

文章编号: 1004-4353(2015)02-0124-05

一类带有参数的 q -差分方程边值问题 正解的存在性

孙明哲, 侯成敏

(延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 研究了一类带有参数的 q -差分方程正解的存在性. 首先给出了该问题解的表达式, 并分析了格林函数的性质, 然后利用 Banach 空间锥上的不动点指数定理得到了当参数 λ 属于不同范围时正解存在性的充分条件, 最后用具体实例验证了文中的结论.

关键词: q -差分方程; 边值问题; 参数; 不动点定理

中图分类号: O175.8 **文献标识码:** A

Existence of positive solutions of q -differences equations with parameter

SUN Mingzhe, HOU Chengmin

(*Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China*)

Abstract: We study the existence of positive solutions for the q -differences equation with parameter. Firstly, the expression of solutions is presented, and some characteristics of the Green function were analyzed. Secondly, by applying fixed point index theorem of Banach spaces cone, we obtained sufficient conditions for the existence of the positive solutions when parameters belong to different ranges. Finally, the main results were illustrated with some examples.

Key words: q -difference equation; boundary value problem; parameter; fixed point theorem

1910 年, Jackson 引入了 q -微积分概念^[1], 之后由 Al-Salam 和 Agarwal 给出了分数阶 q -微积分的基本概念和基本性质^[2]. 近年来, 分数阶 q -差分边值问题作为新的研究方向受到国内外学者的关注, 并取得了一些研究成果^[3-8], 但对于含有分数阶边值条件的边值问题报道的很少. 本文将探讨带有参数和分数阶边值条件的 q -差分边值问题

$$\begin{cases} (D_q^\alpha u)(t) + \lambda g(t)f(u(t)) = 0, & 0 \leq t \leq 1; \\ u(0) = D_q u(0) = D_q u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\quad (2)$$

的正解的存在性, 其中 $2 < \alpha < 3$, $1 < \nu < 2$, 参数 $\lambda > 0$, D_q^α 是 Riemann-Liouville 型分数阶 q -导数.

本文假设下列条件成立:

- (H₁) $f: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ 为连续函数;
(H₂) $g: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ 为连续函数, 且在 $[0, 1]$ 的任意子区间上不恒为零;

$$(H_3) \quad 0 < \int_0^1 [(1-qs)^{(\alpha-\nu-1)} - (1-qs)^{(\alpha-1)}] g(s) d_qs < \infty, \int_{\eta}^1 g(s) d_qs > 0.$$

1 主要结果及其证明

定义 1^[2] 分数阶 q -积分定义为 $(I_q^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^x (x-qt)^{(\alpha-1)} f(t) d_qt$, $\alpha > 0$, $x \in [0, 1]$, 其中 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的函数, 规定 $(I_q^0 f)(x) = f(x)$.

定义 2^[2] Riemann-Liouville 型分数阶 q -导数定义为 $(D_q^\alpha f)(x) = (D_q^m I_q^{m-\alpha} f)(x)$, $\alpha > 0$, $x \in [0, 1]$, 其中 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的函数, 规定 $(D_q^0 f)(x) = f(x)$, m 是不小于 α 的最小整数.

定义 3^[2] 设 $\alpha \in \mathbf{R}^+$, $\lambda \in (-1, \infty)$, 则 $I_q^\alpha((x-a)^{(\lambda)}) = \frac{\Gamma_q(\lambda+1)}{\Gamma_q(\alpha+\lambda+1)} (x-a)^{(\alpha+\lambda)}$, $0 < a < x < b$.

引理 1^[9] Ω 为Banach空间 \mathbf{B} 中的有界开子集, 且零元 $\theta \in \Omega$, 令 $T: K \cap \bar{\Omega} \rightarrow K$ 是完全连续的, 若对于任意 $u \in K \cap \bar{\Omega}$ 和 $0 < \mu \leq 1$, 使得 $\mu Tu \neq u$ 成立, 则不动点指数 $i(T, K \cap \Omega, K) = 1$.

引理 2^[9] Ω 为Banach空间 \mathbf{B} 中的有界开子集, 令 $T: K \cap \bar{\Omega} \rightarrow K$ 是完全连续的, 若存在 $\gamma \in K/\{\theta\}$, 对于任意 $u \in K \cap \partial\Omega$, $\tau \geq 0$, 使得 $u - Tu \neq \tau\gamma$ 成立, 则不动点指数 $i(T, K \cap \Omega, K) = 0$.

定理 1 设 $2 < \alpha < 3$, $1 < \nu < 2$, $u(t)$ 是问题(1)和(2)的解的充要条件是它具有以下形式:

$$u(t) = \lambda \int_0^1 G(t, qs) g(s) f(u(s)) d_qs, \quad (3)$$

其中 $G(t, qs) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1} (1-qs)^{(\alpha-\nu-1)} - (t-qs)^{(\alpha-1)}, & 0 \leq qs \leq t \leq 1; \\ t^{\alpha-1} (1-qs)^{(\alpha-\nu-1)}, & 0 \leq t \leq qs \leq 1. \end{cases}$

证明 假设 $u(t)$ 是问题(1)的解, 则有

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + C_3 t^{\alpha-3} - \lambda I_q^\alpha g(t) f(u(t)), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

利用边值条件(2)解得 $C_1 = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{(\alpha-\nu-1)} \lambda g(s) f(u(s)) d_qs$, $C_2 = C_3 = 0$. 将 C_1, C_2 和 C_3 代入

式(4)得 $u(t) = \lambda \int_0^1 G(t, qs) g(s) f(u(s)) d_qs$, 其中格林函数为

$$G(t, qs) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1} (1-qs)^{(\alpha-\nu-1)} - (t-qs)^{(\alpha-1)}, & 0 \leq qs \leq t \leq 1; \\ t^{\alpha-1} (1-qs)^{(\alpha-\nu-1)}, & 0 \leq t \leq qs \leq 1. \end{cases}$$

反之, 如果 $u(t)$ 满足式(3), 不难推出 $u(t)$ 是问题(1)和(2)的解. 证毕.

注 1^[7] 若 $\alpha > 0$, $a \leq b \leq t$, 则 $(t-a)^{(\alpha)} \geq (t-b)^{(\alpha)}$.

定理 2 格林函数 $G(t, qs)$ 具有以下性质:

① $0 \leq G(t, qs) \leq G(1, qs)$, 对一切 $s, t \in [0, 1]$;

② $G(t, qs) \geq k(t)G(1, qs)$, 对一切 $s, t \in [0, 1]$, 这里 $k(t) = t^{\alpha-1}$.

证明 记 $g_1(t, qs) = (1-qs)^{(\alpha-\nu-1)} t^{\alpha-1} - (t-qs)^{(\alpha-1)}$, $0 \leq qs \leq t \leq 1$, $g_2(t, qs) = (1-qs)^{(\alpha-\nu-1)} t^{\alpha-1}$, $0 \leq t \leq qs \leq 1$.

1) 显然 $g_2(t, qs) \geq 0$. 由注1得 $g_1(t, qs) = (1-qs)^{(\alpha-\nu-1)} t^{\alpha-1} - (t-qs)^{(\alpha-1)} = t^{\alpha-1} [(1-qs)^{(\alpha-\nu-1)} - (1-\frac{qs}{t})^{(\alpha-1)}] \geq t^{\alpha-1} [(1-qs)^{(\alpha-\nu-1)} - (1-qs)^{(\alpha-1)}]$, 因为 $1 < \nu < 2$, 故有 $(1-qs)^{(\alpha-\nu-1)} - (1-qs)^{(\alpha-1)} =$

$\prod_{n=0}^{+\infty} \frac{1-sq^{n+1}}{1-sq^{n+\alpha}} - \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{1-sq^{n+1}}{1-sq^{n+\alpha}} \geq 0$, 从而对于 $t \in [0, 1]$, $G(t, qs) \geq 0$. 显然, 当 $0 \leq t \leq qs \leq 1$ 时, $g_2(t, qs)$ 关于 t 是单调递增的. 由于 ${}_t D_q g_1(t, qs) = [\alpha-1]_q (1-qs)^{(\alpha-\nu-1)} t^{\alpha-2} - [\alpha-1]_q (t-qs)^{(\alpha-2)} = t^{\alpha-2} [\alpha-1]_q [(1-qs)^{(\alpha-\nu-1)} - (1-\frac{qs}{t})^{(\alpha-2)}] > t^{\alpha-2} [\alpha-1]_q [(1-qs)^{(\alpha-\nu-1)} - (1-qs)^{(\alpha-2)}] \geq 0$ 可知, 当 $0 \leq qs \leq$

$t \leq 1$ 时, $g_1(t, qs)$ 关于 t 是单调递增的, 故有 $G(t, qs) \leq G(1, qs)$.

2) 当 $0 \leq qs \leq t \leq 1$ 时,

$$\frac{G(t, qs)}{G(1, qs)} = \frac{t^{a-1}(1-qs)^{(a-\nu-1)} - (t-qs)^{(a-1)}}{(1-qs)^{(a-\nu-1)} - (1-qs)^{(a-1)}} \geq t^{a-1} \frac{(1-qs)^{(a-\nu-1)} - (1-qs)^{(a-1)}}{(1-qs)^{(a-\nu-1)} - (1-qs)^{(a-1)}} = t^{a-1};$$

当 $0 \leq t \leq qs \leq 1$ 时,

$$\frac{G(t, qs)}{G(1, qs)} = \frac{t^{a-1}(1-qs)^{(a-\nu-1)}}{(1-qs)^{(a-\nu-1)} - (1-qs)^{(a-1)}} \geq \frac{t^{a-1}(1-qs)^{(a-\nu-1)}}{(1-qs)^{(a-\nu-1)}} = t^{a-1}.$$

从而可得, 当 $t, s \in [0, 1]$ 时, 有 $G(t, qs) \geq t^{a-1}G(1, qs)$. 证毕.

下面记 Banach 空间 $\mathbf{B} = C[0, 1]$, 赋范数 $\|u\| = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|$. 定义锥 $P \subseteq \mathbf{B}$ 为 $P = \{u \in C[0, 1] : \min_{t \in [\eta, 1]} u(t) \geq \eta^{a-1} \|u\|, 0 < \eta < 1\}$, 定义算子 $T: P \rightarrow P$, 且

$$(Tu)(t) = \lambda \int_0^1 G(t, qs) g(s) f(u(s)) d_qs, \quad t \in [0, 1]. \quad (5)$$

由定理 1 知, 问题(1) 和(2) 有解当且仅当算子 T 有不动点.

定理 3 算子 $T: P \rightarrow P$ 是完全连续的.

证明 由函数 G, f, g 的连续性可知算子 $T: P \rightarrow P$ 是连续的, 再由定理 2 得

$$\min_{t \in [\eta, 1]} (Tu)(t) \geq \eta^{a-1} \lambda \int_0^1 G(1, qs) g(s) f(u(s)) d_qs = \eta^{a-1} \|Tu\|,$$

因此 $T(P) \subset P$. 取 Ω 是 P 的任意有界子集, 则对于 $u \in \Omega$, 存在一个常数 $M > 0$, 使得 $\|u\| < M$. 令

$L = \max_{\|u\| \leq M} |g(t)f(u(t))|$, 可得 $|(Tu)(t)| \leq \lambda \int_0^1 |G(t, qs)g(s)f(u(s))| d_qs \leq \lambda L \int_0^1 G(1, qs) d_qs$, 因此

$T(\Omega)$ 有界.

对于任意 $t_1, t_2 \in [0, 1]$ 且 $t_1 < t_2$, 有

$$\begin{aligned} |(Tu)(t_2) - (Tu)(t_1)| &\leq \lambda L \int_0^1 |G(t_2, qs) - G(t_1, qs)| d_qs = \frac{\lambda L}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^{t_1} [t_2^{a-1}(1-qs)^{(a-\nu-1)} - \\ &\quad (t_2-qs)^{(a-1)} - t_1^{a-1}(1-qs)^{(a-\nu-1)} + (t_1-qs)^{(a-1)}] d_qs + \frac{\lambda L}{\Gamma_q(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} [t_2^{a-1}(1-qs)^{(a-\nu-1)} - \\ &\quad (t_2-qs)^{(a-1)} - t_1^{a-1}(1-qs)^{(a-\nu-1)}] d_qs + \frac{\lambda L}{\Gamma_q(\alpha)} \int_{t_2}^1 [t_2^{a-1}(1-qs)^{(a-\nu-1)} - t_1^{a-1}(1-qs)^{(a-\nu-1)}] d_qs = \\ &\quad \frac{\lambda L}{\Gamma_q(\alpha)} \left[\int_0^{t_2^{a-1}-t_1^{a-1}} (1-qs)^{(a-\nu-1)} d_qs + \int_0^{t_1} (t_1-qs)^{(a-1)} d_qs - \int_0^{t_2} (t_2-qs)^{(a-1)} d_qs \right] \leq \\ &\quad \frac{\lambda L}{\Gamma_q(\alpha)} \left[(t_2^{a-1} - t_1^{a-1}) \int_0^1 d_qs + \int_0^{t_1} (t_1-qs)^{(a-1)} d_qs - \int_0^{t_2} (t_2-qs)^{(a-1)} d_qs \right] = \\ &\quad \frac{\lambda L}{\Gamma_q(\alpha)} \left[(t_2^{a-1} - t_1^{a-1}) + \frac{1}{[\alpha]_q} (t_1^a - t_2^a) \right] \leq \frac{\lambda L}{\Gamma_q(\alpha)} \left[(t_2^{a-1} - t_1^{a-1}) + (t_1^a - t_2^a) \right] \leq \frac{\lambda L}{\Gamma_q(\alpha)} (t_2^{a-1} - t_1^{a-1}). \end{aligned}$$

由于函数 t^{a-1} 在 $[0, 1]$ 上都是一致连续的, 因此算子 $T(P)$ 在 $[0, 1]$ 上是等度连续的, 由 Arzela-Ascoli 定理知, 算子 $T: P \rightarrow P$ 是完全连续的. 证毕.

为了方便, 定义如下记号:

$$f^0 = \limsup_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u}, \quad f_0 = \liminf_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u}, \quad f^\infty = \limsup_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u}, \quad f_\infty = \liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u},$$

$$B = \left(\max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, qs) g(s) d_qs \right)^{-1}, \quad C = \left(\min_{\eta \leq t \leq 1} \int_\eta^1 G(t, qs) g(s) d_qs \right)^{-1}.$$

定理 4 假设条件 $(H_1) - (H_3)$ 成立, 且有 $f_\infty > 0$, $f^0 < \infty$, $\frac{B}{f^0} > \frac{C}{f_\infty}$, 则对于任意 $\lambda \in \left(\frac{C}{f_\infty}, \frac{B}{f^0} \right)$,

问题(1) 和(2) 至少有一个正解.

证明 由 $\lambda < \frac{B}{f^0}$ 知, $f^0 < \frac{B}{\lambda}$. 存在常数 $R, \epsilon_1 > 0$, 当 $0 < u \leq R$ 时, 有 $\frac{f(u)}{u} \leq \frac{1}{\lambda}(B - \epsilon_1)$, 即

$$f(u) \leq \frac{1}{\lambda}(B - \epsilon_1)u \leq \frac{1}{\lambda}(B - \epsilon_1)R, \quad 0 < u \leq R. \quad (6)$$

令 $\Omega_1 = \{u \in C[0, 1]: \|u\| < R\}$, 由 $u \in P \cap \partial\Omega_1$ 和式(5), 表明

$$\begin{aligned} \|(Tu)(t)\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \lambda \int_0^1 G(t, qs)g(s)f(u(s))d_qs \leq \\ &\frac{1}{\lambda}(B - \epsilon_1)R \max_{0 \leq t \leq 1} \lambda \int_0^1 G(t, qs)g(s)d_qs = R - \epsilon_1 R \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, qs)g(s)d_qs < R. \end{aligned}$$

因此, 对于任意 $u \in P \cap \partial\Omega_1$, $0 < \mu \leq 1$, 当 $\|u\| = R$ 时, $\mu Tu \neq u$ 成立. 于是算子 T 在 $u \in P \cap \partial\Omega_1$ 上满足引理1的条件, 即

$$i(T, P \cap \Omega_1, P) = 1. \quad (7)$$

同理, 由条件 $\lambda > \frac{C}{f_\infty}$ 和 f_∞ 的定义知, 存在 $H > \eta^{\alpha-1}R$, $\epsilon_2 > 0$, 当 $u \geq H$ 时, $\frac{f(u)}{u} \geq \frac{1}{\lambda}(C + \epsilon_2)$.

令 $R_1 = \frac{H}{\eta^{\alpha-1}} > R$, $\Omega_2 = \{u \in C[0, 1]: \|u\| < R_1\}$, 则对于 $u \in P \cap \partial\Omega_2$, 有 $\min\{u(t): t \in [\eta, 1]\} \geq \eta^{\alpha-1}\|u\| = H$ 成立.

选取 $e(t) \equiv 1$, $e \in P \setminus \{\theta\}$, 然后证明算子 T 满足引理2的条件, 即对于任意 $u \in P \cap \partial\Omega_2$, $\tau \geq 0$ 使得 $u - Tu \neq \tau e$. 用反证法, 假设存在 $u_0 \in P \cap \partial\Omega_2$, $\tau_0 \geq 0$ 使得 $u_0 - Tu_0 = \tau_0 e$ 成立. 令 $\sigma = \min\{u_0(t): t \in [\eta, 1]\} \geq \eta^{\alpha-1}\|u_0\| = \eta^{\alpha-1}R_1$, 于是有 $u_0(t) = \lambda \int_0^1 G(t, qs)g(s)f(u_0(s))d_qs + \tau_0 \geq \frac{1}{\lambda}(C + \epsilon_2)\sigma$.

$\min_{\eta \leq t \leq 1} \lambda \int_0^1 G(t, qs)g(s)d_qs + \tau_0 = \sigma + \epsilon_2\sigma \min_{\eta \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, qs)g(s)d_qs + \tau_0 > \sigma$, 矛盾. 因此, 算子 T 在 $u \in P \cap \partial\Omega_2$ 上满足引理2的条件, 即

$$i(T, P \cap \Omega_2, P) = 0. \quad (8)$$

由式(7)和式(8)知, $i(T, P \cap (\Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1), P) = i(T, P \cap \Omega_2, P) - i(T, P \cap \Omega_1, P) = -1$, 因此, 算子 T 在 $P \cap (\Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1)$ 上有不动点, 即问题(1)和(2)有一个正解.

注2 若 $f_\infty = \infty$, 则取 $\frac{C}{f_\infty} = 0$; 若 $f^0 = 0$, 则取 $\frac{B}{f^0} = \infty$.

定理5 假设条件 $(H_1) - (H_3)$ 成立, 且有 $f_0 > 0$, $f^\infty < \infty$, $\frac{B}{f^\infty} > \frac{C}{f_0}$, 则对于任意 $\lambda \in (\frac{C}{f_0}, \frac{B}{f^\infty})$, 问题(1)和(2)至少有一个正解.

证明 由 $\lambda < \frac{B}{f^\infty}$ 知, $f^\infty < \frac{B}{\lambda}$. 存在常数 $R_2, \epsilon_3 > 0$, 当 $u > R_2$ 时, 有 $\frac{f(u)}{u} \leq \frac{1}{\lambda}(B - \epsilon_3)$. 令 $a = \max\{f(u): 0 \leq u \leq R_2\}$, 则 $f(u) \leq a + \frac{1}{\lambda}(B - \epsilon_3)u$, $u \geq 0$. 令 $R_3 > \frac{aB}{\epsilon_3 f^\infty}$, $\Omega_3 = \{u \in C[0, 1]: \|u\| < R_3\}$, 对于 $u \in P \cap \partial\Omega_3$, 有

$$\begin{aligned} \|(Tu)(t)\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \lambda \int_0^1 G(t, qs)g(s)f(u(s))d_qs \leq \\ &\left(a + \frac{1}{\lambda}(B - \epsilon_3)\|u\|\right) \max_{0 \leq t \leq 1} \lambda \int_0^1 G(t, qs)g(s)d_qs \leq \\ &B\|u\| \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, qs)g(s)d_qs + \left(a - \frac{1}{\lambda}\epsilon_3\|u\|\right) \max_{0 \leq t \leq 1} \lambda \int_0^1 G(t, qs)g(s)d_qs \leq \\ &R_3 + \left(a - \frac{1}{\lambda}\epsilon_3 R_3\right) \lambda \int_0^1 [(1-s)^{(\alpha-\nu-1)} - (1-s)^{(\alpha-1)}]g(s)d_qs < R_3. \end{aligned}$$

因此,对于任意 $u \in P \cap \partial\Omega_3$, $0 < \mu \leq 1$, 当 $\|u\| = R_3$ 时, $\mu Tu \neq u$. 于是算子 T 在 $P \cap \partial\Omega_3$ 上满足引理 1 的条件, 即

$$i(T, P \cap \Omega_3, P) = 1. \quad (9)$$

同理, 由条件 $\lambda > \frac{C}{f_0}$ 和 f_0 的定义知, 存在 $R_4, \epsilon_4 > 0$, 使得 $\frac{1}{\lambda}(C + \epsilon_4) \leq f_0$, 且 $0 < R_4 < R_3$. 当 $0 < u < R_4$ 时, 有 $f(u) \geq \frac{(C + \epsilon_4)}{\lambda}u$ 成立. 令 $\Omega_4 = \{u \in C[0, 1]: \|u\| < R_4\}$, 选取 $e(t) \equiv 1$, 通过与定理 4 类似的证明可得, 对于任意 $u \in P \cap \partial\Omega_4$, $\tau \geq 0$, $u - Tu \neq \tau e$ 成立. 进而, 由引理 2 得到

$$i(T, P \cap \Omega_4, P) = 0. \quad (10)$$

由式(10)、(11) 和 $\overline{\Omega_4} \subset \Omega_3$ 可知, $i(T, P \cap (\Omega_3 \setminus \overline{\Omega_4}), P) = i(T, P \cap \Omega_3, P) - i(T, P \cap \Omega_4, P) = 1$, 因此, 算子 T 在 $P \cap (\Omega_3 \setminus \overline{\Omega_4})$ 上有不动点, 即问题(1) 和(2) 有一个正解.

注 3 若 $f_0 = \infty$, 则取 $\frac{C}{f_0} = 0$; 若 $f^\infty = 0$, 则取 $\frac{B}{f^\infty} = \infty$.

2 应用举例

例 1 考虑边值问题

$$\begin{cases} (D_{\frac{5}{q}}u)(t) + \lambda \frac{t(u + u^4)}{3 + 2u^5} = 0, & 0 \leq t \leq 1; \\ u(0) = D_q u(0) = D_{\frac{3}{q}}u(1) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

其中 λ 是正参数, 显然 $f(u) = \frac{(u + u^4)}{3 + 2u^5}$, $g(t) = t$. 取常数 $q = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{2}$, 经计算得 $\int_0^1 [(1 - qs)^{(a-\nu-1)} - (1 - qs)^{(a-1)}]g(s)d_qs = \frac{410}{651}$, $\int_\eta^1 g(s)d_qs = \frac{1}{2}$, 结果满足条件 $(H_1) - (H_3)$. 又由 $f_\infty = +\infty$, $f^0 = 0$, $B = \left(\int_0^1 G(1, qs)g(s)d_qs\right)^{-1}$, $C = \left(\eta^{a-1} \int_\eta^1 G(1, qs)g(s)d_qs\right)^{-1}$ 知, $\frac{C}{f_\infty} = 0$, $\frac{B}{f^0} = \infty$, 满足定理 5 的假设条件, 因此可知对于任意 $\lambda \in (0, +\infty)$, 问题(11) 至少有一个正解.

参考文献:

- [1] Jackson F H. q -difference equations Amer[J]. J Math, 1910, 32(4):305-314.
- [2] Al-Salam W A. Some fractional q -integrals and q -derivatives[J]. Proc Edinb Math Soc, 1966, 15(2):135-140.
- [3] Yang W. Positive solutions for boundary value problems involving nonlinear fractional q -difference equations[J]. Differ Equ Appl, 2013, 5:205-219.
- [4] Zhang Q. Existence and multiplicity of positive solutions for nonhomogeneous boundary value problems with fractional q -derivative[J]. Bound Value Probl, 2013, 2013(1):1-16.
- [5] Agarwal R P, Ahmad B, Alsaedi A, et al. On nonlinear fractional q -difference equations involving two fractional orders with three-point nonlocal boundary conditions[J]. Dyn Contin Discrete Impuls Syst Ser A Math Anal, 2014, 21:135-151.
- [6] EL-Shahed M. Nontrivial solutions for fractional q -difference boundary value problems[J]. Electron J Qual Theory Differ Equ, 2010, 70(10):1-10.
- [7] 孙明哲, 侯成敏. 一类反周期分数阶 q -差分边值问题解的存在性[J]. 吉林大学学报:理学版, 2014, 52(6):1215-1218.
- [8] Li Xinhui, Han Zhenlai, Sun Shurong. Existence of positive solutions of nonlinear fractional q -difference equation with parameter[J]. Advances in Difference Equations August, 2013, 2013(1):1-13.
- [9] Guo D, Sun J. Calculation and application of topological degree[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 1988, 8(3):469-480.