文章编号: 1004-4353(2015)01-0021-04

一类混合分数阶 q-差分边值问题解的存在性

杨潇，白俊杰，葛琦*
(延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要: 研究了一类带有分数阶 q-差分边值条件的混合分数阶 q-差分方程解的存在性. 首先分析了格林函数的性质,然后借助 Lipschitz 条件,在 Banach 代数中利用不动点定理研究了该方程解的存在性,最后通过实例验证了所得结论的合理性.

关键词: 混合分数阶 q-差分; 不动点定理; 解的存在性
中图分类号: O175.6　　**文献标识码:** A

Existence of solutions for a class of boundary value problems with hybrid fractional q-differences

YANG Xiao, BAI Junjie, GE Qi*
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We study the existence of solutions for a class of the fractional q-differences hybrid equation with the fractional q-differences boundary conditions. Firstly, some characteristics of the Green function were analyzed. The second, we obtained sufficient conditions for the existence of positive solutions to this equation under Lipschitz condition using fixed point theorems in Banach algebra. The end, the main results were illustrated with the aid of examples.

Key words: hybrid fractional q-differences; fixed point theorem; existence of solutions

近年来,分数阶 q-差分微积分理论的研究受到人们的关注,并且关于分数阶 q-差分边值问题的研究取得了大量成果[1-7]. 其中 Bashir Ahmad 等[7] 在 $1<\alpha\leqslant 2$, $0<q<1$ 情况下,研究了一类带有 Dirichlet 边值条件的混合分数阶 q-差分方程解的存在性: $\begin{cases} D_q^\alpha\left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right)=g(t,x(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1; \\ x(0)=x(1)=0. \end{cases}$ 本文研究如下混合分数阶 q-差分边值问题:

$$\begin{cases} D_q^\alpha\left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right)=-g(t,x(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1; \\ x(0)=D_q x(0)=0,\ D_q^\nu\left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right)\Big|_{t=1}=\beta. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $2<\alpha\leqslant 3$, $0<q<1$, $1<\nu<2$, $\beta\geqslant 0$, $f:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 为连续函数,函数 $g:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的.

收稿日期: 2014-11-16
* **通信作者:** 葛琦(1975—),女,副教授,研究方向为常微分方程理论及其应用.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11161049);吉林省教育厅"十二五"科学技术研究项目(2015—2016)

1 预备知识

定义 1[6] 函数 $f(x)$ 的 q-导数定义为：$(D_q f)(x)=\dfrac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}$，$(D_q f)(0)=\lim\limits_{x\to 0}(D_q f)(x)$；函数 f 的高阶 q-导数定义为：$(D_q^0 f)(x)=f(x)$，$(D_q^n f)(x)=D_q(D_q^{n-1}f)(x)$，$n\in\mathbf{N}$.

定义 2[6] 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,b]$ 上的 q-积分定义为：

$$(I_q f)(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}_q t=x(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}f(xq^n)q^n,\ x\in[0,b].$$

定义 3[6] Riemann-Liouville 型分数阶 q-积分定义为：

$$(I_q^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^x(x-qt)^{(\alpha-1)}f(t)\mathrm{d}_q t,\ \alpha>0,\ x\in[0,1];$$

Riemann-Liouville 型分数阶 q-导数定义为：

$$(D_q^\alpha f)(x)=(D_q^m I_q^{m-\alpha}f)(x),\ \alpha>0,\ x\in[0,1].$$

其中 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数，规定 $(I_q^0 f)(x)=f(x)$，$(D_q^0 f)(x)=f(x)$，m 是不小于 α 的最小整数.

引理 1[6] 设 $\alpha>0$，p 是正整数，则

$$(I_q^\alpha D_q^p f)(x)=(D_q^p I_q^\alpha f)(x)-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^{\alpha-p+k}}{\Gamma_q(\alpha+k-p+1)}(D_q^k f)(0).$$

引理 2[6] 设 $\alpha,\beta\geqslant 0$，$f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数，则

$$(I_q^\beta I_q^\alpha f)(x)=(I_q^{\alpha+\beta}f)(x),\ (D_q^\alpha I_q^\alpha f)(x)=f(x).$$

引理 3[6] ${}_tD_q(t-s)^{(\alpha)}=[\alpha]_q(t-s)^{(\alpha-1)}$，$({}_xD_q\int_0^x f(x,t)\mathrm{d}_q t)(x)=\int_0^x {}_xD_q f(x,t)\mathrm{d}_q t+f(qx,x)$，这里 ${}_iD_q$ 表示与变量 i 有关的 q-导数.

引理 4[6] 若 $\alpha>0$，$a\leqslant b\leqslant t$，则 $(t-a)^{(\alpha)}\geqslant(t-b)^{(\alpha)}$.

引理 5[8] 设 S 是 Banach 代数 X 上的一个非空的、有界闭凸子集，设 $A:X\to X$ 和 $B:S\to X$ 是两个算子，且满足：

(i) A 满足 Lipschitz 条件，其中 L 为 Lipschitz 常数；

(ii) B 是完全连续的；

(iii) 对于 $\forall y\in S$，有 $x=AxBy\Rightarrow x\in S$；

(iv) $LM<1$，其中 $M=\|B(S)\|=\sup\{\|B(x)\|:x\in S\}$.

则算子方程 $AxBx=x$ 在 S 中有一个解.

2 Green 函数的性质

定理 1 设 $h:[0,1]\to[0,+\infty)$ 是连续的，且 $2<\alpha<3$，$1<\nu<2$，边值问题

$$\begin{cases}D_q^\alpha\left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right)=-h(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1;\\ x(0)=D_q x(0)=0,\ D_q^\nu\left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right)\Big|_{t=1}=\beta\end{cases}\tag{2}$$

的唯一解是 $x(t)=f(t,x(t))\left[\int_0^1 G(t,qs)h(s)\mathrm{d}_q s+\dfrac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}\right]$，其中

$$G(t,qs)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\begin{cases}t^{\alpha-1}(1-qs)^{(\alpha-\nu-1)}-(t-qs)^{(\alpha-1)},\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\\ t^{\alpha-1}(1-qs)^{(\alpha-\nu-1)},\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

证明 由引理 1 有 $\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}=C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+C_3t^{\alpha-3}-I_q^\alpha h(t)$ $(C_1,C_2,C_3\in\mathbf{R})$. 由条件 $x(0)=$

$D_q x(0)=0$ 得 $C_3=0$，$C_2=0$. 根据定义 3 和条件 $D_q^{\nu}\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right)\Big|_{t=1}=\beta$ 得

$$C_1=\frac{\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}\left[\beta+\frac{1}{\Gamma_q(\alpha-\nu)}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\nu-1)}h(s)\mathrm{d}_q s\right].$$

于是有

$$x(t)=f(t,x(t))\left\{\frac{\Gamma_q(\alpha-\nu)t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}\left[\beta+\frac{1}{\Gamma_q(\alpha-\nu)}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\nu-1)}h(s)\mathrm{d}_q s\right]-\right.$$
$$\left.\int_0^t\frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}h(s)\mathrm{d}_q s\right\}=f(t,x(t))\left[\int_0^1 G(t,qs)h(s)\mathrm{d}_q s+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}\right].$$

引理 6[6]　Green 函数 $G(t,qs)$ 具有以下性质：

(i) $G(t,qs)\geqslant 0$，$t,s\in[0,1]$；

(ii) $\max\limits_{t\in[0,1]}G(t,qs)=G(1,qs)$，$s\in[0,1]$.

3　解的存在性

首先利用引理 5 得到边值问题(1) 的解存在的充分条件. 为此，在 Banach 空间 $C([0,1],\mathbf{R})$ 上定义范数 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$，并且对于 $\forall x,y\in C([0,1],\mathbf{R})$，定义乘法$(xy)(t)=x(t)y(t)$，于是 $C([0,1],\mathbf{R})$ 是 Banach 代数. 为了方便，记 $T=\int_0^1 G(1,qs)\mathrm{d}_q s$，并假设下列条件成立：

(H_1) 存在常数 $L>0$，使得 $|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant L|x-y|$，$t\in[0,1]$，$x,y\in\mathbf{R}$；

(H_2) 存在一个函数 $\gamma(t)\in C([0,1],\mathbf{R}^+)$，使得对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $|g(t,x)|\leqslant\gamma(t)$，$t\in[0,1]$.

定理 2　假设条件(H_1) 和(H_2) 成立，如果 $L\left[T\|\gamma\|+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}\right]<1$，那么边值问题(1) 存在一个解.

证明　设 $X=C([0,1],\mathbf{R})$，定义 X 的子集 $W=\{x\in X:\|x\|\leqslant N\}$，其中

$$N=\frac{F_0\left[T\|\gamma\|+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}\right]}{1-L\left[T\|\gamma\|+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}\right]},$$

$$F_0=\sup_{t\in[0,1]}|f(t,0)|,$$

显然 W 是 X 上的一个有界闭凸子集. 由定理 1 知，边值问题(1) 与如下方程等价：

$$x(t)=f(t,x(t))\left[\int_0^1 G(t,qs)g(s,x(s))\mathrm{d}_q s+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}\right].\tag{3}$$

定义两个算子 $A:X\to X$ 和 $B:W\to X$：

$$Ax(t)=f(t,x(t)),\ t\in[0,1],$$

$$Bx(t)=\int_0^1 G(t,qs)g(s,x(s))\mathrm{d}_q s+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)},\ t\in[0,1],$$

于是方程(3) 变形为算子方程 $Ax(t)Bx(t)=x(t)$，$t\in[0,1]$. 下面将证明算子 A 和 B 满足引理 5 的条件.

首先 A 是 X 上的 Lipschitz 算子，其中 L 是 Lipschitz 常数. 事实上，设 $\forall x,y\in X$，由条件(H_1) 有

$$|Ax(t)-Ay(t)|=|f(t,x(t))-f(t,y(t))|\leqslant L|x(t)-y(t)|\leqslant L\|x-y\|,\ t\in[0,1],$$

因此，对于 $\forall x,y\in X$，有 $\|Ax-Ay\|\leqslant L\|x-y\|$.

其次 B 是 W 到 X 的完全连续算子. 先证明 B 是 W 上的连续算子. 事实上，设 W 上的序列$\{x_n\}$ 收敛于 $x\in W$，对于 $\forall t\in[0,1]$，由 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}Bx_n(t)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 G(t,qs)g(s,x_n(s))\mathrm{d}_q s+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}=$$

$$\int_0^1 G(t,qs)g(s,x(s))\mathrm{d}_q s+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}=Bx(t),$$

即 B 是 W 上的连续算子. 其次证明 B 是 W 上的紧算子,即 $B(W)$ 是一致有界的,且在 X 上是等度连续的. 事实上,设 $x\in W$,由引理 6 和条件(H_2) 知,对于 $\forall t\in[0,1]$ 有

$$|Bx(t)|\leqslant\int_0^1 G(1,qs)\gamma(s)\mathrm{d}_q s+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}\leqslant T\|\gamma\|+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)},$$

因此有 $\|Bx\|\leqslant T\|\gamma\|+\dfrac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}$, $x\in W$,即 $B(W)$ 是一致有界的. 此外,对于 $\forall t_1,t_2\in[0,1]$ 且 $t_1<t_2$,有

$$|Bx(t_2)-Bx(t_1)|\leqslant\|\gamma\|\left|\int_0^1[G(t_2,qs)-G(t_1,qs)]\mathrm{d}_q s\right|+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})=$$

$$\frac{\|\gamma\|}{\Gamma_q(\alpha)}\left|\int_0^1(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})(1-qs)^{(\alpha-\nu-1)}\mathrm{d}_q s-\int_0^{t_1}[(t_2-qs)^{(\alpha-1)}-(t_1-qs)^{(\alpha-1)}]\mathrm{d}_q s-\right.$$

$$\left.\int_{t_1}^{t_2}(t_2-qs)^{(\alpha-1)}\mathrm{d}_q s\right|+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})\leqslant\frac{\|\gamma\|}{\Gamma_q(\alpha)}\left[\left|\int_0^1(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})(1-qs)^{(\alpha-\nu-1)}\mathrm{d}_q s\right|+\right.$$

$$\left.\left|\int_0^{t_1}[(t_2-qs)^{(\alpha-1)}-(t_1-qs)^{(\alpha-1)}]\mathrm{d}_q s\right|+\left|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-qs)^{(\alpha-1)}\mathrm{d}_q s\right|\right]+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}),$$

因此有 $|Bx(t_2)-Bx(t_1)|\to0\ (t_1\to t_2)$,即 $B(W)$ 在 X 上是等度连续的. 再由 Arzela-Ascoli 定理知 $B(W)$ 是紧的,所以 B 是 W 到 X 的完全连续算子.

下面证明引理 5 中的条件(iii) 成立. 事实上,设 $x\in X$ 满足 $x=AxBy\ (\forall y\in W)$,由条件(H_1) 有

$$|x(t)|=|Ax(t)||By(t)|=|f(t,x(t))|\left|\int_0^1 G(t,qs)g(s,x(s))\mathrm{d}_q s+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}\right|\leqslant$$

$$[|f(t,x(t))-f(t,0)|+|f(t,0)|]\left|\int_0^1 G(t,qs)g(s,x(s))\mathrm{d}_q s+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}\right|\leqslant$$

$$[L|x(t)|+F_0][T\|\gamma\|+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}],$$

于是有 $|x(t)|\leqslant\dfrac{F_0[T\|\gamma\|+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}]}{1-L[T\|\gamma\|+\frac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}]}=N$,关于 t 取上确界有 $\|x\|\leqslant N$,即 $x\in W$.

最后证明引理 5 中的条件(iv) 成立. 事实上,令 $M=\|B(W)\|=\sup\{\|Bx\|:x\in W\}$,因此有 $M\leqslant T\|\gamma\|+\dfrac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}$. 于是,有 $LM\leqslant L[T\|\gamma\|+\dfrac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}]<1$.

综合以上结果可知,引理 5 中的条件均被满足,于是算子方程 $AxBx=x$ 在 W 中有一个解,即边值问题(1) 在 W 中存在一个解.

注 1 当 $f(t,x)=1$ 时,由文献[6] 可知边值问题(1) 的解存在.

例 1 考虑混合分数阶 q-差分边值问题

$$\begin{cases}D_{0.5}^{2.5}\left(\dfrac{x(t)}{\sin x+2}\right)=-\cos x,\ 0\leqslant t\leqslant1;\\ x(0)=D_{0.5}x(0)=0,\ D_{0.5}^{0.5}\left(\dfrac{x(t)}{\sin x+2}\right)=0.\end{cases}\tag{4}$$

其中 $\alpha=2.5$, $q=\nu=0.5$, $\beta=0$, $f(t,x)=\sin x+2$, $g(t,x)=\cos x$, $\gamma(t)=1$. 这样条件(H_1) 和(H_2) 均成立,根据文献[6] 知 $T=\int_0^1 G(1,qs)\mathrm{d}_q s<0.9$. 选取 $L=1$,则 $L[T\|\gamma\|+\dfrac{\beta\Gamma_q(\alpha-\nu)}{\Gamma_q(\alpha)}]<1$ 成立,因此边值问题(4) 存在一个解.

(下转第 41 页)

均时延反而越大. 这是因为用户数少时，用户在系统中的竞争不激烈，最小竞争窗口小，即处于退避的时间短，可以较快地传送 RFS 数据包，因而时延小；而当用户数明显增多时，用户在系统中的竞争激烈，若用户处于退避阶段的时间减少，则发生碰撞的概率增加，相应地平均时延也增加.

4　结论

本文以 WAVE 网络中基于 DCF 的信道预约方案为基础，通过构建马尔科夫分析模型，并采用排队论的分析方法，得出了系统中用户预约 SCH 所需的平均时延的表达式. 通过性能比较得知，RFS 数据包的生成速率和最小竞争窗口对用户预约 SCH 的平均时延有不可忽视的影响，而最大退避阶数只在用户数达到一定数量时才会对平均时延有影响. 本文的研究结果有助于提高车载通信网络的性能，但本文研究的信道预约方案在用户处于非饱和状态条件下的性能有待进一步研究.

参考文献：

[1] IEEE 802.11p. Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications Amendment 6: Wireless Access in Vehicular Environments[S]. IEEE Standard Board, 2010.

[2] IEEE 1609.4. IEEE Trial-Use Standard for Wireless Access in Vehicular Environments (WAVE) Multi-channel Operation[S]. IEEE Standard Board, 2006.

[3] Wang Q, Su P L, Fu H R, et al. An enhanced multi-channel MAC for the IEEE 1609.4 based vehicular Ad Hoc networks[C]//Curran associates. IEEE INFOCOM 2010 Proceeding. San Diego: IEEE Press, 2010: 1-2.

[4] Zhu D B, Zhu D D. Performance analysis of a multi-channel MAC with dynamic CCH interval in WAVE system [C]// Lu Q. Systems engineering and modeling. Beijing: Atlantis Press, 2013: 1160-1163.

[5] 崔纪平，朱东弼. 无线车载网络 MAC 协议算法之性能探究[J]. 电子测试，2013(13): 9-12.

[6] 刘娇，朱东弼. WAVE 网络中多信道 MAC 协议探讨[J]. 科技创新与应用，2014(27): 74.

[7] Bianchi G. Performance analysis of the IEEE 802.11 distributed coordination function[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communication, 2000, 3(18): 535-547.

(上接第 24 页)

参考文献：

[1] Ferreira R A C. Nontrivial solutions for fractional q-difference boundary value problems[J]. Theory of Differential Equations, 2010, 70: 1-10.

[2] Ferreira R A C. Positive solutions for a class of boundary value problems with fractional q-differences[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 61(2): 367-373.

[3] Ricardo Almeida, Natália Martins. Existence results for fractional q-difference equations of order $\alpha \in]2,3[$ with three-point boundary conditions[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19(6): 1675-1685.

[4] Zhao Yulin, Chen Haibo, Zhang Qiming. Existence results for fractional q-difference equations with nonlocal q-integral boundary conditions[J]. Advances in Difference Equations, 2013, 2013: 1-15.

[5] Zhao Yulin, Ye Guobing, Chen Haibo. Multiple positive solutions of a singular semipositione integral boundary value problem for fractional q-derivatives equation[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: 1-12.

[6] 孙明哲，韩筱爽. 一类分数阶 q-差分边值问题的正解[J]. 延边大学学报：自然科学版，2013, 39(4): 252-255.

[7] Bashir Ahmad, Sotiris K Ntouyas. Fractional q-difference hybrid equations and inclusions with Dirichlet boundary conditions[J]. Advances in Difference Equations, 2014, 2014: 1-14.

[8] Sun Shurong, Zhao Yige, Han Zhenlai. The existence of solutions for boundary value problems of fractional hybrid differential equations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(12): 4961-4967.