{i}&\omega\end{pmatrix}$，或者 $\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&\omega&1\\ \mathrm{i}\omega&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\ -1&1&\omega\end{pmatrix}$，其中 $\omega=(\sqrt[3]{-1})_0=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$. 此时，式(9)和式(10)就是量子系统 $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中一对无偏的不可扩展的最大纠缠基.

参考文献：

[1] Bravyi S, Smolin J A. Unextendible maximally entangled bases[J]. Phys Rev A, 2011, 84: 042306.

[2] Wootters W K, Fields B D. Optimal state-determination by mutually unbiased measurements[J]. Ann Phys, 1989, 191: 363-381.

[3] Englert B G, Aharonov Y. The mean king's problem: prime degrees of freedom[J]. Phys Lett A, 2001, 1: 284.

[4] Fernandez-Perez A, Klimov A B, Saavedra C. Quantum process reconstruction based on mutually unbiased basis [J]. Phys Rev A, 2011, 83: 052332.

[5] Adamson R B A, Steinberg A M. Improving quantum state estimation with mutually unbiased bases[J]. Phys Rev Lett, 2010, 105: 030406.

[6] Yu L C, Lin F, Huang C Y. Quantum secret sharing with multilevel mutually (un)biased bases[J]. Phys Rev A, 2008, 78: 012344.

[7] Cerf N J, Bourennane M, Karlsson A, et al. Security of quantum key distribution using d-level systems[J]. Phys Rev Lett, 2002, 88: 127902.

[8] Chen B, Fei S M. Unextendible maximally entangled bases and mutually unbiased bases[J]. Phys Rev A, 2013, 88: 034301.

[9] 李玮，林平，郑鸿楠，等. 2×3 量子系统中互不偏的不可扩展最大纠缠基[J]. 延边大学学报：自然科学版，2014，40(2)：109-113.

[10] 杨强，陶元红，张军，等. $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中无偏的不可扩展最大纠缠基[J]. 哈尔滨理工大学学报，2014，19(4)：84-87.

[11] 杨强，陶元红，南华，等. $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ 中 Bell 基型不可拓展的最大纠缠基和互不偏基[J]. 吉林大学学报：理学版，2015，53(5)：547-552.

[12] Nizamidin H, Ma T, Fei S M. A note on mutually unbiased unextendible maximally entangled bases in $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$ [J]. Int J Theor Phys, 2015, 54: 326-333.