文章编号：1004-4353(2015)02-0095-08

分形布朗运动驱动的 Navier-Stokes 方程的渐近行为

韩英豪， 张磊， 杨永芳， 胡晓雪
(辽宁师范大学 数学学院，辽宁 大连 116029)

摘要：在具有光滑边界 $\partial\mathcal{O}$ 的有界区域 $\mathcal{O}\in\mathbf{R}^2$ 上考虑了如下由 Hurst 参数为 $h\in(\frac{1}{2},1)$ 的分形布朗运动驱动的非自治 Navier-Stokes 方程的长时间动力行为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+(u\cdot\nabla)u-\upsilon\Delta u+\nabla p=f(x,t)+\frac{\mathrm{d}B^h(t)}{\mathrm{d}t}.$$

在适当的条件下，应用先验估计方法证明了由上述方程生成的随机动力系统的随机吸引子的存在性.

关键词：分形布朗运动；随机拉回吸引子；Navier-Stokes 方程
中图分类号：O211.63；O175.29 **文献标识码：**A

The asymptotic behavior of the Navier-Stokes equation driven by fractional Brownian motion

HAN Yinghao， ZHANG Lei， YANG Yongfang， HU Xiaoxue
(*School of Mathematics*，*Liaoning Normal University*，*Dalian* 116029，*China*)

Abstract：On a bounded domain $\mathcal{O}\in\mathbf{R}^2$ with a smooth boundary $\partial\mathcal{O}$, we consider the long time dynamic behavior of the following non-autonomous Navier-Stokes equation driven by fractional Brownian motion with Hurst parameter $h\in(\frac{1}{2},1)$：$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+(u\cdot\nabla)u-\upsilon\Delta u+\nabla p=f(x,t)+\frac{\mathrm{d}B^h(t)}{\mathrm{d}t}$. Under suitable condition，we use the uniform estimates method to prove the existence of the random pullback attractor for the random dynamical system generated by above equation.

Key words：fractional Brownian motion；random pullback attraction；Navier-Stokes equation

0 引言

设 $\mathcal{O}$ 为在 $\mathbf{R}^2$ 上具有光滑边界 $\partial\mathcal{O}$ 的有界区域，本文在 $\mathcal{O}$ 上研究如下不可压缩流体的由分形布朗运动驱动的非自治 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+(u\cdot\nabla)u-\upsilon\Delta u+\nabla p=f+\dfrac{\mathrm{d}B^h(t)}{\mathrm{d}t},\ x\in\mathcal{O},\ t>0;\\ \nabla\cdot u=0,\ x\in\mathcal{O},\ t>0;\\ u(t,x)=0,\ x\in\partial\mathcal{O},\ t\geqslant 0;\ u(0,x)=u_0(x),\ x\in\mathcal{O}.\end{cases}\tag{1}$$

收稿日期：2015-05-28 **基金项目：**国家自然科学基金资助项目(61304056)
通信作者：韩英豪(1963—)，男，理学博士，副教授，研究方向为无穷维动力系统.

其中随机项 B^h 为 Hutst 参数为 $h\in(\frac{1}{2},1)$ 的无穷维分形布朗运动,f 为一个零散度时间依赖的确定性迫力项,υ 为流体的黏度.

众所周知,Navier-Stokes 方程在流体力学中扮演着十分重要的角色.近年来随着随机方程理论的深入研究,很多学者开始研究由随机迫力项扰动的 Navier-Stokes 方程.如:F. Flandoli 在文献[1]中研究了 Wiener 过程驱动的随机 Navier-Stokes 方程的耗散性和不变测度的存在性;T. Caraballo 等在文献[2]中研究了在无界区域上由 Wiener 过程驱动的随机 Navier-Stokes 方程的拉回吸引子的存在性.然而,很多随机现象并不满足 Wiener 过程所具有的那些苛刻条件,即很多随机现象不是鞅,在互不相交的时间区间上的增量不是相互独立的.近年来由分形布朗运动(以下简记为 fBm)所驱动的随机微分方程理论得到了蓬勃发展,一些学者尝试着研究由 fBm 驱动的随机微分方程的动力行为[3].但是,研究这些问题的共同难点在于 fBm 不具有半鞅性,因而不能直接应用 Itô 随机积分理论,必须引入独特的随机积分.另外,由于 fBm 不是 Markov 过程,因此研究 fBm 所驱动的随机微分方程的动力行为时不能套用研究 Wiener 过程时所使用的一些分析方法,必须重新建立由 fBm 所驱动的随机微分方程的相关动力系统.本文借用 S. G. Samko 等在文献[4]中引进的分形积分的概念及其相关分析工具,研究由无穷维 fBm 驱动的随机 Navier-Stokes 方程的拉回吸引子的存在性.

1 预备知识

用 $\mathscr{V}$ 记光滑函数空间 $\{\phi=(\phi_1,\phi_2)\in(C_0^\infty(\mathscr{O}))^2$:在 $\partial\mathscr{O}$ 上 $\phi=0,\ \nabla\cdot\phi=0\}$,用 H 记集合 $\mathscr{V}$ 在 Hilbert 空间 $(L^2(\mathscr{O}))^2$ 上的闭包,H 的范数和内积分别用 $\|\cdot\|$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 来记,并用 V 来记集合 $\mathscr{V}$ 在二维 Sovolev 空间 $(H_0^1(\mathscr{O}))^2$ 上的闭包.在 V 上赋予内积

$$\langle u,v\rangle_V:=\sum_{i,j=1}^{2}\langle\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\rangle,$$

则 V 构成一个 Hilbert 空间.用 V' 来记 V 的对偶空间,用 $\mathscr{L}(X,Y)$ 来记从线性空间 X 到线性空间 Y 的所有有界线性变换构成的空间,用 $\mathscr{P}$ 来记从 $(L^2(\mathscr{O}))^2$ 到 H 的正交投影.

定义自伴的无界线性算子 $Au=-\mathscr{P}\Delta u,\ u\in D(A)$,其中 A 在 H 的定义域为 $D(A)=H^2(\mathscr{O})^2\cap V$,则 $A\in\mathscr{L}(V,V')$,并且 $\langle Au,v\rangle=\langle u,Av\rangle=\langle u,v\rangle_V,\ \forall\,u,v\in V$.因为算子 A 的逆为紧,由 Hilbert 理论可知,存在特征向量组 $\{e_i\}_{i=1}^\infty\subset D(A)$ 和对应的特征值序列 $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$,使得:$Ae_i=\lambda_i e_i,\ e_i\in D(A),\ i=1,2,\cdots$;$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_i\leqslant\cdots,\ \lim\limits_{t\to\infty}\lambda_i=\infty$;$\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 构成 Hilbert 空间 H 的完备正交组.

对 $s\geqslant 0$,定义 $D(A^s):=\{u\in H:\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{2s}\langle u,e_i\rangle e_i$ 在 H 中收敛$\}$,并定义 $A^s:D(A^s)\to H,\ A^s(u):=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{s}\langle u,e_i\rangle e_i$,则有 $A^sA^l=A^{s+l}$.如果在 $D(A^s)$ 中赋予内积 $\langle u,v\rangle:=\langle A^su,A^sv\rangle$,则 $D(A^s)$ 构成 Hilbert 空间,A^s 为从 $D(A^s)$ 到 H 的同构.特别是,$D(A^1)=D(A),\ D(A^{1/2})=V,\ D(A^0)=H$.一般地,当 $s_1<s_2$ 时,得到连续的紧嵌入 $D(A^{s_2})\subset D(A^{s_1})$.以下把 $D(A^{s/2})$ 简记为 V^s.

定义三元线性函数 $b:H\times V\times H\to\mathbf{R}$ 为 $b(u,v,\omega)=\sum\limits_{i,j=1}^{2}\int_{\mathscr{O}}u_i\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\omega_j\,\mathrm{d}x,\ \forall\,u,\omega\in H,\ v\in V$,则对 $\forall\,u\in H,\ v\in V$,有 $b(u,v,v)=0$,并且由 Hölder 不等式和 Poincaré 嵌入公式 $H^{1/2}(\mathscr{O})\subset L^4(\mathscr{O})$ 可推出:存在 $C_1>0$,对 $\forall\,u,v,w\in V$,有

$$|b(u,v,w)|\leqslant C_1\times\begin{cases}\|u\|^{1/2}\|u\|_V^{1/2}\|v\|_V\|w\|^{1/2}\|w\|_V^{1/2};\\ \|u\|_{V^{1/2}}\|v\|_V\|w\|_V^{1/2}.\end{cases}\tag{2}$$

定义双线性映射 $B:H\times V\to V'$ 为 $\langle B(u,v),\omega\rangle=b(u,v,\omega),\ \forall\,\omega\in V$(把 $B(u,u)\in V'$ 简记为 $B(u)$),

则方程(1)转化为抽象的随机泛函方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}u(t)+[\upsilon Au(t)+B(u(t))]\mathrm{d}t=f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}B^h(t);\\ u(0)=u_0.\end{cases}\tag{3}$$

对迫力项 f 施加如下假设条件：

(H_1) $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};V')$；

(H_2) $\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\alpha\zeta}\|f(\zeta)\|_{V'}\mathrm{d}\zeta<\infty,\forall\alpha>0,\ s\in\mathbf{R}$；

(H_3) $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R};V)$.

注 1　因为上述条件允许 f 是无界，因此是宽松的. 例如，当 $t\to-\infty$ 时，允许 $\|f(t)\|_{V'}$ 具有任意的多项式增长率.

一维分形布朗运动 $\beta^h(t)$ 的定义及其性质参阅文献[5]，分形布朗运动 $\beta^h(t)$ 的随机积分 $\int_0^t\phi(s)\mathrm{d}\beta^h(s)$ 的定义参阅文献[6]. 下面定义无穷维分形布朗运动 B^h. 假设 Q 是在 H 上的自伴且正定线性算子，使得 $Qe_i=m_ie_i,\ i=1,2,\cdots,\ m_i\geqslant0$. H 上的无穷维分形布朗运动 B^h 定义为

$$B^h(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{m_i}\,e_i\,\beta_i^h(t),$$

其中 $\{\beta_i^h(t)\}_{i\in\mathbf{N}}$ 是一维实值独立的 fBm. 假设其系数 $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足条件：

(H_4) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{m_i}{\lambda_i^{2h-1}}<\infty$.

显然，该随机过程是 H 值 Gaussian 过程，起点值为 0，有 0 期望，协方差算子为

$$\mathbf{E}(B^h(s)B^h(t))=R_h(t,s)Q.$$

记 $(\Phi_s)_{0\leqslant s\leqslant t}$ 是取值于 $\mathscr{L}(H)$ 的确定性算子族，则 Φ 关于 B^h 的随机积分为

$$\int_0^t\Phi_s\mathrm{d}B^h(s):=\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{m_i}\int_0^t\Phi_se_i\mathrm{d}\beta_i^h(s)=\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{m_i}\int_0^t(K_h^*(\Phi e_i))_s\mathrm{d}\beta_i(s),\tag{4}$$

其中 $\{\beta_i\}$ 是相互独立的一维实值标准布朗运动序列.

如果一个函数 $u\in C([\tau,T];H)\cap L^2(\tau,T;V)$，对 $\forall\omega\in\Omega$，满足积分方程

$$u(t)=S(t-\tau)u_0-\int_\tau^tS(t-s)B(u(s))\mathrm{d}s+\int_\tau^tS(t-s)f(s)\mathrm{d}s+\int_\tau^tS(t-s)\mathrm{d}B^h(s),\tag{5}$$

则称 u 为方程(3)的一个温和解. 这里 $S(t):=\mathrm{e}^{-At}=\int\mathrm{e}^{-\lambda}t\,\mathrm{d}E_\lambda$，是由 A 生成的 H 的半群. 在式(5)中等式右端的前两个积分是 Bochner 积分，第 3 个积分是式(4)定义的 Wiener 型积分，记为 $z(t)$. 如果等式(5)右端的积分是良定的，那么它是线性随机方程 $\mathrm{d}z(t)+Az(t)\mathrm{d}t=\mathrm{d}B^h(t),\ z(0)=0\in H$ 的唯一温和解. 下面给出方程(3)的温和解的存在性.

命题 1　在假设条件(H_4)下，Wiener 型积分 $z(t)=\int_0^tS(t-s)\mathrm{d}B^h$ 是均方意义下在 V 中连续的可料 Gaussian 过程.

证明　对 $z(t)$ 在 V 上进行均方估计.

$$I_t:=\mathbf{E}\left\|\int_0^tS(t-s)\mathrm{d}B^h(s)\right\|_V^2=\mathbf{E}\left\|\sum_{i=0}^{\infty}\sqrt{m_i}\int_0^tS(t-s)e_i\mathrm{d}\beta_i^h(s)\right\|_V^2=$$

$$2\sum_ih(2h-1)m_i\lambda_i\int_0^t\int_0^u\mathrm{e}^{-(2t-u-v)\lambda_i}(u-v)^{2h-2}\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u.$$

通过变量代换 $y=\lambda_i(u-v)$，得到

$$I_t=2\sum_ih(2h-1)m_i\lambda_i^{2-2h}\mathrm{e}^{-2\lambda_it}\int_0^t\mathrm{e}^{2\lambda_iu}\int_0^{\lambda_iu}y^{2h-2}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u\leqslant h(2h-1)\left(\sum_i\frac{m_i}{\lambda_i^{2h-1}}\right)\Gamma(2h-1).\tag{6}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数. 由假设条件(H_4) 可知, z 在 V 中是良定的.

另外,对任意 $0\leqslant s\leqslant t$, 有

$$\mathbf{E}\|z(t)-z(s)\|_V^2=\mathbf{E}\left\|\int_s^t S(t-r)\mathrm{d}B^h(r)+\int_0^s[S(t-r)-S(s-r)]\mathrm{d}B^h(r)\right\|_V^2\leqslant$$

$$2\mathbf{E}\left\|\int_s^t S(t-r)\mathrm{d}B^h(r)\right\|_V^2+2\left\|\int_0^s[S(t-r)-S(s-r)]\mathrm{d}B^h(r)\right\|_V^2=:2I_1+2I_2.$$

经过类似于式(6) 的计算,得到:

$$I_1=\sum_i h(2h-1)m_i\lambda_i^{1-2h}\int_{\lambda_i s}^{\lambda_i t}y^{2h-2}\mathrm{e}^{-y}(1-\mathrm{e}^{-2(\lambda_i t-y)})\mathrm{d}y\leqslant$$

$$h(2h-1)\left(\sum_i\frac{m_i}{\lambda_i^{2h-1}}\right)\Gamma(2h-1)(1-\mathrm{e}^{-2\lambda_i(t-s)});$$

$$I_2=2\sum_i h(2h-1)m_i\lambda_i^{2-2h}(\mathrm{e}^{-\lambda_i t}-\mathrm{e}^{-\lambda_i s})^2\int_0^{\lambda_i t}y^{2h-2}\mathrm{e}^{-y}\int_{\lambda_i^{-1}y}^{t}\mathrm{e}^{2\lambda_i u}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y\leqslant$$

$$h(2h-1)\left(\sum_i\frac{m_i}{\lambda_i^{2h-1}}\right)\Gamma(2h-1)(\mathrm{e}^{-\lambda_i(t-s)}-1)^2.$$

以上证明了均方意义下在 V 中的连续性. 另外, $z(t)$ 是 Gaussian 过程,又因为 $S(t)$ 是确定性算子,且对于 $\forall u,v\in H$, $\langle S(t)u,v\rangle$ 是关于 t 连续的,因此 $z(t)$ 是可料的. 证毕.

注 2 类似于文献[1-2],利用上面的结果可以证明,当假设条件(H_3) 和(H_4) 成立时,对 $\forall u_0\in H$, $\omega\in\Omega$, $\tau\in\mathbf{R}$, 积分方程(5) 存在唯一解,使得 $u\in C(\tau,\infty;H)\cap L^2(\tau,\infty;V)$, 这就是方程(3) 的温和解.

下面给出随机动力系统(RDS) 及吸引子的有关概念,详细内容参见文献[3,7].

定义 1 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一个概率空间. 称 θ_1 是 Ω 上的一个保测流,如果一个映射 $\theta_1:\mathbf{R}\times\Omega\to\Omega$ 为 $(\mathscr{B}(\mathbf{R})\times\mathscr{F};\mathscr{F})$ 可测,并满足:(i) $\theta_1(t)\circ\theta_1(\tau)=\theta_1(t+\tau)$, $\forall t,\tau\in\mathbf{R}$; (ii) $\theta_1(0)=id_\Omega$; (iii) $\theta_1(t)P=P$, $\forall t\in\mathbf{R}$.

以下把 $\theta_1(t)$ 简记为 $\theta_{1,t}$. 关于保测流的存在性及其更多性质参看文献[8]. 本文把 fBm 看成是 $\Omega=\{\omega\in C(\mathbf{R},H):\omega(0)=0\}$, 并把 $\mathscr{F}$ 看成是在 Ω 中关于紧开拓扑的 Borel σ-代数,由于 fBm 是平稳增量过程,因此可以把 $\theta_{1,t}$ 定义为

$$\theta_{1,t}\,\omega(\cdot)=\omega(\cdot+t)-\omega(t),\ t\in\mathbf{R}.$$

定义 2 设$\{\theta_{2,t}\}_{t\in\mathbf{R}}$ 为一个非空集合 X 上的一族变换. 如果 $\theta_{2,0}$ 在 X 上是恒等映射,对 $\forall t,s\in\mathbf{R}$, 满足 $\theta_{2,s+t}=\theta_{2,t}\circ\theta_{2,s}$, 则称 $\theta_2:=\{\theta_{2,t}\}_{t\in\mathbf{R}}$ 为 X 上的一个参数流.

本文中根据需要,把上述定义中的集合 X 取为 $\mathbf{R}$, 并把参数流 θ_2 定义为 $\theta_{2,t}(s)=t+s$.

定义 3 设 E 是一个完备度量空间. 如果一个映射 $\varphi:\mathbf{R}^+\times\Omega\times\mathbf{R}\times E\to E$, 满足:

(i) φ 关于$(\mathscr{B}(\mathbf{R}^+)\times\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\mathbf{R})\times\mathscr{B}(E);\mathscr{B}(E))$-可测;

(ii) $\varphi(0,\omega,\tau,\cdot)=id_E$, $\forall\tau\in\mathbf{R}$;

(iii) $\varphi(t+s,\omega,\tau,x)=\varphi(t,\theta_{1,s}\omega,\theta_{2,s}(\tau),\varphi(s,\omega,\tau,x))$, $\forall t,s\in\mathbf{R}^+$, $\tau\in\mathbf{R}$, $\omega\in\Omega$, $x\in E$;

(iv) 对 $\forall t\in\mathbf{R}^+$, $\omega\in\Omega$, $\tau\in\mathbf{R}$, 映射 $\varphi(t,\omega,\tau,\cdot):E\to E$ 为连续.

则称 φ 为在 E 上的关于 Ω 的保测流 θ_1 和参数流 θ_2 的一个随机动力系统(RDS).

由注 2 定义由方程(3) 诱导出的随机动力系统:

$$\varphi(t,\omega,\tau,u_0)=u(t-\tau,\omega,u_0),$$

其中 $u(t-\tau,\omega,u_0)$ 是在 τ 时刻,以 u_0 为初始条件的方程(3) 的温和解. 本文将讨论该动力系统吸引子的存在性,首先给出吸引子的相关概念.

定义 4 设 E 是一个完备度量的空间. 一个映射 $K:\mathbf{R}\times\Omega\to 2^E$, 如果对 $\forall t\in\mathbf{R}$, $x\in E$, 映射 $\omega\mapsto d(x,K(t,\omega))$ 是关于 σ-代数$(\mathscr{F},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$ 可测的,则称 K 为可测的. 其中 d 为 Hausdorff 半度量,

$d(A,B)=\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y)$. 一个可测的映射 $K:\mathbf{R}\times\Omega\to 2^E$ 叫做在 E 上的依赖于时间的随机集合. 如果对于 $\forall t\in\mathbf{R}$, $\omega\in\Omega$, $K(t,\omega)$ 是 E 的有界集合,则称 K 为有界的随机集合. 如果对 $\forall t\in\mathbf{R}$, K 是 P-几乎确定是紧的,则称 K 为随机紧集合.

假设 φ 为 E 上的一个 RDS, K 为一个随机有界集合. 如果对任意有界集合 $B\subset E$,存在依赖于集合 B 的随机时间 $t_B(\omega)$,当 $t<t_B(\omega)$ 时,对任意 $\tau\in\mathbf{R}$,有 $\varphi(t,\omega,\tau,B)\subset K(t+\tau,\omega)$, P-a. s. ,则称 K 为随机动力系统 φ 的一个吸收集. 如果 φ 存在紧吸收集 K,则称 φ 为渐进紧.

一个随机集合 $\mathscr{A}$,如果对任意 $t\in\mathbf{R}^+$,有 $\varphi(t,\omega,\tau,\mathscr{A}(\tau,\omega))=\mathscr{A}(t+\tau,\omega)$, P. S. ,则称随机集合 $\mathscr{A}$ 是关于 φ 不变的. 如果一个关于 φ 不变的紧的随机集合 $\mathscr{A}$,对任意有界集合 B,当 $\tau\to-\infty$ 时,有 $d(\varphi(t,\omega,\tau,B),\mathscr{A}(t,\omega))\to 0$, P-a. s. ,则称 $\mathscr{A}$ 为 φ 的吸引子.

一个随机集合 K 的 Ω-极限集定义为 $\mathscr{A}(K,t,\omega)=\bigcap_{T>0}\overline{\bigcup_{s>T}\varphi(t,\omega,t-s,K(t-s,\omega))}$.

本文将利用下面的命题去证明方程(1)所诱导出的随机动力系统的随机吸引子的存在性.

命题 2[9]　如果一个随机动力系统 φ 拥有一个渐进紧的随机吸收集 K,那么 φ 存在唯一的随机吸引子 $\mathscr{A}$,且 $\mathscr{A}$ 是 K 关于 φ 的 Ω-极限集 $\mathscr{A}(K,t,\omega)$.

2　随机吸引子存在性的证明

为证明随机动力系统 φ 的吸收集存在性与渐进紧性,首先引进改进的分形 Ornstein-Uhlen beck 过程:

$$Z(t)=Z(\theta_{1,t}\,\omega)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-(\upsilon A+a)(t-r)}\,\mathrm{d}B^h(r),$$

于是有 $Z(0)=Z(\omega)=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{0}\mathrm{e}^{-(\upsilon A+a)(-r)}\,\mathrm{d}B^h(r)$. 在 V 中 $Z(\omega)$ 的均方估值为

$$\mathbf{E}\|Z(\omega)\|_V^2=\mathbf{E}\left\|\int_{\infty}^{0}\mathrm{e}^{(\upsilon A+a)r}\mathrm{d}B^h(r)\right\|_V^2=\mathbf{E}\left\|\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{m_i}\int_{-n}^{0}\mathrm{e}^{(\upsilon A+a)r}e_i\,\mathrm{d}\beta_i^h(r)\right\|_V^2\leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_i h(2h-1)\lambda_i m_i\int_{-n}^{0}\int_{-n}^{0}\mathrm{e}^{(\upsilon\lambda_i+a)(u+v)}\ |u-v|^{2h-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

类似于命题 1 的证明,经过计算得

$$\mathbf{E}\|Z(\omega)\|_V^2\leqslant h(2h-1)\left(\sum_i\frac{\lambda_i m_i}{(\upsilon\lambda_i+a)^{2h}}\right)\Gamma(2h-1)<\infty. \tag{7}$$

由此知 $Z(t)$ 在 V 中是良定的,并且 $Z(t)$ 是线性随机方程 $\mathrm{d}Z(t)+(\upsilon A+a)Z(t)=\mathrm{d}B^h$ 的唯一不变解. 再由 Birkhoff-Chin tehin 遍历理论,得

$$\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\int_{-n}^{0}\|Z(t)\|_V^2\mathrm{d}t=\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\int_{0}^{n}\|Z(\theta_{1,t}\,\omega)\|_V^2\mathrm{d}t=\mathbf{E}\|Z(\omega)\|_V^2<\infty. \tag{8}$$

经过变量替换 $u(t,\omega;\tau)=v(t,\omega;\tau)+Z(\theta_{1,t}\,\omega)$, $v(t)$ 满足如下具有随机系数的确定性方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\upsilon A(v)+B(v+Z)=f+aZ;\\ v(\tau)=u_0-Z(\theta_{1,\tau}\,\omega).\end{cases} \tag{9}$$

从 u 与 v 的关系式出发,对 $\forall(t,\omega,\tau,u_0)\in\mathbf{R}^+\times\Omega\times\mathbf{R}\times H$,得到如下关系式:

$$\varphi(t,\omega,\tau,u_0)=u(t+\tau,\omega,\tau,u_0)=v(t+\tau,\omega,\tau,u_0-Z(\theta_{1,\tau}\,\omega))+Z(t).$$

下面分别在空间 H 和 V 中对 v 进行先验估计.

引理 1　假设条件(H_2)与(H_4)成立,则对 $\forall s\in\mathbf{R}$, $\omega\in\Omega$,存在 $\rho_h(s,\omega)>0$, $\rho_1(s,\omega)$,使得对任意 $M>0$,存在 $t_2=t_2(s,\omega,M)<s-1$;当 $\tau<t_2$, $\|u_0\|<M$ 时,有:

$$\|v(t,\omega;\tau,u_0-Z(\theta_{1,\tau}\,\omega))\|^2\leqslant\rho_h(s,\omega),\ \forall t\in[s-1,s]; \tag{10}$$

$$\|u(t,\omega;\tau,u_0)\|^2\leqslant\rho_h(s,\omega),\ \forall t\in[s-1,s]; \tag{11}$$

$$\int_{s-1}^{s}\|v(t)\|_V^2\mathrm{d}t\leqslant\rho_1(s,\omega);\tag{12}$$

$$\int_{s-1}^{s}\|v(t)+Z(t)\|_V^2\mathrm{d}t\leqslant\rho_1(s,\omega).\tag{13}$$

证明 对方程(9)的第一式两端在 H 上与 $v(t)$ 作内积,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|v(t)\|^2}{\mathrm{d}t}+\upsilon\|v(t)\|_V^2=-b(v(t)+Z(t),v(t)+Z(t),v(t))+\langle f(t)+aZ(t),v(t)\rangle.\tag{14}$$

利用方程(2)的第一式,把三线性型 b 作如下估计:

$$2b(v+Z,Z,v)\leqslant 2C_1\|v+Z\|^{1/2}\cdot\|v+Z\|_V^{1/2}\cdot\|Z\|_V\cdot\|v\|^{1/2}\cdot\|v\|_V^{1/2}\leqslant$$
$$\frac{4C_1^2\|Z\|_V^2}{\upsilon}(\|Z\|^2+\|V\|^2)+\frac{\upsilon}{4}(\|Z\|_V^2+\|V\|_V^2)+\frac{2C_1^2\|Z\|_V^2}{\upsilon}\|V\|^2+\frac{\upsilon}{8}\|V\|_V^2.\tag{15}$$

利用 Young 不等式,得

$$2\langle f,v\rangle\leqslant\frac{8}{\upsilon}\|f\|_{V'}^2+\frac{\upsilon}{8}\|v\|_V^2;\tag{16}$$

$$2a\langle Z,v\rangle\leqslant\frac{2a^2}{\upsilon\lambda_1}\|Z\|^2+\frac{\upsilon\lambda_1}{2}\|v\|^2.\tag{17}$$

其中 λ_1 是算子 A 的最小的正特征值. 令 $g_1=\frac{4C_1^2}{\upsilon}\|Z\|_V^2\|Z\|^2+\frac{\upsilon}{4}\|Z\|_V^2+\frac{2a^2}{\upsilon\lambda_1}\|Z\|^2+\frac{8}{\upsilon}\|f\|_{V'}^2$,再结合式(15)—(17),从式(14)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2+(\frac{\upsilon\lambda_1}{2}-\frac{6C_1^2}{\upsilon}\|Z\|_V^2)\|v\|^2+\frac{\upsilon}{2}\|v\|_V^2\leqslant g_1.\tag{18}$$

利用 Gronwall 不等式,当 $t\in[s-1,s]$, $\tau<s-1$ 时,有

$$\|v(t)\|^2\leqslant\|v(\tau)\|^2\mathrm{e}^{-\int_\tau^t(\frac{\upsilon\lambda_1}{2}-\frac{6C_1^2}{\upsilon}\|Z\|_V^2)\mathrm{d}\zeta}+\int_\tau^t g_1(\zeta)\mathrm{e}^{-\int_\zeta^t(\frac{\upsilon\lambda_1}{2}-\frac{6C_1^2}{\upsilon}\|Z\|_V^2)\mathrm{d}l}\mathrm{d}\zeta\leqslant$$
$$\|v(\tau)\|^2\mathrm{e}^{-\int_\tau^{s-1}(\frac{\upsilon\lambda_1}{2}-\frac{6C_1^2}{\upsilon}\|Z\|_V^2)\mathrm{d}\zeta}+\int_\tau^s g_1(\zeta)\mathrm{e}^{-\int_\zeta^{s-1}(\frac{\upsilon\lambda_1}{2}-\frac{6C_1^2}{\upsilon}\|Z\|_V^2)\mathrm{d}l}\mathrm{d}\zeta.$$

根据分形 O-U 过程的遍历性(8)可知

$$\lim_{\tau\to-\infty}\frac{1}{s-1-\tau}\int_\tau^{s-1}\|Z(\zeta)\|_V^2\mathrm{d}\zeta=\mathbf{E}\|Z(\theta_{s-1}\omega)\|_V^2=\mathbf{E}\|Z(\omega)\|_V^2.$$

因为 $\sum_i\frac{\lambda_i m_i}{(\upsilon\lambda_i+a)^{2h}}\leqslant\sum_{i=1}^{n_0}\frac{\lambda_i m_i}{(\upsilon\lambda_i+a)^{2h}}+\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{\lambda_i m_i}{(\upsilon\lambda_i)^{2h}}$,由式(7)可知,当 a 值取充分大时,有 $\frac{6C_1^2}{\upsilon}\|Z(\omega)\|_V^2<\frac{\upsilon\lambda_1}{4}$. 因而,存在 $t_1(\omega)<s-1$,当 $\tau<t_1$ 时,有

$$\|v(t)\|^2\leqslant\mathrm{e}^{(1+\tau-s)\frac{\upsilon\lambda_1}{4}}\|u_0\|^2+2\int_\tau^s\mathrm{e}^{(\zeta+1-s)\frac{\upsilon\lambda_1}{4}}g_1(\zeta)\mathrm{d}\zeta,\ \forall\, t\in[s-1,s].$$

另一方面,由于

$$\|Z(t)\|_V=\left\|\int_{-\infty}^t(\upsilon A+a)\mathrm{e}^{(t-s)(-\upsilon A-a)}(B^h(t)-B^h(s))\mathrm{d}s\right\|_V\leqslant$$
$$\int_{-\infty}^t\|(\upsilon A+a)\mathrm{e}^{(t-s)(-\upsilon A-a)}\|\|(\upsilon A+a)^{\frac{1}{2}}(B^h(t)-B^h(s))\|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C\int_{-\infty}^t\frac{\mathrm{e}^{-a(t-s)}}{t-s}\|B^h(t)-B^h(s)\|_V\mathrm{d}s,$$

由文献[10]的引理 2.6 可知,$\|B^h(t,\omega)\|_V$ 至多是多项式增长,因此 $\|Z(t)\|_V$ 至多也是多项式增长. 从而,结合假设条件(H_2)得出,当 $\tau\to\infty$ 时,有 $\int_\tau^s g_1(\zeta)\mathrm{e}^{\zeta\frac{\upsilon\lambda_1}{4}}\mathrm{d}\zeta\leqslant\int_\infty^s g_1(\zeta)\mathrm{e}^{\zeta\frac{\upsilon\lambda_1}{4}}\mathrm{d}\zeta<\infty$, P-a.s.. 令 $\rho_h(s,\omega)=4\int_{-\infty}^s g_1(\zeta)\mathrm{e}^{(\zeta+1-s)\frac{\upsilon\lambda_1}{4}}\mathrm{d}\zeta+2\sup_{\zeta\in[s-1,s]}\|Z(\zeta)\|^2$,则存在 $t_2(\omega)<t_1(\omega)<s-1$,对于任意 $\|u_0\|\leqslant M$, $\tau<$

$t_2(\omega)$，有 $\max\{\|v(t,\omega,\tau,u_0-Z(\theta_{1,\tau}\omega))\|^2,\ \|u(t,\omega;\tau,u_0)\|^2\}\leqslant\rho_h(s,\omega)$，$\forall\, t\in[s-1,s]$.

下面证明不等式(12)和(13). 在区间$[s-1,s]$上对(18)式两端关于 t 作积分，得

$$\|v(s)\|^2+\frac{\upsilon}{2}\int_{s-1}^{s}\|v(t)\|_V^2\mathrm{d}t\leqslant\|v(s-1)\|^2+\int_{s-1}^{s}g_1(t)\mathrm{d}t.$$

因此，当 $\tau<t_2$ 时，有

$$\int_{s-1}^{s}\|v(t)\|_V^2\mathrm{d}t\leqslant(\frac{2}{\upsilon}\int_{s-1}^{s}g_1(t)\mathrm{d}t+\|v(s-1)\|^2)=:\rho_0(s,\omega).\tag{19}$$

由此可得

$$\int_{s-1}^{s}\|v(t)+Z(t)\|_V^2\mathrm{d}t\leqslant2\rho_0(s,\omega)+2\int_{s-1}^{s}\|Z(t)\|_V\mathrm{d}t=:\tilde{\rho}_0(s,\omega).\tag{20}$$

令 $\rho_1(s,\omega)=\max\{\rho_0(s,\omega),\tilde{\rho}_0(s,\omega)\}$，则由式(19)和(20)，可得引理结果(12)和(13). 证毕.

引理 2　假设(H_3)、(H_4)与(H_5)成立，则对 $s\in\mathbf{R}$，$\omega\in\Omega$，存在 $\rho_V(\omega)>0$，对 $\forall M>0$，存在 $\tilde{t}<s$；当$\|u_0\|<M$，$\tau<\tilde{t}$ 时，有

$$\|v(s,\omega,\tau,u_0-Z(\theta_{1,\tau}\omega))\|_{V^{1/2}}^2\leqslant\rho_V(\omega),\ \text{P-a. s.};$$

$$\|u(s,\omega;\tau,u_0)\|_{V^{1/2}}^2\leqslant\rho_V(\omega),\ \text{P-a. s.}.$$

证明　在 H 上对方程(9)的第一式两端用 $A^{1/2}v$ 作内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{1/4}v\|^2+\upsilon\|A^{3/4}v\|^2\leqslant|b(v+Z,v+Z,A^{1/2}v)|+\langle f,A^{1/2}v\rangle+a\langle Z,A^{1/2}v\rangle.\tag{21}$$

利用方程(2)的第二式，对 b 作如下估计：

$$\begin{aligned}&|b(v+Z,v+Z,A^{1/2}v)|\leqslant C_1\|v+Z\|_V\|v+Z\|_{V^{1/2}}\|A^{1/2}v\|_{V^{1/2}}\leqslant\\&\frac{C_1^2}{4\upsilon}\|v+Z\|_V^2\|v+Z\|_{V^{1/2}}^2+\upsilon\|A^{3/4}v\|^2.\end{aligned}\tag{22}$$

利用 Young 不等式，得：

$$\begin{aligned}&\langle f,A^{1/2}v\rangle\leqslant\frac{1}{2}(\|v\|_V^2+\|f\|_V^2),\\&a\langle Z,A^{1/2}v\rangle\leqslant\frac{1}{2}(a^2\|Z\|_V^2+\|v\|_V^2).\end{aligned}\tag{23}$$

由式(22)和(23)，不等式(21)变为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{1/4}v\|^2\leqslant\frac{C_1^2}{4}\|v+Z\|_V^2\|v+Z\|_{V^{1/2}}^2+\frac{1}{2}(2\|v\|_V^2+\|f\|_V^2+a^2\|Z\|_V^2).\tag{24}$$

令 $g_2:=\frac{1}{2}(2\|v\|_V^2+\|f\|_V^2+a^2\|Z\|_V^2)$，$g_3:=\frac{C_1^2}{4}\|v+Z\|_V^2$，则式(24)转换为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v(t)\|_{V^{1/2}}^2\leqslant g_2+g_3\|v(t)\|_{V^{1/2}}^2.$$

利用 Gronwall 不等式，对于 $s-1\leqslant\zeta\leqslant s$，有

$$\begin{aligned}&\|v(s)\|_{V^{1/2}}^2\leqslant\|v(\zeta)\|_{V^{1/2}}^2\cdot\mathrm{e}^{\int_\zeta^t g_3(l_1)\mathrm{d}l_1}+\int_\zeta^t g_2(l_2)\mathrm{e}^{\int_{l_2}^t g_3(l_1)\mathrm{d}l_1}\mathrm{d}l_2\leqslant\\&(\|v(\zeta)\|_{V^{1/2}}^2+\int_{s-1}^{s}g_2(l_2)\mathrm{d}l_2)\cdot\mathrm{e}^{\int_{s-1}^{s}g_3(l_1)\mathrm{d}l_1}.\end{aligned}\tag{25}$$

由于嵌入 $V\subset V^{1/2}$ 是连续性的，因此，存在 $C_2>0$，使得$\|v\|_{V^{1/2}}\leqslant C_2\|v\|_V$. 利用这个不等式，对式(25)两端在$[s-1,s]$上对 ζ 作积分，整理后得

$$\|v(s)\|_{V^{1/2}}^2\leqslant(C_2\int_{s-1}^{s}\|v(\zeta)\|_V^2\mathrm{d}\zeta+\int_{s-1}^{s}g_2(\zeta)\mathrm{d}\zeta)\cdot\mathrm{e}^{\int_{s-1}^{s}g_3(\zeta)\mathrm{d}\zeta}.\tag{26}$$

值得注意的是，由引理 1 的式(12)、(13)和假设条件(H_3)可知，当 $\tau\leqslant t_2=:\tilde{t}$ 时，$\int_{s-1}^{s}g_2(\zeta)\mathrm{d}\zeta$，

$\int_{s-1}^{s} g_3(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 及 $\int_{s-1}^{s}\|v(\zeta)\|_V^2\mathrm{d}\zeta$ 都是有界,因此,式(26)右端为一个随机常数,记为 $\rho'(\omega)>0$,于是有

$$\|u(s,\omega;\tau,u_0)\|_{V^{1/2}}^2 \leqslant \|v(s,\omega;\tau,u_0-Z(\theta_{1,\tau}\omega))\|_V^2+\|Z(s)\|_V^2 \leqslant \rho'(\omega)+\|Z(s)\|_V^2 =: \rho_V(\omega),\ \forall\,\tau<t_2,\ \text{a.s.},$$

由此证明了引理结论.证毕.

由引理1得出随机动力系统 φ 在 H 上存在随机吸引子.由于嵌入 $V^{1/2}\subset H$ 是紧的,因此,从引理2得出随机动力系统 φ 的渐进紧性.从而,得到如下结论:

定理1 如果随机 Navier-Stokes 方程(1)满足假设条件(H_1)—(H_4),则随机动力系统 φ 拥有唯一随机吸引子 $\mathscr{A}$.

参考文献:

[1] Flandoli F. Dissipativity and invariant measures for stochastic Navier-Stokes equations[J]. Nonlin Diff Eq Appl, 1994,1(4):403-423.

[2] Caraballo T, Lukaszewicz G, Real J. Pullback attractors for non-autonomous 2D-Navier-Stokes equations in some unbounded domains[J]. Comptes Rendus Mathématique, 2006,342(4):263-268.

[3] Li J, Huang J. Dynamics of stochastic non-Newtonian fluids driven by fractional Brownian motion with Hurst parameter[J]. Appl Math Mecha, 2013,34(2):189-208.

[4] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. Fractional Integrals and Derivatives[M]. Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[5] Biagini F, Hu Y, Øksendal B, et al. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications[M]. London: Springer-Verlag, 2008.

[6] Alos E, Mazet O, Nualart D. Stochastic calculus with respect to Gaussians processes[J]. Ann Probab, 1999,29(2):766-801.

[7] 韩英豪,王志鹏,于吉霞.随机 Ginzburg-Landau 方程的拉回吸引子[J].辽宁师范大学学报:自然科学版,2013,36(4):449-456.

[8] 韩英豪,苏红,于吉霞.随机2-维纳维-斯托克斯-伯格斯方程的不变测度的存在性[J].延边大学学报:自然科学版,2013,39(3):161-166.

[9] Crauel H, Flandoli F. Attractors for random dynamical systems[J]. Probab Theory Related Fields, 1994,100(3):365-393.

[10] Maslowski B, Schmalfuß B. Random dynamics systems and stationary solutions of differential equations driven by the fractional Brownian motion[J]. Stoahstic Anal Appl, 2004,22(6):1557-1607.