文章编号: 1004-4353(2015)02-0103-08

一类分数阶 q-差分方程边值问题正解的存在性

苏巍， 刘畅， 李丹， 何延生*
(延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要: 研究了一类分数阶 q-差分方程多点边值问题，其中控制函数含有分数阶导数. 首先通过变换将该问题转化为带有分数阶积分控制的边值问题，并分析了格林函数的一些性质；其次利用 Arzela-Ascoli 不动点定理及上下解方法，证明了该方程正解的存在性；最后通过实例验证了本文所得结论的正确性.

关键词: 分数阶 q-差分；Bananch 空间；上下解方法；解的存在性
中图分类号: O175.6　　　**文献标识码:** A

Existence of positive solutions for a class of the boundary value problems of fractional q-difference equations

SU Wei， LIU Chang， LI Dan， HE Yansheng*
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We study a class of the boundary value problems of fractional q-difference equations. Here, the fractional derivative is contained in control function. Firstly, we transform the problem into a boundary value problem with fractional integrals control and analyze some properties of the Green function. Secondly, the existence of the solutions of the equation are proved by using the Arzela-Ascoli fixed point theorem in Banach space and upper and lower solution method. Finally, we give a example to illustrate our results.

Key words: fractional q-differences; Bananch space; upper and lower solution method; existence of solutions

1910 年，Jackson[1-2] 提出了 q-微积分概念，之后由 Al-Salam[3] 和 Agarwal[4] 给出了分数阶 q-微积分的基本概念和性质. 近年来，q-差分微积分在量子模型、信号分析理论等数学物理问题中得到了广泛的研究和应用，其中关于分数阶 q-差分方程边值问题解存在性的研究也取得了大量成果[5-14]，但这些成果中多数研究的是带有整数阶边值条件的 q-差分方程的解，而带有分数阶 q-差分边界条件的研究结果相对较少. 如：文献[13] 的作者研究了带有 p-Laplacian 算子的三点边值问题

$$\begin{cases} D_q^{\gamma}(\varphi_p(D_q^{\alpha}u(t))+f(t,u(t))=0,\ 0<t<1,\ 2<\alpha<3; \\ u(0)=D_q u(0),\ D_q u(1)=0,\ (D_{o^+}^{\nu}u)(t)\mid_{t=o}=0, \end{cases}$$

并利用偏序集上的不动点定理证明了正解和非递减解的存在唯一性；文献[14]的作者研究了带有 p-Laplacian 算子的两点边值问题

$$\begin{cases} D_q^{\beta}(\varphi_p(D_q^{\alpha}u(t))=f(t,u(t)),\ 0<t<1,\ 1<\alpha,\ \beta\leqslant 2; \\ u(0)=u(1)=0,\ D_q^{\alpha}u(0)=D_q^{\alpha}u(1)=0, \end{cases}$$

并利用 Schauder 不动点定理和上下解方法获得了解的存在性结果.

本文研究如下分数阶 q-差分方程多点边值问题：

收稿日期: 2015-04-12　　　**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11161049)
* **通信作者:** 何延生(1962—)，男，副教授，研究方向为微分方程理论及应用.

$$\begin{cases} D_q^{\alpha} x(t) = -\lambda f(t, x(t), D_q^{\beta} x(t)),\ t \in (0,1); \\ x(0) = 0,\ D_q^{\gamma} x(1) = \sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i D_q^{\gamma} x(\xi_i). \end{cases} \tag{1}$$

其中 λ 是参数, $1 < \alpha \leqslant 2$, $\alpha - \beta > 1$, $\alpha_i \in [0, +\infty)$, $\sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i \xi_i^{\alpha-\gamma-1} < 1$, $f: (0,1) \times (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是连续函数. 本文将利用 Arzela-Ascoli 不动点定理及上下解方法证明该边值问题正解的存在性.

1 预备知识

定义 1[15] $[a]_q = \dfrac{1-q^a}{1-q}$, $a \in \mathbf{R}$, $q \in (0,1)$.

定义 2[15] 幂指函数 $(a-b)^n$ 的 q-类似定义为:

$$(a-b)^{(0)} = 1,\ (a-b)^{(n)} = a^n \prod_{k=0}^{n-1} (a - bq^k),\ n \in \mathbf{N},\ a, b \in \mathbf{R};$$

$$(a-b)^{(\alpha)} = a^{\alpha} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{a - bq^n}{a - bq^{\alpha+n}},\ \alpha \in \mathbf{R}, \text{特别地}, b = 0 \text{ 时 } a^{(\alpha)} = a^{\alpha}.$$

定义 3[15] q-Γ 函数定义为 $\Gamma_q(x) = \dfrac{(1-q)^{(x-1)}}{(1-q)^{x-1}}$, $x \in \mathbf{R} \backslash \{0, -1, -2, \cdots\}$. 易知 $\Gamma_q(x+1) = [x]_q \Gamma_q(x)$.

定义 4[15] Riemann-Liouville 型分数阶 q-积分定义为:

$$(I_q^0 f)(x) = f(x),\ (I_q^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^x (x - qt)^{(\alpha-1)} f(t) \mathrm{d}_q t,\ \alpha > 0,\ x \in [0,1],$$

其中 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数.

定义 5[15] Riemann-Liouville 型分数阶 q-导数定义为:

$$(D_q^{\alpha} f)(x) = \begin{cases} (I_q^{-\alpha} f)(x),\ \alpha < 0; \\ f(x),\ \alpha = 0; \\ (D_q^{[\alpha]} I_q^{[\alpha]-\alpha} f)(x),\ \alpha > 0, \end{cases}$$

这里 $[\alpha]$ 是大于或等于 α 的最小整数.

引理 1[15] 设 $\alpha > 0$, p 是正整数, 则

$$(I_q^{\alpha} D_q^{p} f)(x) = (D_q^{p} I_q^{\alpha} f)(x) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^{\alpha-p+k}}{\Gamma_q(\alpha + k - p + 1)} (D_q^k f)(0).$$

引理 2[15] 设 $\alpha > \beta \geqslant 0$, $f(x)$ 是定义在 $d = c$ 上的函数, 则: (a) $(I_q^{\beta} I_q^{\alpha} f)(x) = (I_q^{\alpha+\beta} f)(x)$; (b) $(D_q^{\alpha} I_q^{\alpha} f)(x) = f(x)$; (c) $(D_q^{\beta} I_q^{\alpha} f)(x) = (I_q^{\alpha-\beta} f)(x)$.

引理 3[15] 设 $\alpha \in \mathbf{R}^+ / \mathbf{N}_0$, $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数, 则 $(D_q D_q^{\alpha} f)(x) = (D_q^{\alpha+1} f)(x)$.

引理 4[15] 设 $\alpha \in \mathbf{R}^+$, $\lambda \in (-1, +\infty)$, 则 $I_q^{\alpha} t^{\lambda} = \dfrac{\Gamma_q(\lambda+1)}{\Gamma_q(\alpha+\lambda+1)} t^{\alpha+\lambda}$, $t \in (0,1]$.

引理 5[15] 假设 $\sigma > 0$, $\gamma > 0$, 且 $\sigma - \gamma - 1 > 0$, 则 $D_q^{\gamma} t^{\sigma-1} = \dfrac{\Gamma_q(\sigma)}{\Gamma_q(\sigma-\gamma)} t^{\sigma-\gamma-1}$, $t \in (0,1]$.

引理 6 假设 $h \in \mathbf{C}[0,1]$, $1 < \alpha - \beta \leqslant 2$, $0 < \beta \leqslant \gamma < 1$, 则边值问题

$$\begin{cases} -D_q^{\alpha} x(t) = h(t),\ t \in (0,1); \\ x(0) = 0,\ D_q^{\gamma} x(1) = \sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i D_q^{\gamma} x(\xi_i) \end{cases} \tag{2}$$

与边值问题

$$\begin{cases}-D_q^{\alpha-\beta}y(t)=h(t),\ t\in(0,1);\\ I_q^{\beta}y(t)\mid_{t=0}=0,\ D_q^{\gamma-\beta}y(1)=\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i D_q^{\gamma-\beta}y(\xi_i)\end{cases}\tag{3}$$

等价.

证明　作变换 $x(t)=I_q^{\beta}y(t)$，则由定义 6、引理 2 和引理 3 有 $D_q^{\alpha}x(t)=D_q^{\alpha}I_q^{\beta}y(t)=D_q^{\alpha-\beta}y(t)$，$D_q^{\gamma}x(t)=D_q^{\gamma-\beta}y(t)$. 即如果 $x(t)$ 是问题(2) 的解，那么 $y(t)$ 是问题(3) 的解，反之亦然.

类似地有：

引理 7　边值问题(1) 等价于问题：

$$\begin{cases}-D_q^{\alpha-\beta}y(t)=\lambda f(t,I_q^{\beta}y(t),y(t)),\ t\in(0,1);\\ I_q^{\beta}y(t)\mid_{t=0}=0,\ D_q^{\gamma-\beta}y(1)=\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i D_q^{\gamma-\beta}y(\xi_i).\end{cases}$$

引理 8　边值问题(3) 等价于问题：

$$\begin{cases}-D_q^{\alpha-\beta}y(t)=h(t),\ t\in(0,1);\\ y(0)=0,\ D_q^{\gamma-\beta}y(1)=\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i D_q^{\gamma-\beta}y(\xi_i).\end{cases}\tag{4}$$

证明　假设 $y(t)$ 是问题(3) 的解，则由引理 1 和引理 4 有：

$$y(t)=-I_q^{\alpha-\beta}h(t)+c_1t^{\alpha-\beta-1}+c_2t^{\alpha-\beta-2},$$

$$I_q^{\beta}y(t)=-I_q^{\alpha}h(t)+c_1\frac{\Gamma_q(\alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha)}t^{\alpha-1}+c_2\frac{\Gamma_q(\alpha-\beta-1)}{\Gamma_q(\alpha-1)}t^{\alpha-2}.$$

由 $I_q^{\beta}y(t)\mid_{t=0}=0$ 推出 $c_2=0$，则 $y(t)=-I_q^{\alpha-\beta}h(t)+c_1t^{\alpha-\beta-1}+c_2t^{\alpha-\beta-2}$. 由 $y(0)=0$ 也可推出 $c_2=0$，则 $y(t)$ 满足问题(4). 同样，如果 $y(t)$ 满足问题(4)，则 $y(t)$ 满足问题(3).

由引理 6—8 可知，要研究问题(1) 的解的存在性，只需研究如下问题解的存在性：

$$\begin{cases}-D_q^{\alpha-\beta}y(t)=\lambda f(t,I_q^{\beta}y(t),y(t)),\ t\in(0,1);\\ y(0)=0,\ D_q^{\gamma-\beta}y(1)=\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i D_q^{\gamma-\beta}y(\xi_i).\end{cases}\tag{5}$$

下面为考虑问题(5)，首先给出上下解的定义如下：

定义 6　一个连续函数 $\varphi(t)$ 称为边值问题(5) 的一个下解，若满足

$$\begin{cases}-D_q^{\alpha-\beta}\varphi(t)\leqslant\lambda f(t,I_q^{\beta}\varphi(t),\varphi(t));\\ \varphi(0)\geqslant 0,\ D_q^{\gamma-\beta}\varphi(1)\geqslant\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i D_q^{\gamma-\beta}\varphi(\xi_i).\end{cases}\tag{6}$$

定义 7　一个连续函数 $\psi(t)$ 称为边值问题(5) 的一个上解，若满足

$$\begin{cases}-D_q^{\alpha-\beta}\psi(t)\geqslant\lambda f(t,I_q^{\beta}\psi(t),\psi(t));\\ \psi(0)\leqslant 0,\ D_q^{\gamma-\beta}\psi(1)\leqslant\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i D_q^{\gamma-\beta}\psi(\xi_i).\end{cases}\tag{7}$$

2　Green 函数及其性质

为方便，记：

$$k_1(t,s)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha-\beta)}\begin{cases}t^{\alpha-\beta-1}(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}-(t-qs)^{(\alpha-\beta-1)},\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\\ t^{\alpha-\beta-1}(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)},\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

$$k_2(t,s)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha-\beta)}\begin{cases}(t(1-qs))^{(\alpha-\gamma-1)}-(t-qs)^{(\alpha-\gamma-1)},\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1;\\ (t(1-qs))^{(\alpha-\gamma-1)},\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

$$k(t,s)=k_1(t,s)+\frac{t^{\alpha-\beta-1}}{1-\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-\gamma-1}}\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i k_2(\xi_i,s).\tag{8}$$

引理 9　问题(5)的唯一解为 $y(t)=\int_0^1 k(t,s)h(s)\mathrm{d}_q s$.

证明　利用引理 1,有 $y(t)=-I_q^{\alpha-\beta}h(t)+c_1 t^{\alpha-\beta-1}+c_2 t^{\alpha-\beta-2}$. 由 $y(0)=0$ 知 $c_2=0$. 再由引理 5 有 $D_q^{\gamma-\beta}y(t)=-I_q^{\alpha-\gamma}h(t)+c_1\dfrac{\Gamma_q(\alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha-\gamma)}t^{\alpha-\gamma-1}$,于是

$$D_q^{\gamma-\beta}y(\xi_i)=-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha-\gamma)}\int_0^{\xi_i}(\xi_i-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}h(s)\mathrm{d}_q s+c_1\frac{\Gamma_q(\alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha-\gamma)}\xi_i^{\alpha-\gamma-1}.$$

利用条件 $D_q^{\gamma-\beta}y(1)=\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i D_q^{\gamma-\beta}y(\xi_i)$ 得

$$c_1=\frac{\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}h(s)\mathrm{d}_q s-\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}h(s)\mathrm{d}_q s}{\Gamma_q(\alpha-\beta)(1-\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-\gamma-1})},$$

所以问题(5)的唯一解为

$$y(t)=-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-qs)^{(\alpha-\beta-1)}h(s)\mathrm{d}_q s+$$

$$\frac{t^{\alpha-\beta-1}[\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}h(s)\mathrm{d}_q s-\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}h(s)\mathrm{d}_q s]}{\Gamma_q(\alpha-\beta)(1-\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-\gamma-1})}=$$

$$\int_0^1(k_1(t,s)+t^{\alpha-\beta-1}\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-\gamma-1}}k_2(\xi_i,s))h(s)\mathrm{d}_q s=\int_0^1 k(t,s)h(s)\mathrm{d}_q s.$$

引理 10　格林函数 $k(t,s)$ 有如下性质:(a) $k(t,s)>0$, $t,s\in(0,1)$;(b) $t^{\alpha-\beta-1}m(s)\leqslant k(t,s)\leqslant M(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}$, $t,s\in[0,1]$. 其中:$m(s)=\dfrac{\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i k_2(\xi_i,s)}{1-\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-\gamma-1}}$, $M=\dfrac{1+\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i(1-\xi_i^{\alpha-\gamma-1})}{\Gamma_q(\alpha-\beta)(1-\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-\gamma-1})}$.

证明　(a) 显然成立. 由式(8)得 $k(t,s)\geqslant\dfrac{t^{\alpha-\beta-1}}{1-\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-\gamma-1}}\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i k_2(\xi_i,s)=t^{\alpha-\beta-1}m(s)$. 同样,由式(8)知 $k(t,s)=k_1(t,s)+\dfrac{t^{\alpha-\beta-1}}{1-\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-\gamma-1}}\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i k_2(\xi_i,s)\leqslant\left(1+\dfrac{\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i}{1-\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-\gamma-1}}\right)\dfrac{(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}}{\Gamma_q(\alpha-\beta)}$.

引理 11　假设 $1<\alpha-\beta\leqslant 2$, $y\in C([0,1],\mathbf{R})$ 满足 $y(0)=0$, $D_q^{\gamma-\beta}y(1)=\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i D_q^{\gamma-\beta}y(\xi_i)$,并且 $-D_q^{\alpha-\beta}y(t)\geqslant 0$, $t\in(0,1)$,则 $y(t)\geqslant 0$, $t\in[0,1]$.

记 $c_1(t)=t^{\alpha-\beta-1}$, $L(t)=I_q^{\beta}c_1(t)=\dfrac{1}{\Gamma_q(\beta)}\int_0^t(t-qs)^{(\beta-1)}s^{\alpha-\beta-1}\mathrm{d}_q s=\dfrac{\Gamma_q(\alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha)}t^{\alpha-1}$. 假设下列条件($H_1$)和($H_2$)成立:

(H_1) $f\in\mathbf{C}((0,1)\times(0,\infty)\times(0,\infty),[0,\infty))$ 关于 u 和 v 递减且对任意 $(u,v)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 有 $\lim\limits_{\sigma\to+\infty}\sigma f(t,\sigma u,\sigma v)=+\infty$ 在 $t\in(0,1)$ 一致成立;

(H_2) 对任意的 $\mu,v>0$, $f(t,\mu,v)\not\equiv 0$ 且 $\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}f(s,\mu L(s),\mu c_1(s))\mathrm{d}_q s<+\infty$.

3　主要结果及其证明

定理 1　假设(H_1)和(H_2)成立，那么存在一个正数 λ^*，使得对任意的 $\lambda\in(\lambda^*,+\infty)$，问题(5)至少有一个正解 $y(t)\geqslant L(t)$，$t\in[0,1]$.

证明　假设 $E=C[0,1]$，定义 E 上的一个锥 P 及算子 T_λ 如下：

$$P=\{y\in E:\exists\, l_y\in\mathbf{R}^+,\ y(t)\geqslant l_y c_1(t),\ t\in[0,1]\},\tag{9}$$

$$(\Gamma_\lambda y)(t)=\lambda\int_0^1 k(t,s)f(s,I_q^\beta y(s),y(s))\mathrm{d}_q s,\ \forall\, y\in P.\tag{10}$$

显然，$c_1(t)\in P$，P 是非空的.

下面证明 $T_\lambda(P)\subset P$. 由 P 的定义知，对任意的 $\rho(t)\in P$，存在一个正数 $l_\rho\in P$ 使得 $\rho(t)\geqslant l_\rho c_1(t)$. 由引理 10 及($H_2$)得

$$(\Gamma_\lambda\rho)(t)=\lambda\int_0^1 k(t,s)f(s,I_q^\beta\rho(s),\rho(s))\mathrm{d}_q s\leqslant\lambda M\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}f(s,I_q^\beta\rho(s),\rho(s))\mathrm{d}_q s\leqslant$$
$$\lambda M\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}f(s,l_\rho L(s),l_\rho c_1(s))\mathrm{d}s<+\infty.\tag{11}$$

记 $B=\max\limits_{t\in[0,1]}\rho(t)>0$，由($H_2$)知 $f(t,\dfrac{B}{\Gamma_q(\beta+1)},B)\not\equiv 0$，再由 $f(t,u,v)$ 的连续性知

$$\int_0^1 m(s)f(s,\frac{B}{\Gamma_q(\beta+1)},B)\mathrm{d}_q s>0.$$

另一方面，

$$I_q^\beta B=\frac{1}{\Gamma_q(\beta)}\int_0^t(t-qs)^{(\beta-1)}B\,\mathrm{d}_q s=\frac{Bt^\beta}{\beta\Gamma_q(\beta)}\leqslant\frac{B}{\Gamma_q(\beta+1)},$$

$$m(s)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{p-2}\alpha_i k_2(\xi_i,s)}{1-\sum\limits_{i=1}^{p-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-\gamma-1}}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{p-2}\alpha_i(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}}{\Gamma_q(\alpha-\beta)(1-\sum\limits_{i=1}^{p-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-\gamma-1})}.\tag{12}$$

由式(12)得

$$0<\int_0^1 m(s)f(s,\frac{B}{\Gamma_q(\beta+1)},B)\mathrm{d}_q s\leqslant\int_0^1 m(s)f(s,I_q^\beta B,B)\mathrm{d}_q s\leqslant$$
$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{p-2}\alpha_i}{\Gamma_q(\alpha-\beta)(1-\sum\limits_{i=1}^{p-2}\alpha_i\xi_i^{\alpha-\gamma-1})}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}f(s,I_q^\beta\rho(s),\rho(s))\mathrm{d}_q s<+\infty.\tag{13}$$

由引理 10 及式(11)知

$$(\Gamma_\lambda\rho)(t)\geqslant\lambda c_1(t)\int_0^1 m(s)f(s,I_q^\beta\rho(s),\rho(s))\mathrm{d}_q s=l'_\rho c_1(t),\tag{14}$$

其中

$$l'_\rho=\lambda\int_0^1 m(s)f(s,I_q^\beta\rho(s),\rho(s))\mathrm{d}_q s.\tag{15}$$

利用式(11)和式(14)知 $\Gamma_\lambda(\rho)\subset P$.

下面考虑问题(5)的上下解. 从(H_1)及式(10)知，Γ_λ 关于 y 是递减的，利用

$$\int_0^1 k(t,s)f(s,L(s),c_1(s))\mathrm{d}_q s\geqslant c_1(t)\int_0^1 m(s)f(s,L(s),c_1(s))\mathrm{d}_q s,\ t\in[0,1],\tag{16}$$

且记

$$\lambda_1=\frac{1}{\int_0^1 m(s)f(s,L(s),c_1(s))\mathrm{d}_q s},\tag{17}$$

有 $\lambda_1\int_0^1 k(t,s)f(s,L(s),c_1(s))\mathrm{d}_q s\geqslant c_1(t)$，$t\in[0,1]$. 另一方面，记 $b(t)=\int_0^1 k(t,s)f(s,L(s),c_1(s))\mathrm{d}_q s$.

由于 $f(t,u,v)$ 关于 u,v 是递减的,对于任意的 $\lambda>\lambda_1$,根据式(15)—(17)有

$$\int_0^1 k(t,s)f(s,\lambda I_q^\beta b(s),\lambda b(s))\mathrm{d}_q s\leqslant\int_0^1 k(t,s)f(s,\lambda_1 I_q^\beta b(s),\lambda_1 b(s))\mathrm{d}_q s\leqslant$$
$$M\int_0^1 (1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}f(s,L(s),c_1(s))\mathrm{d}_q s<+\infty. \tag{18}$$

由(H_1),对所有$(u,v)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$,有 $\lim\limits_{\mu\to+\infty}\mu f(t,\mu u,\mu v)=+\infty$ 在 $t\in(0,1)$ 上一致成立. 于是存在充分大的 $\lambda^*>\lambda_1>0$,使得对任意的 $t\in(0,1)$ 有

$$\lambda^* f(s,\lambda^* L(s),\lambda^* c_1(s))>\frac{1}{\int_0^1 m(s)\mathrm{d}s}, \tag{19}$$

故由引理 10 得

$$\lambda^*\int_0^1 k(t,s)f(s,\lambda^* L(s),\lambda^* c_1(s))\mathrm{d}_q s\geqslant\frac{\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}_q s}{\int_0^1 m(s)\mathrm{d}_q s}\geqslant\frac{\int_0^1 c_1(t)m(s)\mathrm{d}_q s}{\int_0^1 m(s)\mathrm{d}_q s}=c_1(t). \tag{20}$$

令 $\varphi(t)=\lambda^*\int_0^1 k(t,s)f(s,L(s),c_1(s))\mathrm{d}_q s=\lambda^* b(t)$, $\psi(t)=\lambda^*\int_0^1 k(t,s)f(s,\lambda^* I_q^\beta b(s),\lambda^* b(s))\mathrm{d}_q s$,利用引理 2—4 和式(16)得到如下两个边值问题:

$$\begin{cases}\varphi(t)=\lambda^*\int_0^1 k(t,s)f(s,L(s),c_1(s))\mathrm{d}_q s\geqslant c_1(t),\ t\in[0,1];\\ \varphi(0)=0,\ D_q^{\gamma-\beta}\varphi(1)=\sum\limits_{i=1}^{p-2}\alpha_i D_q^{\gamma-\beta}\varphi(\xi_i).\end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases}\psi(t)=\lambda^*\int_0^1 k(t,s)f(s,\lambda^* I_q^\beta b(s),\lambda^* b(s))\mathrm{d}_q s\geqslant c_1(t),\ t\in[0,1];\\ \psi(0)=0,\ D_q^{\gamma-\beta}\psi(1)=\sum\limits_{i=1}^{p-2}\alpha_i D_q^{\gamma-\beta}\psi(\xi_i).\end{cases} \tag{22}$$

显然,$\varphi(t),\psi(t)\in P$,由式(21)和(22)有

$$c_1(t)\leqslant\psi(t)=(\Gamma_{\lambda^*}\varphi)(t),\ c_1(t)\leqslant\varphi(t),\ t\in[0,1], \tag{23}$$

于是

$$\psi(t)=(\Gamma_{\lambda^*}\varphi)(t)=\lambda^*\int_0^1 k(t,s)f(s,I_q^\beta\varphi(s),\varphi(s))\mathrm{d}_q s\leqslant$$
$$\lambda^*\int_0^1 k(t,s)f(s,L(s),c_1(s))\mathrm{d}_q s=\varphi(t),\ t\in[0,1]. \tag{24}$$

再由式(23)和(24)得

$$D_q\psi(t)+\lambda^* f(t,I_q^\beta\psi(t),\psi(t))=D_q(\Gamma_{\lambda^*}\varphi)(t)+\lambda^* f(t,I_q^\beta(\Gamma_{\lambda^*}\varphi)(t),(\Gamma_{\lambda^*}\varphi)(t))\geqslant$$
$$D_q(\Gamma_{\lambda^*}\varphi)(t)+\lambda^* f(t,I_q^\beta\varphi(t),\varphi(t))=0. \tag{25}$$

$$D_q\varphi(t)+\lambda^* f(t,I_q^\beta\varphi(t),\varphi(t))=-\lambda^* f(t,L(t),c_1(t))+\lambda^* f(t,(I_q^\beta\varphi)(t),\varphi(t))\leqslant$$
$$-\lambda^* f(t,L(t),c_1(t))+\lambda^* f(t,L(t),c_1(t))=0. \tag{26}$$

从式(22)及式(24)—(26)可知 $\varphi(t),\psi(t)$ 分别是问题(5)的上下解,且 $\varphi(t),\psi(t)\in P$.

在 E 中定义如下泛函 F 及算子 A_{λ^*}:

$$F(t,y)=\begin{cases}f(t,I_q^\beta\psi(t),\psi(t)),\ y<\psi(t);\\ f(t,I_q^\beta y(t),y(t)),\ \psi(t)\leqslant y\leqslant\varphi(t);\\ f(t,I_q^\beta\varphi(t),\varphi(t)),\ y>\varphi(t).\end{cases} \tag{27}$$

$$(A_{\lambda^*}y)(t)=\lambda^*\int_0^1 k(t,s)F(s,y(s))\mathrm{d}_q s,\ \forall\, y\in E. \tag{28}$$

由(H_1)知 $F:(0,1)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续的. 考虑如下边值问题

$$\begin{cases}-D_q^{\alpha-\beta}y(t)=\lambda^*F(t,y),\ t\in[0,1];\\ y(0)=0,\ D_q^{\gamma-\beta}y(1)=\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i D_q^{\gamma-\beta}y(\xi_i).\end{cases}\tag{29}$$

显然算子 A_{λ^*} 的一个不动点是边值问题(29)的一个解. 对于所有 $y\in E$，由引理10及方程(27)和 $\psi(t)\geqslant c_1(t)$ 得 $(A_{\lambda^*}y)(t)\leqslant\lambda^*M\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}F(s,y(1))\mathrm{d}_qs\leqslant\lambda^*M\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}f(s,L(s),c_1(s))\mathrm{d}_qs<+\infty$，所以 A_{λ^*} 是有界的. 从 $F(t,y)$ 和 $k(t,s)$ 的连续性，不难知道 $A_{\lambda^*}:E\to E$ 是连续的. 再由 $k(t,s)$ 的一致连续性和勒贝格控制收敛定理知 A_{λ^*} 是等度连续的. 于是根据 Arzela-Ascoli 定理知 A_{λ^*} 是完全连续算子，故由 Schauder 不动点定理知 A_{λ^*} 至少有一个不动点，记为 w，即 $w=A_{\lambda^*}w$.

现在证明 $\psi(t)\leqslant w(t)\leqslant\varphi(t)$，$t\in[0,1]$. 令 $Z(t)=\varphi(t)-w(t)$，$t\in[0,1]$. 由于 $\varphi(t),\psi(t)$ 是问题(19)的上下解，则由式(23)和(24)及 F 的定义有 $f(t,I_q^\beta\varphi(t),\varphi(t))\leqslant F(t,y(t))\leqslant f(t,I_q^\beta\psi(t),\psi(t))$，$\forall\,y\in E$；$f(t,L(t),c_1(t))\geqslant f(t,I_q^\beta\psi(t),\psi(t))$，$t\in[0,1]$. 所以

$$f(t,I_q^\beta\varphi(t),\varphi(t))\leqslant F(t,y(t))\leqslant f(t,L(t),c_1(t)),\ \forall\,y\in E.\tag{30}$$

从式(24)和(26)，有

$$D_q^{\alpha-\beta}Z(t)=D_q^{\alpha-\beta}\varphi(t)-D_q^{\alpha-\beta}w(t)=-\lambda^*f(t,L(t),c_1(t))+\lambda^*F(t,w(t))\leqslant 0,\tag{31}$$

于是由引理11和式(30)—(31)，有 $Z(t)\geqslant 0$，且 $w(t)\leqslant\varphi(t)$. 类似地可以推出 $w(t)\geqslant\psi(t)$，$t\in[0,1]$，故

$$\psi(t)\leqslant w(t)\leqslant\varphi(t),\ t\in[0,1].\tag{32}$$

结果导致 $F(t,w(t))=f(t,I_q^\beta w(t),w(t))$，$t\in[0,1]$. 由此知 $w(t)$ 也是问题(29)的一个正解，进而 $x(t)=I_q^\beta w(t)$ 是问题(5)的一个正解.

最后由式(32)有 $w(t)\geqslant\psi(t)\geqslant c_1(t)$，于是

$$x(t)=I_q^\beta w(t)=\frac{1}{\Gamma_q(\beta)}\int_0^1(t-qs)^{(\beta-1)}w(s)\mathrm{d}_qs\geqslant\frac{1}{\Gamma_q(\beta)}\int_0^t(t-qs)^{(\beta-1)}c_1(s)\mathrm{d}_qs=L(t).$$

推论 1 假设(H_1)成立，且对任意的 $\mu,v>0$，$f(t,\mu,v)>0$，$\int_0^1 f(s,\mu L(s),\mu c_1(s))\mathrm{d}_qs<\infty$，则存在一个常数 $\lambda^*>0$ 使得对任意的 $\lambda\in(\lambda^*,+\infty)$，问题(1)至少有一个正解 $x(t)$ 满足 $x(t)\geqslant L(t)$，$t\in[0,1]$.

下面考虑 $f(t,u,v)$ 在 $u,v=0$ 或 $t=0,1$ 没有奇异性的情况. 给出下列假设条件：

(H_1^*) $f\in\mathbf{C}((0,1)\times[0,\infty)\times[0,\infty))$ 关于 u,v 是递减的，那么 $f(t,u,v)$ 在 $u=v=0$ 是非奇异的，但 $f(t,u,v)>0$，$u,v\geqslant 0$，$t\in[0,1]$.

以上表明 $f(t,0,0)>0$，$t\in[0,1]$，于是 $\lim\limits_{\mu\to\infty}\mu f(t,0,0)=+\infty$ 对 $t\in[0,1]$ 一致成立.

推论 2 假设(H_1^*)成立且 $\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}f(s,0,0)\mathrm{d}_qs<+\infty$，则存在一个常数 $\lambda^*>0$，使得对任意的 $\lambda\in(\lambda^*,+\infty)$，问题(1)至少有一个正解满足 $x(t)\geqslant L(t)$，$t\in[0,1]$.

证明 在定理1的证明中，用下列的 P_1 来代替 P：

$$P_1=\{y\in E\colon y(t)\geqslant 0,t\in[0,1]\},$$

式(24)—(26)由 $0\leqslant\psi(t)=\Gamma_\lambda 0$，$0\leqslant\varphi(t)=(\Gamma_\lambda\psi)(t)\leqslant\psi(t)$ 代替，由于 $\Gamma_\lambda 0,(\Gamma_\lambda\psi)(t)\in P$，有：

$$(D_q^{\alpha-\beta}\Gamma_\lambda)(0)+f(t,(I_q^\beta\Gamma_\lambda)(0),\Gamma_\lambda 0)=-f(t,0,0)+f(t,I_q^\beta\Gamma_\lambda 0,\Gamma_\lambda 0)\leqslant 0,$$

$$(D_q^{\alpha-\beta}\Gamma_\lambda\psi)(t)+f(t,(I^\beta\Gamma_\lambda\psi)(t),(\Gamma_\lambda\psi)(t))=$$
$$-f(t,I_q^\beta\psi(t),\psi(t))+f(t,(I_q^\beta\Gamma_\lambda\psi)(t),(\Gamma_\lambda\psi)(t))\geqslant 0.$$

余下的证明类似于定理1，故略去.

推论 3 假设 $f(t,u,v):[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to(0,\infty)$ 是连续的且关于 u,v 递减，则问题(1)至少有一个正解满足 $x(t)\geqslant L(t)$，$t\in[0,1]$.

例 1 考虑边值问题

$$\begin{cases}-D_q^{3/2}x(t)=\dfrac{\lambda}{\mathrm{e}^t(1-qt)^{(1/8)}}(x^{-1/2}(t)+(D_q^{1/8}x(t))^{-1/8}),\\ x(0)=0,\ D_q^{3/8}x(1)=2D_q^{3/8}x(1/2)-D_q^{3/8}x(3/4).\end{cases}\tag{33}$$

与问题(1)比较可知 $f(t,u,v)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^t(1-qt)^{(1/8)}}(u^{-1/2}+v^{-1/8})$, $(t,u,v)\in(0,1)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$,则 $f\in\mathbf{C}((0,1)\times(0,\infty)\times(0,\infty),(0,\infty))$ 关于 u,v 是递减的,且对任意的 $(u,v)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ 有 $\lim\limits_{\sigma\to+\infty}\sigma f(t,\sigma u,\sigma v)=\lim\limits_{\sigma\to\infty}\dfrac{\sigma^{1/2}u^{-1/2}+\sigma^{7/8}v^{-1/8}}{\mathrm{e}^t(1-qt)^{(1/8)}}=+\infty$ 对 $t\in(0,1)$ 一致成立,即(H_1)成立. 另一方面,对任意的 $\mu,v>0$,及 $t\in(0,1)$ 有 $f(t,\mu,v)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^t(1-qt)^{(1/8)}}(\mu^{-1/2}+v^{-1/8})$, $L(t)=\int_0^t\dfrac{(t-qs)^{(-7/8)}s^{3/8}}{\Gamma_q(1/8)}=\dfrac{\Gamma_q(11/8)}{\Gamma_q(3/2)}t^{1/2}$,于是

$$\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\gamma-1)}f(s,\mu L(s),\mu c_1(s))\mathrm{d}_qs=\int_0^1(1-qs)^{(1/8)}\Big[\frac{1}{\mathrm{e}^s(1-qs)^{(1/8)}}(\mu^{-1/2}L^{-1/2}(s)+\mu^{-1/8}c_1{}^{-1/8}(s))\Big]\leqslant\int_0^1\Big[\mu^{-1/2}\Big(\frac{\Gamma_q(11/8)}{\Gamma_q(3/2)}t^{1/2}\Big)^{-1/2}+\mu^{-1/8}s^{-3/64}\Big]\mathrm{d}_qs<\infty,$$

故(H_2)成立. 据定理1,存在常数 $\lambda^*>0$ 使得对任意的 $\lambda\in(\lambda^*,+\infty)$,问题(33)至少有一个正解满足

$$x(t)\geqslant L(t)=\frac{\Gamma_q(11/8)}{\Gamma_q(3/2)}t^{1/2},\ t\in[0,1].$$

参考文献:

[1] Jackson F H. On q-definite integrals, Quart[J]. J Pure Appl Math, 1910,41:193-203.
[2] Jackson F H. q-difference equations Amer[J]. J Math, 1910,32(4):305-314.
[3] Al-Salam W A. Some fractional q-integrals and q-derivatives[J]. Proc Edinb Math Soc, 1996,15(2):135-140.
[4] Agarwal R P. Certain fractional q-integrals and q-derivatives[J]. Proc Cambridge Philos Soc, 1996,66:365-370.
[5] Eamaty A, Yadollahzadeh M, Darzi R. Existence of solution for a nonlocal boundary value problem with fractional q-derivatives[J]. Journal of Fractional Calculus and Applications, 2015,6(2):18-27.
[6] Ahmad B, Nieto J J, Alsaedi A, et al. Existence of solutions for nonlinear fractional q-difference integral equations with two fractional orders and nonlocal four-point boundary conditions[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351:2890-2909.
[7] Yang Wengui. Anti-periodic boundary value problems involving nonlinear fractional q-difference equations[J]. Malaya Journal of Matematik, 2013,4(1):107-114.
[8] El-Shahed M, Hassan H A. Positive solutions of q-difference equation[J]. Proc Amer Math Soc, 2010,138:1733-1738.
[9] Ahmad B, Nieto J J, Alsaedi A, et al. Existence of solutions for nonlinear fractional q-difference integral equations with two fractional orders and nonlocal four-point boundary conditions[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351:2890-2909.
[10] Annaby M H, Mansour Z S. q-Fractional Calculus and Equations[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012.
[11] Ferreira R. Positive solutions for a class of boundary value problems with fractional q-differences[J]. Comput Math Appl, 2011,61:367-373.
[12] Ma D, Yang X. Upper and lower solution method for fourth-order four-point boundary value problems[J]. J Comput Appl Math, 2009,223(2):543-551.
[13] Miao F, Liang S. Uniqueness of positive solutions for fractional q-difference boundary-value problems with p-Laplacian operator[J]. Electron J Differ Equ, 2013,174. 2013.
[14] Yang W. Positive solution for fractional q-difference boundary value problems with φ-Laplacian operator[J]. Bull Malays Math Soc, 2013,36(4):1195-1203.
[15] Predrag M Rajkovic, Sladana D Marinkovic, Miomors Stankovic. Fractional integrals and derivatives in q-Calculus[J]. Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 2007,1:311-323.