

文章编号: 1004-4353(2015)02-0132-04

$\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ 中无偏的最大纠缠基的构造

王天娇, 南华*

(延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 在两体空间 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ 上利用 Pauli 矩阵研究了最大纠缠基的具体形式, 并给出了在 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ 系统中构造无偏基的方法以及充要条件. 另外, 利用一个特殊的过渡矩阵 \mathbf{A} , 构造出了 5 组彼此无偏的最大纠缠基.

关键词: 最大纠缠基; 无偏基; Pauli 矩阵; 过渡矩阵

中图分类号: O177.3

文献标识码: A

Construction of mutually unbiased maximally entangled bases in quantum system $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$

WANG Tianjiao, NAN Hua*

(Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: Using the Pauli matrices, the explicit construction of maximally entangled bases in the bipartite quantum system $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ is studied in this paper. A method of constructing mutually unbiased maximally entangled bases in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ is provided, and the necessary and sufficient conditions are given. Moreover, utilizing a special unitary matrix \mathbf{A} , we construct five maximally entangled bases which are mutually unbiased each other.

Key words: maximally entangled bases; mutually unbiased bases; Pauli matrices; transition matrix

无偏基在理论量子信息和实验量子信息等方面具有重要作用. 对于 Hilbert 空间 \mathbf{C}^d 的两组标准正交基 $\{|\alpha_i\rangle\}_{i=0}^{d-1}$ 和 $\{|\beta_j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$, 若有 $|\langle\alpha_i|\beta_j\rangle|^2 = \frac{1}{d} (i, j=1, 2, \dots, d)$, 则称这两组基是彼此无偏的(简记为 MU); 两两相互无偏的一族标准正交基 $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 称作无偏基(简记为 MUB)^[1].

已知空间 \mathbf{C}^d 中 MUB 的最大数目 $N(d)$ 不超过 $d+1$, 且当空间维数 d 是素数幂时, $N(d)=d+1$ ^[2]. 文献[3-4]研究了单体 2 到 6 维空间上的无偏基个数, 对于空间维数 d 是非素数幂的合数时, $N(d)$ 还不确定, 即使是对最小的素数 6. 近来, 人们发现只有在具有最大数目的无偏测量基的系统中 Mean King 问题才能得到解决, 而且最大数目的无偏测量基在量子纠错过程中也具有重要作用^[5], 基于量子无偏基的重要应用, 人们对其纠缠性质进行了研究^[6-7]. 量子纠缠作为一种重要的物理资源, 在量子力学基础和量子信息中起着重要的作用, 并在量子传输、量子纠错、超密编码等方面都有重要应用, 其中最大纠缠态在量子信息处理中尤为重要^[8].

在多体量子系统中 MUB 问题变得更加复杂, MUB 既可以是直积基、最大纠缠基, 也可以是不可扩展的直积基和不可扩展的最大纠缠基等^[9-10]. 文献[9]给出了在三体量子系统 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$ 中无偏基的构造方法; 文献[10-11]在 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$ 空间中研究了由不可扩展的最大纠缠基构造两组无偏基的一般方

法;文献[12]在 $\mathbf{C}^3 \otimes \mathbf{C}^4$ 空间中给出了由不可扩展的最大纠缠基构成的两组无偏基. 基于以上研究,本文研究两体空间 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ 中最大纠缠基的具体形式,以及在 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ 系统中构造无偏基需要满足的充要条件.

1 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ 中的最大纠缠态

定义 1 一个态矢的集合 $\{|\phi_i\rangle \in \mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'} : i=1,2,\dots,dd'\}$ 称为最大纠缠基(简记为 MEB) 当且仅当: (i) $|\phi_i\rangle, i=1,2,\dots,dd'$, 是最大纠缠态; (ii) $\langle\phi_i|\phi_j\rangle=\delta_{ij}, \forall i,j=1,\dots,dd'$.

在两体系统 $A \otimes B$ (A 是 d 维, B 是 d' 维, $d \leq d'$) 中, 态矢 $|\phi\rangle$ 是 $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}$ 中最大纠缠态当且仅当对于子系统 A 的任一给定的归一化正交完备基 $\{|i_A\rangle\}$ 总存在子系统 B 的归一化正交基 $\{|i_B\rangle\}$, 使得

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle^{[13]}.$$

设 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 和 $\{|0'\rangle, |1'\rangle, |2'\rangle, |3'\rangle\}$ 分别是 \mathbf{C}^2 和 \mathbf{C}^4 中的标准正交基, 考虑 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ 中的态矢:

$$|\phi_i^j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i \otimes I_4) (|0\rangle |2j'\rangle + |1\rangle |1+2j'\rangle), i=0,1,2,3, j=0,1. \quad (1)$$

其中 $\sigma_i (i=1,2,3)$ 是 Pauli 矩阵, $\sigma_0 = I_2$ 是 2×2 的单位矩阵. 可以验证式(1)中的 8 个态矢都是最大纠缠的, 同时两两正交. 事实上, 8 个态矢:

$$\begin{aligned} |\phi_0^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |0'\rangle + |1\rangle |1'\rangle), & |\phi_1^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |0'\rangle + |0\rangle |1'\rangle), \\ |\phi_2^0\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} (|1\rangle |0'\rangle - |0\rangle |1'\rangle), & |\phi_3^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |0'\rangle - |1\rangle |1'\rangle), \\ |\phi_0^1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |2'\rangle + |1\rangle |3'\rangle), & |\phi_1^1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |2'\rangle + |0\rangle |3'\rangle), \\ |\phi_2^1\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} (|1\rangle |2'\rangle - |0\rangle |3'\rangle), & |\phi_3^1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |2'\rangle - |1\rangle |3'\rangle), \end{aligned}$$

构成 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ 中的一组最大纠缠基.

令 $\{|\alpha'_i\rangle\}_{i=0}^3$ 为 \mathbf{C}^4 中不同于 $\{|\mathbf{i}'\rangle\}_{i=0}^3$ 的另一组标准正交基, 显然形如式(1), 可得到 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ 中的第 2 组最大纠缠基:

$$|\psi_k^l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_k \otimes I_4) (|0\rangle |\alpha'_{2l}\rangle + |1\rangle |\alpha'_{1+2l}\rangle), k=0,1,2,3, l=0,1. \quad (2)$$

2 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ 中无偏的最大纠缠基的构造

考虑 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ 中的两组最大纠缠基(1)和(2), 根据无偏基的定义可知: 基 $\{|\phi_i^j\rangle\}$ 与 $\{|\psi_k^l\rangle\}$ 彼此无偏当且仅当

$$|\langle\phi_i^j|\psi_k^l\rangle| = \frac{1}{\sqrt{8}}, i,k=0,1,2,3, j,l=0,1. \quad (3)$$

设 4 阶矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{4 \times 4}$ 是 \mathbf{C}^4 中两组标准正交基 $\{|\alpha'_i\rangle\}_{i=0}^3$ 与 $\{|\mathbf{i}'\rangle\}_{i=0}^3$ 间的过渡矩阵, 即 $(|\alpha'_0\rangle, |\alpha'_1\rangle, |\alpha'_2\rangle, |\alpha'_3\rangle) = \mathbf{A}(|0'\rangle, |1'\rangle, |2'\rangle, |3'\rangle)$. 由式(3)易得:

命题 1 最大纠缠基(1)和(2)彼此无偏的充要条件是

$$\begin{aligned} |a_{11} \pm a_{22}| &= |a_{21} \pm a_{12}| = |a_{13} \pm a_{24}| = |a_{23} \pm a_{14}| = |a_{31} \pm a_{42}| = \\ &= |a_{41} \pm a_{32}| = |a_{33} \pm a_{44}| = |a_{43} \pm a_{34}| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

在 \mathbf{C}^4 中再找一组标准正交基 $\{|\beta'_i\rangle\}_{i=0}^3$, 4 阶方阵 $\mathbf{B} = (b_{ij})_{4 \times 4}$ 为过渡矩阵, 满足 $(|\beta'_0\rangle, |\beta'_1\rangle, |\beta'_2\rangle,$

$|\beta'_3\rangle\rangle = B(|\alpha'_0\rangle, |\alpha'_1\rangle, |\alpha'_2\rangle, |\alpha'_3\rangle)$, 则 $(|\beta'_0\rangle, |\beta'_1\rangle, |\beta'_2\rangle, |\beta'_3\rangle) = BA(|0'\rangle, |1'\rangle, |2'\rangle, |3'\rangle)$. 由此可以得到 $C^2 \otimes C^4$ 中又一组最大纠缠基:

$$|\phi_k^l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_k \otimes I_4)(|0\rangle |\beta'_{2l}\rangle + |1\rangle |\beta'_{1+2l}\rangle), k=0,1,2,3, l=0,1. \quad (5)$$

设 $BA = (h_{ij})_{4 \times 4}$, 根据无偏基的定义及式(3), 类似于式(4)可知: 最大纠缠基(5)与(1)、(2)彼此无偏, 则应有

$$|b_{11} \pm b_{22}| = |b_{21} \pm b_{12}| = |b_{13} \pm b_{24}| = |b_{23} \pm b_{14}| = |b_{31} \pm b_{42}| =$$

$$|b_{41} \pm b_{32}| = |b_{33} \pm b_{44}| = |b_{43} \pm b_{34}| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (6)$$

$$|h_{11} \pm h_{22}| = |h_{21} \pm h_{12}| = |h_{13} \pm h_{24}| = |h_{23} \pm h_{14}| = |h_{31} \pm h_{42}| =$$

$$|h_{41} \pm h_{32}| = |h_{33} \pm h_{44}| = |h_{43} \pm h_{34}| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (7)$$

由以上得到如下的结论:

命题 2 在空间 $C^2 \otimes C^4$ 中 3 组最大纠缠基(1)、(2)和(5)两两无偏的充分必要条件是过渡矩阵 A 和 B 满足式(4)、(6)和式(7).

构造尽可能多的无偏基在量子信息中具有重要意义. 在 $C^2 \otimes C^4$ 空间中构造无偏基的关键就是找到能够满足条件(4)、(6)和条件(7)的过渡矩阵. 尽管在理论上给出了构造无偏基的方法和需要满足的条件, 但实际构造无偏基却非易事. 本文找到了一个特殊的过渡矩阵:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -i & -i & i & i \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ i & i & i & i \end{pmatrix}. \quad (8)$$

显然, 矩阵 A 满足条件(4). 利用矩阵 A 可以得到 C^4 中除 $\{|i'\rangle\}_{i=0}^3$ 外的 4 组标准正交基 $\{|\alpha'_i\rangle\}_{i=0}^3$, $\{|\beta'_i\rangle\}_{i=0}^3$, $\{|\gamma'_i\rangle\}_{i=0}^3$, $\{|\epsilon'_i\rangle\}_{i=0}^3$:

$$(|\alpha'_0\rangle, |\alpha'_1\rangle, |\alpha'_2\rangle, |\alpha'_3\rangle) = A(|0'\rangle, |1'\rangle, |2'\rangle, |3'\rangle);$$

$$(|\beta'_0\rangle, |\beta'_1\rangle, |\beta'_2\rangle, |\beta'_3\rangle) = B(|\alpha'_0\rangle, |\alpha'_1\rangle, |\alpha'_2\rangle, |\alpha'_3\rangle);$$

$$(|\gamma'_0\rangle, |\gamma'_1\rangle, |\gamma'_2\rangle, |\gamma'_3\rangle) = C(|\beta'_0\rangle, |\beta'_1\rangle, |\beta'_2\rangle, |\beta'_3\rangle);$$

$$(|\epsilon'_0\rangle, |\epsilon'_1\rangle, |\epsilon'_2\rangle, |\epsilon'_3\rangle) = D(|\gamma'_0\rangle, |\gamma'_1\rangle, |\gamma'_2\rangle, |\gamma'_3\rangle). \quad (9)$$

其中 $B=A$, $C=A^2$, $D=A^4$. 由以上 5 组标准正交基可以构造出 $C^2 \otimes C^4$ 中 5 组最大纠缠基:

$$|\phi_k^l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_i \otimes I_4)(|0\rangle |(2l)'\rangle + |1\rangle |(1+2l)'\rangle), k=0,1,2,3, l=0,1;$$

$$|\psi_k^l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_k \otimes I_4)(|0\rangle |\alpha'_{2l}\rangle + |1\rangle |\alpha'_{1+2l}\rangle), k=0,1,2,3, l=0,1;$$

$$|\phi_k^l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_k \otimes I_4)(|0\rangle |\beta'_{2l}\rangle + |1\rangle |\beta'_{1+2l}\rangle), k=0,1,2,3, l=0,1;$$

$$|\xi_k^l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_k \otimes I_4)(|0\rangle |\gamma'_{2l}\rangle + |1\rangle |\gamma'_{1+2l}\rangle), k=0,1,2,3, l=0,1;$$

$$|\eta_k^l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_k \otimes I_4)(|0\rangle |\epsilon'_{2l}\rangle + |1\rangle |\epsilon'_{1+2l}\rangle), k=0,1,2,3, l=0,1.$$

通过计算验证表明这 5 组基底是两两无偏的.

事实上, $\mathbf{BA} = \mathbf{A}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i-1 & i-1 & 0 \\ 0 & -i-1 & i+1 & 0 \\ i+1 & 0 & 0 & -i-1 \\ i-1 & 0 & 0 & i-1 \end{pmatrix}$ 满足式(6) 和式(7),因而 $\{|\phi_k^l\rangle\}, \{|\psi_k^l\rangle\}$,

$\{|\phi_k^l\rangle\}$ 是 3 组互不偏基. 类似地, 可验证 $\mathbf{CBA} = \mathbf{A}^4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -i & 1 & i \\ 1 & -i & -1 & i \\ -1 & i & -1 & i \\ 1 & i & 1 & i \end{pmatrix}$, $\mathbf{DCBA} = \mathbf{A}^8 =$

$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i-1 & i-1 & 0 \\ 0 & -i-1 & i+1 & 0 \\ i+1 & 0 & 0 & -i-1 \\ i-1 & 0 & 0 & i-1 \end{pmatrix}$ 也都满足形如式(6) 和式(7) 的条件,因而以 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 为过渡矩阵

构造的以上 5 组 $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^4$ 中的基底 $\{|\phi_k^l\rangle\}, \{|\psi_k^l\rangle\}, \{|\phi_k^l\rangle\}, \{|\xi_k^l\rangle\}, \{|\eta_k^l\rangle\} (k=0,1,2,3, l=0,1)$ 彼此无偏. 而 $\mathbf{A}^{16} = -\mathbf{A}$, 所以利用过渡矩阵 \mathbf{A} 按此方法只能得到 5 组无偏基.

注 1 对于任意两体空间这样的酉矩阵 \mathbf{A} 未必一定存在,但对某个过渡矩阵 \mathbf{A} 进行适当的行或列变换,也应该可以类似地得到其他的过渡矩阵 \mathbf{B}, \mathbf{C} 等.

参考文献:

[1] Wootters W K, Fields B D. Optimal state-determination by mutually unbiased measurements[J]. Ann Phys (NY), 1989,191(2):363-381.

[2] Adamson D B A, Steinberg A M. Improving quantum state estimation with mutually unbiased bases[J]. Phys Rev Lett, 2010,105:030406.

[3] Brierley S, Weigert S, Bengtsson I. All mutually unbiased bases in dimension two to five[J]. Quantum Inform Comput, 2010,10:803-820.

[4] McNulty D, Weigert S. The limited role of mutually unbiased product bases in dimension 6[J]. J Phys A: Math Theor, 2012,45(10):102001.

[5] Bennett C H, Wiesner S J. Communication via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Posen states [J]. Phys Rev Lett, 1992,69:2881-2884.

[6] Klimov A B, Sych D, Sanchez-Soto L L, et al. Mutually unbiased bases and generalized Bell states[J]. Phys Rev A, 2009,79:052101.

[7] 雷丽霞,王天娇,南华. $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$ 中的最大纠缠基与无偏基[J]. 延边大学学报:自然科学版,2014,40(4):311-313.

[8] Caruso F, Bechmann-Pasquinucci H, Macchiavello C. Robustness of a quantum key distribution with two and three mutually unbiased bases[J]. Phys Rev A, 2005,72:032340.

[9] Ghiu Iulia. Generation of all sets of mutually unbiased bases for three-qubit systems[J]. Phys Scr, 2013,T153: 014027.

[10] 杨强,陶元红,张军,等. $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$ 中无偏的不可扩展的最大纠缠基[J]. 哈尔滨理工大学学报,2014,19(4):84-87.

[11] Nizamidin H, Ma T, Fei S M. A note on mutually unbiased unextendible maximally entangled bases in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^3$ [J]. Int J Theor Phys, 2015,54:326-333.

[12] Nan H, Tao Y H, Li L S, et al. Unextendible maximally entangled bases and mutually unbiased bases in $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'}$ [J]. Int J Theor Phys, 2015,54:927-932.

[13] Li Z G, Zhao M J, Fei S M, et al. Mixed maximally entangled states[J]. Quant Inf Comput, 2012,12(1/2):63-73.