文章编号：1004-4353(2015)02-0129-03

一个最佳值为对数的 Hilbert 型积分不等式

巫伟亮
（嘉应学院 数学学院，广东 梅州 514015）

摘要：运用参量化思想、估算权函数方法及实分析技巧，建立了一个新的核为 $\frac{\min\{1,x^{\delta\lambda}y^{\lambda}\}}{1+x^{\delta\lambda}y+\max\{1,x^{\delta\lambda}y^{\lambda}\}}$ ($\lambda>0,\delta\in\{1,-1\}$) 的 Hilbert 型积分不等式及其等价形式，并证明了它们的常数因子为最佳值，同时得到了该不等式的一些应用.

关键词：Hilbert 型积分不等式；权函数；等价式；最佳值
中图分类号：O178 **文献标识码**：A

A Hilbert-type integral inequality with the best value as logarithm

WU Weiliang
(*School of Mathematics, Jiaying University, Meizhou* 514015, *China*)

Abstract: By using the though of parametrization, applying the way of weight coefficient and the technique of real analysis, a new Hilbert-type integral inequality with a kernel of independent parameters $\frac{\min\{1,x^{\delta\lambda}y^{\lambda}\}}{1+x^{\delta\lambda}y+\max\{1,x^{\delta\lambda}y^{\lambda}\}}$ ($\lambda>0$, $\delta\in\{1,-1\}$) and its equivalent form are established. Their constant factor is proved to be the best value and its application is given.

Key words: Hilbert-type integral inequality; weight coefficient; equivalent form; the best value

设 $0<\int_0^\infty f^2(x)\mathrm{d}x<\infty$，$0<\int_0^\infty g^2(y)\mathrm{d}y<\infty$，Hilbert[1] 建立了如下著名的积分不等式：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\pi\Big[\int_0^\infty f^2(x)\mathrm{d}x\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[\int_0^\infty g^2(y)\mathrm{d}y\Big]^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

其中常数因子 π 都是最佳值. 近年来，杨必成等对含齐次及非齐次核进行了研究，并对不等式(1)进行了推广和改进[3-6]. 2012 年，巫伟亮[7] 得到了一个含多参数的 Hilbet 型积分不等式：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\min\{x,y\}}{x+y+\max\{x,y\}}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<c\Big[\int_0^\infty xf^2(x)\mathrm{d}x\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[\int_0^\infty yg^2(y)\mathrm{d}y\Big]^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

其中 $c=2\ln(\frac{3}{2})$ 是式(2)的最佳值. 本文在此基础上通过运用参量化思想、估算权函数和实分析的方法得到一个新的核为

$$k(x,y):=\frac{\min\{1,x^{\delta\lambda}y^{\lambda}\}}{1+x^{\delta\lambda}y+\max\{1,x^{\delta\lambda}y^{\lambda}\}}\text{(下同)}$$

的 Hilbert 积分不等式及其等价形式，并证明了它们的常数因子是最佳值.

收稿日期：2015-02-26 **作者简介**：巫伟亮(1983—)，男，博士，讲师，研究方向为解析不等式和偏微分方程.
基金项目：广东省自然科学基金博士启动项目(S2013040015141)；嘉应学院科研重点项目(2012KJZ02)

1 引理及其证明

引理 1 若 $\lambda>0$, $\delta\in\{-1,1\}$, 定义权函数 $\omega_{\lambda,\delta}(y):=\int_0^\infty k(x,y)\frac{1}{x}\mathrm{d}x\,(y>0)$, $\omega_{\lambda,\delta}(x):=\int_0^\infty k(x,y)\frac{1}{y}\mathrm{d}x\,(x>0)$, 则有 $\omega_{\lambda,\delta}(y)=\omega_{\lambda,\delta}(x)=\frac{2}{\lambda}\ln(\frac{3}{2})$.

证明 令 $u=x^{\delta\lambda}y^{\lambda}$, 有 $\omega_{\lambda,\delta}(y)=\int_0^\infty k(x,y)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty\frac{\min\{1,u\}}{1+u+\max\{1,u\}}\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{\lambda}\cdot\left(\int_0^1\frac{1}{2+u}\mathrm{d}u+\int_1^\infty\frac{u^{-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right)=\frac{2}{\lambda}\left(\ln\frac{3}{2}\right)$, 所以有 $\omega_{\lambda,\delta}(y)=\frac{2}{\lambda}\ln(\frac{3}{2})$. 同理可证 $\omega_{\lambda,\delta}(x)=\frac{2}{\lambda}\ln(\frac{3}{2})$.

引理 2 若 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\lambda>0$, $\delta\in\{-1,1\}$, $f(x)\geqslant 0$, 则有

$$J:=\int_0^\infty y^{-1}\left[\int_0^\infty k(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y\leqslant\left(\frac{2}{\lambda}\ln(\frac{3}{2})\right)^p\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

证明 由 Hölder 不等式[8], 有

$$\int_0^\infty k(x,y)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty k(x,y)\left[\frac{x^{1/q}}{y^{1/p}}f(x)\right]\left[\frac{y^{1/p}}{x^{1/q}}\right]\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^\infty k(x,y)\frac{x^{p-1}}{y}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\cdot\left(\int_0^\infty k(x,y)\frac{y^{q-1}}{x}\mathrm{d}x\right)^{1/q}=y^{1/p}\left[\omega_{\lambda,\delta}(y)\right]^{1/q}\left(\int_0^\infty k(x,y)\frac{x^{p-1}}{y}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}. \tag{5}$$

根据引理 1 的计算结果, 应用交换积分变换的 Fubini 定理[9], 有

$$J\leqslant\left(\frac{2}{\lambda}\ln(\frac{3}{2})\right)^{p-1}\int_0^\infty\int_0^\infty k(x,y)\frac{x^{p-1}}{y}f^p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{2}{\lambda}\ln(\frac{3}{2})\right)^{p-1}\int_0^\infty\omega_{\lambda,\delta}(x)x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x,$$

故式(4) 成立. 证毕.

2 主要结果及其证明

定理 1 若 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\lambda>0$, $\delta\in\{-1,1\}$, $f(x),g(y)\geqslant 0$, 且 $0<\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$, $0<\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y<\infty$, 则有如下的等价不等式:

$$I:=\int_0^\infty\int_0^\infty k(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{2}{\lambda}\ln(\frac{3}{2})\left(\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q}, \tag{6}$$

$$J=\int_0^\infty y^{-1}\left[\int_0^\infty k(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y<\left(\frac{2}{\lambda}\ln(\frac{3}{2})\right)^p\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

证明 若有 $y>0$, 使式(5) 取等号, 则有不全为 0 的常数 A,B(不妨设 $A\neq 0$), 使得 $A\frac{x^{p-1}}{y}f^p(x)=B\frac{y^{q-1}}{x}$ a. e. 于$(0,\infty)$. 若 $A=0$, 则 $B=0$. 故不妨设 $A\neq 0$, 有 $x^{p-1}f^p(x)=y^q\frac{B}{Ax}$ a. e. 于$(0,\infty)$. 这与 $0<\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$ 矛盾, 因而式(5) 取严格不等号. 式(4) 亦然, 故式(7) 成立.

由 Hölder 不等式[8], 有

$$I=\int_0^\infty\left[y^{-1/p}\int_0^\infty k(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right]\left[y^{1/p}g(y)\right]\mathrm{d}y\leqslant J^{1/p}\left(\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q}. \tag{8}$$

于是由式(7) 可得式(6). 另一方面, 令 $g(y):=y^{-1}\left[\int_0^\infty k(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right]^{p-1}$, 则 $J=\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y$, 再由式(4) 有 $J<\infty$. 若 $J=0$, 则式(7) 自然成立; 若 $J>0$, 则由式(6) 有:

$$0<\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y=J=I<\frac{2}{\lambda}\ln(\frac{3}{2})\left(\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q},$$

$$J^{1/p}=\left(\int_0^{\infty}y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p}<\frac{2}{\lambda}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(\int_0^{\infty}x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}. \tag{9}$$

将式(9) 两边 p 次方，可得式(7)，且它与式(6) 等价，证毕.

定理 2　在定理 1 的条件下，式(6) 与式(7) 的常数因子 $\frac{2}{\lambda}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ 及 $\left(\frac{2}{\lambda}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)^p$ 都是最佳值.

证明　任意给定 $\varepsilon>0$，$E_\delta:=\{x>0;x^\delta\leqslant 1\}$，设

$$\tilde{f}(x):=\begin{cases}x^{\delta\varepsilon/p-1}, & x\in E_\delta;\\ 0, & x\in R_+\setminus E_\delta.\end{cases}\quad \tilde{g}(y):=\begin{cases}0, & y\in(0,1);\\ y^{-\varepsilon/q-1}, & y\in[1,\infty).\end{cases}$$

则可算得 $\tilde{J}:=\left(\int_0^{\infty}x^{p-1}\tilde{f}^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^{\infty}y^{q-1}\tilde{g}^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q}=\frac{1}{\varepsilon}$. 由交换积分次序的 Fubini 定理，可得

$$\tilde{I}:=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}k(x,y)\tilde{f}(x)\tilde{g}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{\infty}y^{-\varepsilon/q-1}\left[\int_{E_\delta}k(x,y)x^{\delta\varepsilon/p-1}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\overset{u=x^{\lambda\delta}y^{\lambda}}{=}$$

$$\frac{1}{\lambda}\int_1^{\infty}y^{-\varepsilon-1}\left[\int_0^{y^\lambda}\frac{\min\{1,u\}}{1+u+\max\{1,u\}}u^{\varepsilon/\lambda p-1}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y=$$

$$\frac{1}{\lambda}\left\{\int_1^{\infty}y^{-\varepsilon-1}\left[\int_0^1\frac{u^{\varepsilon/\lambda p}}{2+u}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y+\int_1^{\infty}y^{-\varepsilon-1}\left[\int_1^{y^\lambda}\frac{u^{\varepsilon/\lambda p-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y\right\}=$$

$$\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1\frac{u^{\varepsilon/\lambda p}}{2+u}\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}\left(\int_{u^{1/\lambda}}^{\infty}y^{-\varepsilon-1}\mathrm{d}y\right)\frac{u^{\varepsilon/\lambda p-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right]=\frac{1}{\lambda\varepsilon}\left[\int_0^1\frac{u^{\varepsilon/\lambda p}}{2+u}\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}\frac{u^{-\varepsilon/\lambda q-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right].$$

若存在正数 $k\leqslant\frac{2}{\lambda}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$，使其取代式(6) 的常数因子 $\frac{2}{\lambda}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ 后仍成立，则代入 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$，由上面的结果得

$$\frac{1}{\lambda}\left[\int_0^1\frac{u^{\varepsilon/\lambda p}}{2+u}\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}\frac{u^{-\varepsilon/\lambda q-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right]=\varepsilon\tilde{I}<\varepsilon k\tilde{J}=k. \tag{10}$$

由 Fatou 引理[9]、式(10) 及极限的保号性，得

$$\frac{2}{\lambda}\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{\lambda}\left[\int_0^1\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{u^{\varepsilon/\lambda p}}{2+u}\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{u^{-\varepsilon/\lambda q-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right]\leqslant\frac{1}{\lambda}\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_0^1\frac{u^{\varepsilon/\lambda p}}{2+u}\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}\frac{u^{-\varepsilon\lambda/q-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right]\leqslant k,$$

故 $k=\frac{2}{\lambda}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ 必为式(6) 的最佳值，式(7) 的常数因子 $\left(\frac{2}{\lambda}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)^p$ 必为最佳值. 不然，由式(8) 必导出式(6) 的常数因子也不为最佳值，矛盾. 证毕.

注 1　在式(6) 中，取 $\delta=-1$，$p=q=2$，$\lambda=1$，得式(2)，可见式(6) 是式(2) 的最佳推广.

注 2　在式(6)、(7) 中，取 $\delta=1$，$p=q=2$，$\lambda=1$，可得到一个新的具有最佳常数因子的非齐次核 Hilbert 型积分不等式及其等价形式：

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\{1,xy\}}{1+xy+\min\{1,xy\}}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<2\ln\left(\frac{3}{2}\right)\left(\int_0^{\infty}xf^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^{\infty}yg^2(y)\mathrm{d}y\right)^{1/2}, \tag{11}$$

$$J=\int_0^{\infty}y^{-1}\left[\int_0^{\infty}\frac{\min\{1,xy\}}{1+xy+\max\{1,xy\}}f(x)\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y<4\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2\int_0^{\infty}xf^2(x)\mathrm{d}x. \tag{12}$$

参考文献：

[1] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952:255-292.

[2] Mintrinovice D S, Pecaric J E, Fink A M. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991:187-215.

[3] 杨必成. 参量化的 Hilbet 型不等式研究综述[J]. 数学进展，2009，38(3)：257-268.

[4] 杨必成. 一个零齐次核的 Hilbert 型积分不等式[J]. 山东大学学报：理学版，2010，45(2)：103-106.

[5] 刘琼. 一个多参数的 Hilbert 型积分不等式[J]. 吉林大学学报：理学版，2009，47(5)：903-908.

[6] 巫伟亮. 一个最佳常数为 Beta 函数的 Hilbert 型积分不等式[J]. 延边大学学报：自然科学版，2014，40(2)：100-103.

[7] 巫伟亮. 一个含多参数的 Hilbert 型积分不等式[J]. 广西师范学院学报：自然科学版，2012，29(2)：34-36.

[8] 匡继昌. 常用不等式[M]. 济南：山东科技出版社，2004：3-29.

[9] 匡继昌. 实分析引论[M]. 长沙：湖南教育出版社，1996：118-122.