文章编号：1004-4353(2015)01-0025-05

带有分数阶边值条件的分数阶差分方程的正解

郭成，　丁卯松，　韩筱爽*
(延边大学 科学技术学院，吉林 延吉 133002)

摘要： 研究了一类带有分数阶边值条件的分数阶差分方程正解的存在性问题. 首先利用分数阶差分方程理论和边值条件给出了解的结构，其次分析了 Green 函数的一些性质，最后利用锥上的不动点定理证明了该问题正解的存在性.

关键词： 分数阶边值条件；Green 函数；正解
中图分类号： O175.6　　**文献标识码：** A

Existence of positive solution for a fractional difference equations with fractional boundary value condition

GUO Cheng，　DING Maosong，　HAN Xiaoshuang*
(*Institute of Science and Technology*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We study the existence of positive solutions of the boundary value problem for a fractional difference equation with fractional boundary value condition. Firstly, according to the theory of fractional difference equation and its boundary conditions, we got the structure of solutions, then analyze some properties of the Green's function, at last, the existence of the positive solutions of the problem is proved by using the fixed point theorem in cones.

Key words: fractional order boundary value condition; Green's function; positive solution

0　引言

分数阶微积分广泛应用于信号处理与控制、流体力学、分形理论、分数阶 PID 控制器设计等科学研究领域. 近年来随着分数阶差分方程模型的不断出现，以及对微分方程近似计算的需要，分数阶差分方程边值问题逐渐成为学者们关注的研究课题. 分数阶差分方程的边值条件种类很多，如带有两点边值条件[1]、局部边值条件[2]和非局部边值条件[3]的分数阶差分方程，其中即使边值条件带有差分方程结构也大多是整数阶次. 文献[4]研究了带有分数阶边值条件的差分方程，对其边值条件进行分析，并把它归结为非局部类型. 本文在前人的研究基础上，讨论了方程格林函数的一些性质，并利用锥上的不动点定理证明了该边值问题存在正解.

考虑如下带有分数阶边值条件的分数阶差分方程的边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta^{v} y(t) = f(t+v-1, y(t+v-1)),\ t \in [0, b+1]_{\mathbb{N}_0}; \\ y(v-2) = 0; \\ [\Delta^{\alpha} y(t)]_{t=v+b-\alpha+1} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期： 2014-09-21　　**基金项目：** 延边大学自然科学基金资助项目(延大科合字 2013 第 11 号)
* **通信作者：** 韩筱爽(1980—)，女，讲师，研究方向为可靠性与微分方程理论.

其中 $f:[v-1,v+b]_{\mathbf{N}_{v-1}}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数,$1<v\leqslant 2$, $0\leqslant\alpha<1$ 且 $\alpha,v\in\mathbf{R}$. 记 $\mathbf{N}_a=\{a,a+1,a+2,\cdots\}$, $[a,b]_{\mathbf{N}_a}=\{a,a+1,a+2,\cdots,b\}$, 其中 $b-a\in\mathbf{N}_1$.

1 预备知识[5-9]

定义 1 $t^{(v)}=\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-v)}$, $t,v\in\mathbf{R}$. 规定当 $t+1-v$ 是 Γ 函数的极点,而 $t+1$ 不是极点时, $t^{(v)}=0$.

引理 1 对于 $\forall\, t,v\in\mathbf{R}$, 如果 $t^{(v)}$, $t^{(v-1)}$ 都有定义,则有 $\Delta t^{(v)}=vt^{(v-1)}$.

定义 2 对于 $v>0$, 函数 f 的分数阶(v 阶)和分定义为

$$\Delta^{-v}f(t)=\Delta^{-v}f(t;a)=\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{t-v}(t-s-1)^{(v-1)}f(s),\ t\in\mathbf{N}_{a+v}.$$

定义 3 对于 $N\in\mathbf{N}$, $0\leqslant N-1<v\leqslant N$, 函数 f 的分数阶(v 阶)差分定义为

$$\Delta^{v}f(t)=\Delta^{N}\Delta^{v-N}f(t),\ t\in\mathbf{N}_{a+N-v}.$$

引理 2 设 f 是定义在 $\mathbf{N}_a$ 上的实函数, $\mu,v>0$, 则有

$$\Delta^{-v}(\Delta^{-\mu}f(t))=\Delta^{-(v+\mu)}f(t)=\Delta^{-\mu}(\Delta^{-v}f(t)),\ t\in\mathbf{N}_{a+\mu+v}.$$

引理 3 令 $0\leqslant N-1<v\leqslant N$, $c_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,3,\cdots,N$, 方程 $\Delta^{v}y(t)=0$ 的 N 个线性无关的解可以表示为 $y(t)=c_1t^{(v-1)}+c_2t^{(v-2)}+\cdots+c_Nt^{(v-N)}$.

引理 4 设 B 是一个 Banach 空间, P 是 B 上的一个锥,设 Ω_1,Ω_2 是含于 B 的开集,且 $0\in\Omega_1$, $\overline{\Omega}_1\subseteq\Omega_2$, $T:C\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to P$ 是一个完全连续算子,如果:

① $\|Ty\|\leqslant\|y\|$, $y\in P\cap\partial\Omega_1$, $\|Ty\|\geqslant\|y\|$, $y\in P\cap\partial\Omega_2$;

② $\|Ty\|\geqslant\|y\|$, $y\in P\cap\partial\Omega_1$, $\|Ty\|\leqslant\|y\|$, $y\in P\cap\partial\Omega_2$,

则算子 T 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 上至少有一个不动点.

2 Green 函数及其性质

定理 1[4] 设 $h:[v-1,v+b]_{\mathbf{N}_{v-1}}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, 则问题

$$\begin{cases}-\Delta^{v}y(t)=h(t+v-1),\ t\in[0,b+1]_{\mathbf{N}_0},\\ y(v-2)=0,\\ [\Delta^{\alpha}y(t)]_{t=v+b-\alpha+1}=0.\end{cases}\tag{2}$$

的唯一解为 $y(t)=\sum\limits_{s=0}^{b+1}G(t,s)h(s+v-1)$, 其中 $G:[v-2,v+b+1]_{\mathbf{N}_{v-2}}\times[0,b+1]_{\mathbf{N}_0}$,

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(v)}\begin{cases}\dfrac{(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}}{(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}}t^{(v-1)}-(t-s-1)^{(v-1)},\ (t,s)\in T_1;\\ \dfrac{(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}}{(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}}t^{(v-1)},\ (t,s)\in T_2\end{cases}$$

是问题(2)的格林函数. 这里

$$T_1=\{(t,s)\in[v-2,v+b+1]_{\mathbf{N}_{v-2}}\times[0,b+1]_{\mathbf{N}_0}:0\leqslant s<t-v+1\leqslant b+1\},$$

$$T_2=\{(t,s)\in[v-2,v+b+1]_{\mathbf{N}_{v-2}}\times[0,b+1]_{\mathbf{N}_0}:0\leqslant t-v+1<s\leqslant b+1\}.$$

定理 2 Green 函数 $G(t,s)$ 具有以下性质:

(I) $G(t,s)>0$, $(t,s)\in[v-2,v+b+1]_{\mathbf{N}_{v-1}}\times[0,b+1]_{\mathbf{N}_0}$;

(II) $\max_{t\in[v-2,v+b+1]_{\mathbf{N}_{v-1}}}G(t,s)=G(s+v-1,s)$, 其中 $s\in[0,b+1]_{\mathbf{N}_0}$;

(III) 存在 $\gamma\in(0,1)$, 使得 $\min_{t\in T}G(t,s)\geqslant\gamma\max_{t\in[v-1,v+b+1]_{\mathbf{N}_{v-1}}}G(t,s)=\gamma G(s+v-1,s)$.

记 $p=\dfrac{v+b+1}{4}$, $q=\dfrac{3(v+b+1)}{4}$,则 $T=[p,q]_{\mathbf{N}_p}$, $s\in[0,b+1]_{\mathbf{N}_0}$.

证明 (I) 当 $(t,s)\in T_2$,即 $0\leqslant t-v+1<s\leqslant b+1$ 时,$(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}=\dfrac{\Gamma(v+b-\alpha-s+1)}{\Gamma(b-s+2)}>0$,$(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}=\dfrac{\Gamma(v+b-\alpha+2)}{\Gamma(b+3)}>0$,显然有 $G(t,s)>0$;当 $(t,s)\in T_1$,即 $0\leqslant s<t-v+1\leqslant b+1$ 时,令 $F(t,s)=\dfrac{t^{(v-1)}(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}}{(t-s-1)^{(v-1)}(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}}$,由于 $\dfrac{(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}}{(t-s-1)^{(v-1)}}=\dfrac{\Gamma(v+b-\alpha-s+1)}{\Gamma(b-s+2)}\dfrac{\Gamma(t-s-v+1)}{\Gamma(t-s)}=\prod\limits_{i=0}^{v+b-t}\dfrac{v+b-\alpha-s-i}{b-s+1-i}$,则有 $\dfrac{(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}}{(t-s-1)^{(v-1)}}$ 在 $[0,b+1]_{\mathbf{N}_0}$ 上关于 s 严格递增,从而

$$F(t,s)=\frac{t^{(v-1)}(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}}{(t-s-1)^{(v-1)}(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}}>\frac{t^{(v-1)}(v+b-\alpha)^{(v-\alpha-1)}}{(t-1)^{(v-1)}(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}}=$$
$$\frac{t(b+2)}{(t-v+1)(v+b-\alpha+1)}>\frac{t(b+2)}{(t-v+1)(v+b+1)}>1,$$

即 $G(t,s)>0$. 综上,结论(I) 成立.

(II) 当 $(t,s)\in T_2$,即 $0\leqslant t-v+1<s\leqslant b+1\ (t<s+v-1)$ 时,有 $\Delta_t G(t,s)=\dfrac{(v-1)t^{(v-2)}}{\Gamma(v)}\cdot\dfrac{(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}}{(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}}>0$,即 $G(t,s)\leqslant G(s+v-1,s)$;当 $(t,s)\in T_1$,即 $0\leqslant s<t-v+1\leqslant b+1\ (t>s+v-1)$ 时,有 $\Delta_t G(t,s)=\dfrac{1}{\Gamma(v)}\Big[\dfrac{(v-1)t^{(v-2)}(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}}{(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}}-(v-1)(t-s-1)^{(v-2)}\Big]=\dfrac{(v-1)}{\Gamma(v)(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}}[t^{(v-2)}(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}-(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}(t-s-1)^{(v-2)}]$,其中

$$\frac{t^{(v-2)}(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}}{(t-s-1)^{(v-2)}(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}}=\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-v+3)}\frac{\Gamma(t-s-v+2)}{\Gamma(t-s)}\frac{\Gamma(v+b-\alpha-s+1)}{\Gamma(b-s+2)}\cdot$$
$$\frac{\Gamma(b+3)}{\Gamma(v+b-\alpha+2)}=\frac{t\cdots(t-s)}{(t-v+2)\cdots(t-v-s+2)}\frac{(b+2)\cdots(b-s+2)}{(v+b-\alpha+1)\cdots(v+b-\alpha-s+1)}=$$
$$\prod_{i=0}^{s}\frac{(t-i)(b+2-i)}{(t-v+2-i)(v+b-\alpha+1-i)}<1,$$

则有 $\Delta_t G(t,s)<0$,即 $G(t,s)\leqslant G(s+v-1,s)$. 综上,结论(II) 成立.

(III) 易知
$$\frac{G(t,s)}{G(s+v-1,s)}=\begin{cases}\dfrac{t^{(v-1)}}{(s+v-1)^{(v-1)}}-\dfrac{(t-s-1)^{(v-1)}(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}}{(s+v-1)^{(v-1)}(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}}, & (t,s)\in T_1;\\[2ex] \dfrac{t^{(v-1)}}{(s+v-1)^{(v-1)}}, & (t,s)\in T_2.\end{cases}$$

对于 $p\leqslant t\leqslant q$,当 $(t,s)\in T_2$,即 $0\leqslant t-v+1<s\leqslant b+1$ 时,有 $\dfrac{G(t,s)}{G(s+v-1,s)}=\dfrac{t^{(v-1)}}{(s+v-1)^{(v-1)}}\geqslant\dfrac{(p)^{(v-1)}}{(s+v-1)^{(v-1)}}\geqslant\dfrac{(p)^{(v-1)}}{(b+v)^{(v-1)}}$;当 $(t,s)\in T_1$,即 $0\leqslant s<t-v+1\leqslant b+1$ 时,由(II) 知 $\Delta G_t(t,s)<0$,有 $\dfrac{G(t,s)}{G(s+v-1,s)}=\dfrac{t^{(v-1)}}{(s+v-1)^{(v-1)}}-\dfrac{(t-s-1)^{(v-1)}(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}}{(s+v-1)^{(v-1)}(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}}\geqslant\dfrac{(q)^{(v-1)}}{(s+v-1)^{(v-1)}}-\dfrac{(q-s-1)^{(v-1)}(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}}{(s+v-1)^{(v-1)}(v+b-\alpha-s)^{(v-\alpha-1)}}$. 由文献[4] 中引理 7(II) 知 $\dfrac{(q-s-1)^{(v-1)}}{(v+b-s)^{(v-\alpha-1)}}$ 在 $[0,b+1]$ 上关于 s 严格递减,则有 $\dfrac{G(t,s)}{G(s+v-1,s)}\geqslant\dfrac{(q)^{(v-1)}}{(b+v)^{(v-1)}}-\dfrac{(q-1)^{(v-1)}(v+b-\alpha+1)^{(v-\alpha-1)}}{(b+v)^{(v-1)}(v+b-\alpha)^{(v-\alpha-1)}}=\dfrac{1}{(b+v)^{(v-1)}}\Big[(q)^{(v-1)}-\dfrac{v+b-\alpha+1}{b+2}(q-1)^{(v-1)}\Big]\geqslant\dfrac{1}{(b+v)^{(v-1)}}\Big[(q)^{(v-1)}-\dfrac{v+b+1}{b+2}(q-1)^{(v-1)}\Big]$. 设 $\gamma=\min\{\dfrac{(p)^{(v-1)}}{(b+v)^{(v-1)}},$

$\frac{1}{(b+v)^{(v-1)}}[(q)^{(v-1)}-\frac{v+b+1}{b+2}(q-1)^{(v-1)}]\}$，则显然 $\gamma\in(0,1)$. 综上，结论(III) 成立.

3 正解的存在性

记 Banach 空间 $B=\{y:[v-2,\cdots,v+b]_{\mathbf{N}_{v-1}}\rightarrow\mathbf{R}\mid y(v-2)=\Delta^{\alpha}y(v+b-\alpha+1)=0\}$，赋范数 $\|y\|=\max|y(t)|$，$t\in[v-2,v+b+1]_{\mathbf{N}_{v-2}}$. 定义算子 $T:B\rightarrow B$：$(Ty)(t)=\sum_{s=0}^{b+1}G(t,s)f(s+v-1,y(s+v-1))$. 易知，如果 y 是问题(1) 的解当且仅当 y 是算子 T 的不动点. 为得到正解存在性定理，给出如下 3 个假设：

(H_1) $f(t,y)\geqslant 0$ 且连续；

(H_2) $f(t,y)=h(t)F(y)$，其中 $h(t)$ 是正函数，$F(y)$ 是非负函数，且 $\lim_{y\rightarrow 0^+}\frac{F(y)}{y}=0$，$\lim_{y\rightarrow\infty}\frac{F(y)}{y}=\infty$.

(H_3) $f(t,y)=h(t)F(y)$，其中 $h(t)$ 是正函数，$F(y)$ 是非负函数，且 $\lim_{y\rightarrow 0^+}\frac{F(y)}{y}=\infty$，$\lim_{y\rightarrow\infty}\frac{F(y)}{y}=0$.

定义 B 上的锥

$P=\{y\in B\mid y(t)\geqslant 0,t\in[v-1,v+b+1]_{\mathbf{N}_{v-1}}\}$，

$P_0=\{y\in P\mid \min_{t\in[\frac{v+b+1}{4},\frac{3(v+b+1)}{4}]_{\mathbf{N}_{\frac{v+b+1}{4}}}}y(t)\geqslant\gamma\|y\|\}$.

引理 5 假设条件(H_1) 成立，则对于 $\forall y\in P$ 有 $Ty\in P_0$. 特别地，算子 T 是锥 P_0 到 P_0 上的映射.

证明 对于 $\forall y\in P$，由定理 2 和条件(H_1)，有$(Ty)(t)\geqslant 0$，$t\in[v-1,v+b+1]_{\mathbf{N}_{v-1}}$. 从而 $\min_{t\in[p,q]_{\mathbf{N}_p}}(Ty)(t)\geqslant\gamma\sum_{s=0}^{b+1}\max G(t,s)f(s+v-1,y(s+v-1))\geqslant\gamma\|Ty\|$，即对于 $\forall y\in P$，有 $Ay\in P_0$.

定理 3 (I) 如果条件(H_1) 和(H_2) 成立，则问题(1) 至少有一个非零解 $y\in P_0$；(II) 如果条件(H_1) 和(H_3) 成立，则问题(1) 至少有一个非零解 $y\in P_0$.

证明 (I) 记 $a=q-p+1$，$M=\max G(t,s)$，$m=\min G(t,s)$，$H=\max h(t)$，$h=\min h(t)$，这里 $t\in[v-1,v+b+1]_{\mathbf{N}_{v-1}}$，$s\in[0,b+1]_{\mathbf{N}_0}$. 取 $\Omega_1=\{y\in B\mid\|y\|<r\}$. 一方面，由条件($\mathrm{H}_2$) 知，对于 $\frac{1}{(b+2)MH}>0$，存在 $r\geqslant 1$，使得当 $0\leqslant y\leqslant r$ 时，有 $F(y)\leqslant\frac{y}{(b+2)MH}\leqslant\frac{r}{(b+2)MH}$；另一方面，对于 $\frac{1}{a\gamma mh}>0$，存在 $R>r>0$，使得当 $y\geqslant R$ 时，有 $F(y)\geqslant\frac{y}{a\gamma mh}\geqslant\frac{R}{a\gamma mh}$. 综上，对于 $\forall y\in P_0$，且 $\|y\|=r$，有 $(Ty)(t)\leqslant M\sum_{s=0}^{b+1}h(s+v-1)F(y(s+v-1))\leqslant MH\frac{r}{(b+2)MH}\sum_{s=0}^{b+1}1=r=\|y\|$. 从而，对于 $\forall y\in P_0\cap\partial\Omega_1$，有 $\|Ty\|\leqslant\|y\|$. 另取 $\Omega_2=\{y\in B\mid\|y\|<R_1\}$，这里 $R_1=\frac{R}{\gamma}>R$，由于 $\min_{t\in[p,q]_{\mathbf{N}_p}}y(t)\geqslant\gamma\|y\|=\gamma R_1=R$，可得 $y(t)\geqslant R$，从而对于 $\forall y\in P_0$ 且 $\|y\|=R_1$，有 $(Ty)(t)\geqslant mh\sum_{s=p-v+1}^{q-v+1}F(y(s+v-1))\geqslant mh\frac{R}{amh\gamma}\sum_{s=p-v+1}^{q-v+1}1=\frac{R}{\gamma}=R_1=\|y\|$，则对于 $\forall y\in P_0\cap\partial\Omega_2$，有 $\|Ty\|\geqslant\|y\|$. 从而由引理 3 知算子 T 至少有一个不动点 $y\in P_0\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$，且 $r\leqslant\|y\|\leqslant R_1$，即问题(1) 至少有一个正解 $y\in P_0$.

(II) 取 $\Omega_3=\left\{y\in B\mid\|y\|<\frac{r'}{\gamma}\right\}$，由条件($\mathrm{H}_3$) 知，对于 $\frac{1}{a\gamma mh}>0$，存在 $r'>0$，使得当 $0\leqslant y\leqslant r'$ 时，有 $\frac{F(y)}{y}\geqslant\frac{F(y)}{r'}\geqslant\frac{1}{a\gamma mh}$，即 $F(y)\geqslant\frac{r'}{a\gamma mh}$. 因此对于 $\forall y\in P_0$ 且 $\|y\|=\frac{r'}{\gamma}$，有 $(Ty)(t)\geqslant mh\sum_{s=p-v+1}^{q-v+1}F(y(s+v-1))\geqslant mh\frac{r'}{a\gamma mh}\sum_{s=p-v+1}^{q-v+1}1=\frac{r'}{\gamma}=\|y\|$. 从而对于 $\forall y\in P_0\cap\partial\Omega_3$，有 $\|Ty\|\geqslant\|y\|$.

(i) 当 $F(y)$ 存在上界 $K>0$ 时, 取 $\Omega_4=\{y\in B \mid \|y\|<R_2\}$, 正数 $R_2>\max\left\{\frac{r'}{\gamma},KMH(b+2)\right\}$,则对于 $\forall y\in P_0$ 且 $\|y\|=R_2$,有 $(Ty)(t)\leqslant M\sum_{s=0}^{b+1}h(s+v-1)g(y(s+v-1))\leqslant MHK\sum_{s=0}^{b+1}1=MKH(b+2)<R_2=\|y\|$,即对于 $\forall y\in P_0\cap\partial\Omega_4$,有 $\|Ty\|\leqslant\|y\|$.

(ii) 当 $F(y)$ 无界时,取 $\Omega_4=\{y\in B:\|y\|<R_4\}$. 由条件($H_3$)知,存在正数 R_3,使得当 $y\geqslant R_3$ 时,有 $F(y)\leqslant\frac{y}{(b+2)MH}$. 取正数 $R_4\geqslant R_3$,且 $R_4>\max\left\{\frac{r'}{\gamma},KMH(b+2)\right\}$,则当 $0<y\leqslant R_4$ 时,有 $F(y)\leqslant F(R_4)\leqslant\frac{R_4}{(b+2)MH}$,从而对 $\forall y\in P_0$,且 $\|y\|=R_4$,有 $(Ty)(t)\leqslant MH\sum_{s=0}^{b+1}F(R_4)\leqslant MH\frac{R_4}{(b+2)MH}\sum_{s=0}^{b+1}1\leqslant R_2=\|y\|$,即对于 $\forall y\in P_0\cap\partial\Omega_4$,有 $\|Ty\|\leqslant\|y\|$. 从而由引理 3 知算子 T 至少有一个不动点 $y\in P_0\cap(\overline{\Omega_4}\backslash\Omega_3)$,并且 $\frac{r'}{\gamma}\leqslant\|y\|=R_i$($i=2$ 或 3),即问题(1)至少有一个正解 $y\in P_0$.

参考文献:

[1] Atici F M, Eloe P W. Two-point boundary value problems for finite fractional difference equations[J]. J Difference Equ Appl, 2011,17(4):445-456.

[2] Goodrich C S. Solutions to a discrete right-focal boundary value problem[J]. Int J Difference Equ, 2010,5:195-216.

[3] Goodrich C S. Existence and uniqueness of solutions to a fractional difference equation with nonlocal conditions[J]. J Comput Math Appl, 2011,61(21):191-202.

[4] Goodrich C S. On a fractional boundary value problem with fractional boundary conditions[J] . J Applied Mathematics Letters, 2012,25:1101-1105.

[5] Miller K S, Ross B. Fractional difference calculus, procedings of the internations symposium on Univalent functions[J]. Fractional Calculus and their Applications Nihon University, 1988,1(4):139-152.

[6] Atici F M, Eloe P W. A transform method in discrete fractional calculus[J]. Int J Difference Equ, 2007,2(2):165-176.

[7] Atici F M, Eloe P W. Initial value problems in discrete fractional calculus[J]. Proc Amer Math Soc, 2009,137:981-989.

[8] 时宝,张德存,盖久明. 微分方程理论及其应用[M] . 北京:国防工业出版社,2005:13.

[9] 程金发. 分数阶差分方程理论[M]. 厦门:厦门大学出版社,2010.