文章编号：1004-4353(2015)02-0111-05

四阶椭圆方程非平凡解的多重性

刘春晗，　王建国
（齐鲁师范学院 数学学院，山东 济南 250013）

摘要：在非共振的情况下讨论了一类不满足 Ambrosetti-Rabinowitz 型增长条件的四阶椭圆方程.首先，证明泛函 Φ 满足(PS)条件.其次，证明泛函 Φ 满足山路引理的其他条件.最后，利用 Morse 理论和山路引理获得了方程的 3 个非平凡解.

关键词：山路引理；临界群；非平凡解
中图分类号：O175.25　　**文献标识码**：A

Multiplicity of nontrivial solutions for fourth-order elliptic equations

LIU Chunhan，　WANG Jianguo
(*School of Mathematics*, *Qilu Normal University*, *Jinan* 250013, *China*)

Abstract: The fourth-order elliptic equations at no resonance are discussed without assuming Ambrosetti-Rabinowitz type growth conditions. Firstly, we prove that the functional Φ satisfies (PS) condition. Secondly, we prove that the functional Φ satisfies the other conditions of Mountain Pass Lemma. Finally, three nontrivial solutions are obtained by using Morse Theory and Mountain Pass Lemma.

Key words: Mountain Pass Lemma; critical group; nontrivial solution

0　引言

本文考虑方程

$$\begin{cases}\Delta^2 u + b\Delta u = g(x,u),\ x\in\Omega;\\ u=\Delta u=0,\ x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{1}$$

其中 Δ^2 是双调和算子，b 为常数，$\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 是有界的光滑区域，$g(x,u)$ 在 $\overline{\Omega}\times\mathbf{R}$ 上连续.近年来很多学者对此类问题做了研究，例如：文献[1]的作者利用山路引理讨论了方程 $\begin{cases}\Delta^2 u = g(x,u),\ x\in\Omega;\\ u=\Delta u=0,\ x\in\partial\Omega,\end{cases}$ 得到了方程至少存在 1 个非平凡解的结果；文献[2]对方程(1)进行了研究，并在以下条件下得到了方程的非平凡解：$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(x,t)}{t}=\mu$，$\lim\limits_{|t|\to\infty}\dfrac{g(x,t)}{t}=l$，对 a. e. $x\in\Omega$ 一致，并且满足 $0\leqslant\mu<\lambda_1(\lambda_1-c)<l<+\infty$，其中 λ_1 是与后面给出的特征值问题(2)相对应的特征值.本文利用山路引理和 Morse 理论研究方程(1)，获得了方程至少存在 3 个非平凡解的结果，而文献[1-2]只得到了方程至少存在 1 个非平凡解的

收稿日期：2014－05－12　　**作者简介**：刘春晗(1981—)，男，副教授，研究方向为非线性泛函分析及其应用.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10971179)；山东省高等学校科技计划项目(J12L153)；齐鲁师范学院青年教师科研基金资助项目(2014L1001)

结果,因此本文的研究拓展了文献[1-2]的研究结果.

为后续讨论需要,首先给出如下假设条件:

(H_1) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{g(x,u)}{u}=\alpha<\lambda_1(\lambda_1-b)$, $\lambda_k(\lambda_k-b)\leqslant\lim\limits_{|u|\to\infty}\inf\dfrac{g(x,u)}{u}\leqslant\lim\limits_{|u|\to\infty}\sup\dfrac{g(x,u)}{u}\leqslant\lambda_{k+1}(\lambda_{k+1}-b)$,对 a.e. $x\in\Omega$ 一致,其中 $\lambda_k(k\geqslant 2)$ 是后面给出的特征值问题(2)相对应的特征值;

(H_2) 若当 $\|u_n\|\to\infty$ 时,有 $\dfrac{\|u_n^k\|}{\|u_n\|}\to 1$,则存在 $\sigma_1, N_1>0$ 使得

$$\int_\Omega(g(x,u_n)-\lambda_k(\lambda_k-b)u_n)u_n^k\mathrm{d}x\geqslant\sigma_1,\ n\geqslant N_1,\ x\in\Omega;$$

(H_3) 若当 $\|u_n\|\to\infty$ 时,有 $\dfrac{\|u_n^{k+1}\|}{\|u_n\|}\to 1$,则存在 $\sigma_2, N_2>0$ 使得

$$\int_\Omega(\lambda_{k+1}(\lambda_{k+1}-b)u_n-g(x,u_n))u_n^{k+1}\mathrm{d}x\geqslant\sigma_2,\ n\geqslant N_2,\ x\in\Omega;$$

(H_4) $g(x,0)=0$, $\forall x\in\Omega$.

注 1 容易看出条件(H_1)要弱于文献[2]中的条件(H_2).

首先考虑特征值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u,\ x\in\Omega;\\ u=0,\ x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{2}$$

记 $\lambda_k(k\in\mathbf{N})$ 与 $\varphi_k(k\in\mathbf{N})$ 分别是特征值问题(2)的特征值及相应的特征函数,且满足 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots\leqslant\lambda_k\to+\infty$,第一特征向量 $\varphi_1>0$,对 $x\in\Omega$. 下面考虑特征值问题

$$\begin{cases}\Delta^2u+b\Delta u=\Lambda u,\ x\in\Omega;\\ u=\Delta u=0,\ x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{3}$$

易得出 $\lambda_k(\lambda_k-b)(k\in\mathbf{N})$ 以及特征向量 $\varphi_k(k\in\mathbf{N})$ 满足特征值问题(3),即 $\lambda_k(\lambda_k-b)$ 是问题(3)的特征值.

假设 $b<\lambda_1$,定义空间 H 中的范数为 $\|u\|^2=\int_\Omega(|\Delta u|^2-b|\nabla u|^2)\mathrm{d}x$. 可以证明 $\|\cdot\|$ 是空间 H 中的一个等价范数,并且 Pioncaré 不等式成立,即

$$\|u\|^2\geqslant\lambda_1(\lambda_1-b)\|u\|_{L^2}^2,\tag{4}$$

对任意的 $u\in H$. 空间 H 可分解为 $H=E_i^-\oplus E^i\oplus E^{i+1}\oplus E_i^+$,其中 $E^i=\ker(\Delta^2+b\Delta-\lambda_i(\lambda_i-b))$, $E_i^-=\bigoplus\limits_{j<i}E^j$, $E_i^+=\overline{\bigoplus\limits_{j>i+1}E^j}$,并且对任意的 $u\in H$,有 $u=u^-+u^i+u^{i+1}+u^+$, $u^\pm\in E_i^\pm$, $u^i\in E^i$, $u^{i+1}\in E^{i+1}$.

问题(1)的弱解就是泛函 $\Phi(u)=\dfrac{1}{2}\int_\Omega(|\Delta u|^2-b|\nabla u|^2)\mathrm{d}x-\int_\Omega G(x,u)\mathrm{d}x$, $u\in H$ 的临界点,其中 $G(x,u)=\int_0^u g(x,t)\mathrm{d}t$. 对于任意的 $\varphi\in H$,有 $\langle\Phi'(u),\varphi\rangle=\int_\Omega(\Delta u\Delta\varphi-b\nabla u\nabla\varphi)\mathrm{d}x-\int_\Omega g(x,u)\varphi\mathrm{d}x$.

引入下面的截断问题:

$$\begin{cases}\Delta^2u+b\Delta u=g^+(x,u),\ x\in\Omega;\\ u=\Delta u=0,\ x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{5}$$

其中 $g^+(x,u)=\begin{cases}g(x,u),\ u\geqslant 0;\\ 0,\ u<0.\end{cases}$ 定义问题(5)的能量泛函 $\Phi^+: H\to\mathbf{R}$ 为

$$\Phi^+(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\Delta u|^2-b|\nabla u|^2)\mathrm{d}x-\int_\Omega G^+(x,u)\mathrm{d}x,\ u\in H,$$

其中 $G^+(x,u)=\int_0^u g^+(x,t)\mathrm{d}t$. 可以证明 $\Phi^+(u)\in C^1(H,\mathbf{R})$. 如果 u 是 $\Phi^+(u)$ 的临界点,则 u 是问题(5)的一个弱解,并且可证 $u\geqslant 0$ a.e. $x\in\Omega$,而且 u 也是方程(1)的 1 个正解,即 $\Phi(u)=\Phi^+(u)$.

类似地，可以定义

$$\begin{cases}\Delta^2 u + b\Delta u = g^-(x,u),\ x\in\Omega;\\ u=\Delta u = 0,\ x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{6}$$

其中 $g^-(x,u)=\begin{cases}g(x,u),\ u\leqslant 0;\\ 0,\ u>0.\end{cases}$ 定义问题(6) 的能量泛函为 $\Phi^-(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\Delta u|^2-b|\nabla u|^2)\mathrm{d}x-\int_\Omega G^-(x,u)\mathrm{d}x,\ u\in H$，其中 $G^-(x,u)=\int_0^u g^-(x,t)\mathrm{d}t$. 可以证明 $\Phi^-(u)\in C^1(H,\mathbf{R})$. 如果 u 是 $\Phi^-(u)$ 的非平凡临界点，则 u 也是方程(1) 的 1 个负解，即 $\Phi(u)=\Phi^-(u)$.

以下给出临界群和 Morse 理论的相关知识[3-4].

设 H 是 Hilbert 空间，泛函 $\Phi(u)\in C^2(H,\mathbf{R})$ 满足(PS) 条件或(C) 条件，用 $H_q(H,Y)$ 表示具有整系数的 q 阶奇异相对同调群. 设 ν_0 是 Φ 的孤立临界点，且 $\Phi(\nu_0)=c\in\mathbf{R}$. 记 $\Phi^c=\{\nu\in H\mid\Phi(\nu)\leqslant c\}$，$K=\{\nu\in H\mid\Phi'(\nu)=\theta\}$. 称群 $C_q(\Phi,\nu)=H_q(\Phi^c,\Phi^c\backslash\{\nu_0\})$，$q\in\mathbf{Z}$ 为 Φ 在 ν_0 处的 q 阶临界群. 若设 K 是有限集，称 $C_q(\Phi,\infty)=H_q(H,\Phi^c)$，$q\in\mathbf{Z}$ 为 Φ 在无穷远点处的临界群，其中 $c<\inf\Phi(K)$.

定义 1[3]　设 $\Phi\in C^1(E,\mathbf{R})$，称 Φ 关于每一个 $c\in\mathbf{R}$ 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件，若满足条件 $\Phi(u_n)\to c$，$\Phi'(u_n)\to 0\ (n\to\infty)$ 的任意数列 $\{u_n\}$ 均有收敛子列；称 Φ 满足(PS) 条件，如果称 Φ 关于每一个 $c\in\mathbf{R}$ 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

定义 2[3]　设 $\Phi\in C^1(E,\mathbf{R})$，称 Φ 关于每一个 $c\in\mathbf{R}$ 满足$(\mathrm{C})_c$ 条件，若满足条件 $\Phi(u_n)\to c$，$(1+\|u_n\|)\Phi'(u_n)\to 0\ (n\to\infty)$ 的任意数列 $\{u_n\}$ 均有收敛子列；称 Φ 满足(C) 条件，如果称 Φ 关于每一个 $c\in\mathbf{R}$ 满足$(\mathrm{C})_c$ 条件.

引理 1　如果 $g(x,u)\in\overline{\Omega}\times\mathbf{R}$ 满足假设条件(H_1)，且对于任意的 $u<0$，有 $g(x,u)=0$，则泛函 $\Phi(u)$ 满足(PS) 条件.

引理 1 的证明过程类似于文献[5] 中Lemma3.2 的证明，故略. 同理可得：

引理 2　如果 $g(x,u)\in\overline{\Omega}\times\mathbf{R}$ 满足假设条件(H_1)，且对于任意的 $u>0$，有 $g(x,u)=0$，则泛函 $\Phi(u)$ 满足(PS) 条件.

引理 3　设 $H=H^+\oplus H^-$，$H^+=E_k^-\oplus E^k$，$H^-=E^{k+1}\oplus E_k^+$，则：

$$\|u\|^2\leqslant\lambda_k(\lambda_k-b)\,|u|_2^2,\ \forall u\in H^+;\ \|u\|^2\geqslant\lambda_{k+1}(\lambda_{k+1}-b)\,|u|_2^2,\ \forall u\in H^-.$$

引理 3 的证明过程类似于文献[6] 中Lemma2.5 的证明，故略.

定理 1[3]　(山路引理) 假设 $\Phi\in C^1(E,\mathbf{R})$ 满足 $\max\{\Phi(0),\Phi(1)\}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\inf\limits_{\|u\|=\rho}\Phi(u)$，对某一 $\alpha_0<\beta_0$，$\rho>0$ 且 $u_1\in E$，$\|u_1\|>\rho$. 令 $\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],E):\gamma(0)=0,\gamma(1)=u_1\}$，且 $c=\inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\max\limits_{\tau\in[0,1]}\Phi(\gamma(\tau))$，则 $c\geqslant\beta_0>0$. 若 Φ 满足(PS) 条件，则 c 是 Φ 的临界点.

注 2　在定理 1 中，若把条件换成 Φ 满足(C) 条件，结论依然成立.

定理 2[7]　设 $H=H^+\oplus H^-$，若 Φ 在 H^+ 上是下方有界，且当 $\|u\|\to\infty$ 时，$\Phi(u)\to-\infty$，$\forall u\in H^-$，$k=\dim H^-<\infty$，则 $C_k(\Phi,\infty)\ncong 0$.

1　主要结果及其证明

定理 3　如果 $g(x,u)$ 满足假设条件(H_1)—(H_4)，且 $b<\lambda_1$，则方程(1) 至少存在 3 个非平凡解.

证明　首先证明泛函 Φ 满足(C) 条件，为此只需证明$\{u_n\}$ 在 H 上是有界即可. 假设 u_n 满足

$$(1+\|u_n\|)\Phi'(u_n)\to 0,\ \Phi(u_n)\to c.\tag{7}$$

设$\|u_n\|\to+\infty$，令 $w_n=\frac{u_n}{\|u_n\|}$，则$\|w_n\|=1$，因此，存在$\{w_n\}$ 的子列(可仍记为$\{w_n\}$) 及 $w\in H$ 满足

$$w_n\rightharpoonup w \text{ 于 } H,\ w_n\to w \text{ 于 } L^2(\Omega),\ w_n\to w\ \text{a. e. } x\in\Omega.\tag{8}$$

由(H_1)可知,存在常数 C 及 R_1 使得

$$|g(x,t)|\leqslant C(1+|t|),\ |t|\geqslant R_1,\ x\in\Omega. \tag{9}$$

从而,对于充分大的 n,有 $\dfrac{|g(x,u_n)|}{\|u_n\|}\leqslant C(1+|w_n|)$ a.e. $x\in\Omega$. 于是,$\{|g(x,u_n)|/\|u_n\|\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 上有界.

由式(7)可得,对任意的 $\varphi\in H$,有

$$\left|\int_\Omega(\Delta w_n\Delta\varphi-b\nabla w_n\nabla\varphi)\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{g(x,u_n)}{\|u_n\|}\varphi\mathrm{d}x\right|=\frac{|\langle\Phi'(u_n),\varphi\rangle|}{\|u_n\|}\leqslant \frac{1}{\|u_n\|}\|\Phi'(u_n)\|\|\varphi\|\to 0. \tag{10}$$

由式(8)—(10)及(H_1)可知,存在 $r\in L^2(\Omega)$ 满足 $\lambda_k(\lambda_k-b)\leqslant r(x)\leqslant\lambda_{k+1}(\lambda_{k+1}-b)$ a.e. $x\in\Omega$,使得在 H 中有 $\dfrac{|g(x,u_n)|}{\|u_n\|}\rightharpoonup rw$. 所以,对于任意的 $\varphi\in H$,有

$$\int_\Omega(\Delta w\Delta\varphi-b\nabla w\nabla\varphi)\mathrm{d}x=\int_\Omega r(x)w\varphi\mathrm{d}x, \tag{11}$$

因此 $w\in H$ 是方程 $\Delta^2w+b\Delta w=rw$ 的弱解.

由最大值原理及唯一连续性性质可得 $r=\lambda_k(\lambda_k-b)$,$w\in E^k$ 或者 $r=\lambda_{k+1}(\lambda_{k+1}-b)$,$w\in E^{k+1}$,并且 $\dfrac{\|u_n^k\|}{\|u_n\|}\to 1$,或者 $\dfrac{\|u_n^{k+1}\|}{\|u_n\|}\to 1$. 由式(7)可得 $\int_\Omega(g(x,u_n)-\lambda_k(\lambda_k-b)u_n)u_n^k\mathrm{d}x=-(\Phi'(u_n),u_n^k)\leqslant\|u_n\|\|\Phi'(u_n)\|\to 0$,$n\to\infty$,这与($H_2$)矛盾. 同理可得 $\int_\Omega(\lambda_{k+1}(\lambda_{k+1}-b)u_n-g(x,u_n))u_n^k\mathrm{d}x\to 0$,$n\to\infty$,这与($H_3$)矛盾,从而 $\{u_n\}$ 在 H 上是有界的. 于是 $\{u_n\}$ 在 H 中存在弱收敛的子列,不妨仍记为 $\{u_n\}$,弱极限可记为 u. 容易看出在 $L^2(\Omega)$ 中 $u_n\to u$,再由式(7)可得 $\|u_n-u_m\|=\int_\Omega g(x,u_n-u_m)(u_n-u_m)\mathrm{d}x+o(1)\|u_n-u_m\|$. 当 $n,m\to\infty$ 时,有 $\left|\int_\Omega g(x,u_n-u_m)(u_n-u_m)\mathrm{d}x\right|\leqslant|g(x,u_n-u_m)|_2\,|u_n-u_m|_2$,因此在 H 上 $\{u_n\}$ 强收敛到 u,即 Φ 满足(C)条件.

设 $H=H^+\oplus H^-$,$H^+=E_k^-\oplus E^k$,$H^-=E^{k+1}\oplus E_k^+$. 利用引理3,类似于文献[8]中引理1的证明方法可证得泛函 Φ 在 H^- 上是下方有界的,在 H^+ 上反强制,即当 $\|u_n\|\to+\infty$,有 $\Phi(u)\to-\infty$,$\forall u\in H^+$. 再由定理2可知

$$c_\mu(\Phi,\infty)\ncong 0,\ \mu=\dim H^+. \tag{12}$$

另外,由于 $\alpha<\lambda_1(\lambda_1-b)$,$\theta$ 是 Φ 的局部最小值点,所以

$$c_q(\Phi,0)=\delta_{q0}Z. \tag{13}$$

由式(12)和(13)可知,Φ 有非平凡临界点 u_1 满足

$$c_\mu(\Phi,u_1)\ncong 0. \tag{14}$$

由引理1和引理2可知 $\Phi^+(u)$ 和 $\Phi^-(u)$ 都满足(PS)条件. 下面证明 $\Phi^+(u)$ 满足山路引理的其他条件,对于 $\Phi^-(u)$ 可类似地得到证明. 由假设条件(H_1)—(H_4)可知,对 $\forall\varepsilon>0$,选取 $\sigma\in(2,\sigma^*)$,则存在 $C_1>0$,使得 $G^+(x,u)\leqslant\dfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)u^2+C_1u^\sigma$,这里 $\sigma^*=\begin{cases}\dfrac{2N}{N-2},\ N>2;\\+\infty,\ N\leqslant 2.\end{cases}$ 取充分小的 $\varepsilon>0$,使得 $\alpha+\varepsilon<\lambda_1(\lambda_1-b)$,由 Pioncaré 不等式和 Sobolev 嵌入定理,有

$$\Phi^+(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\Delta u|^2-b|\nabla u|^2)\mathrm{d}x-\int_\Omega G^+(x,u)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{\alpha+\varepsilon}{2}|u|_2^2-C_1|u|_\sigma^\sigma\geqslant \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha+\varepsilon}{\lambda_1(\lambda_1-b)}\right)\|u\|^2-C_2\|u\|^\sigma.$$

取充分小的$\|u\|=r>0$，可得$\Phi^+|_{\partial B_r}\geqslant a>0$，其中$B_r=\{u\in H:\|u\|\leqslant r\}$. 由($H_1$)可知，对于$\forall\varepsilon>0$，存在$C_3>0$，使得$G^+(x,u)\geqslant\frac{1}{2}(\lambda_k(\lambda_k-b)-\varepsilon)u^2-C_3$. 取$\varepsilon>0$充分小，使得$\lambda_k(\lambda_k-b)-\varepsilon>\lambda_1(\lambda_1-b)$，则有$\Phi^+(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\Delta u|^2-b|\nabla u|^2)\mathrm{d}x-\int_\Omega G^+(x,u)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{\lambda_k(\lambda_k-b)-\varepsilon}{2}|u|_2^2+C_3|\Omega|$. 设$u=t\varphi_1$，这里$\varphi_1$是特征值$\lambda_1$的特征函数，$\|\varphi_1\|=1$，有

$$\Phi(t\varphi_1)\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda_k(\lambda_k-b)-\varepsilon}{\lambda_1(\lambda_1-b)}\right)t^2\|\varphi_1\|^2+C_3|\Omega|\to-\infty,\ t\to\infty,$$

则存在某一个$e\in H$，$\|e\|>r$，使得$\Phi^+(e)\leqslant 0$. 综上可知，$\Phi^+(u)$满足定理 1 的所有条件，故$\Phi^+(u)$存在非平凡的临界点u_2，且$u_2>0$. 利用文献[3]中的结论可得

$$C_q(\Phi,u_2)\cong\delta_{q1}Z. \tag{15}$$

类似地，可以证明$\Phi^-(u)$满足定理 1 的所有条件，从而获得Φ的另一个负的临界点u_3，且满足

$$C_q(\Phi,u_3)=\delta_{q1}Z. \tag{16}$$

最后，由式(14)—(16)和$\mu\geqslant k>2$，知u_1,u_2,u_3是方程(1)的 3 个不同的非平凡解.

参考文献：

[1] Pei R C. Nontrivial solutions for a fourth-order semilinear elliptic problem[J]. Mathematica Applicata, 2013, 26(1): 190-197.

[2] Wei Y H. Multiplicity results for fourth-order elliptic equations [J]. J Math Anal Appl, 2012, 385: 797-807.

[3] Chang K C. Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solutions Problems[M]. Boston: Birkhäauser, 1993.

[4] Liang Z P, Su J B. Multiple solutions for semilinear elliptic boundary value problems with double resonance[J]. J Math Anal Appl, 2009, 354: 147-158.

[5] Su J B. Semilinear elliptic boundary value problems with double resonance between two consecutive eigenvalues[J]. Nonlinear Anal, 2002, 48: 881-895.

[6] Marino B, Enrico S. Semilinear Elliptic Equations for Beginners[M]. London: Springer-Verlag, 2011.

[7] Bartsch T, Li S J. Critical point theorem for asymptotically quadratic functionals and applications to problems with resonance[J]. Nonlinear Anal TMA, 1997, 28: 419-441.

[8] Robinson S, Steve B. Multiple solutions for semilinear elliptic boundary value problems at resonance[J]. Elec J Diff Equ, 1995, 1995: 1-14.