文章编号: 1004-4353(2015)01-0010-07

一类分数阶 q-差分系统边值问题解的存在性

孙明哲，　侯成敏
(延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要: 研究了一类带有分数阶边值条件的分数阶 q-差分系统正解的存在性. 首先，给出了该问题解的表达式，并分析了格林函数的性质，然后运用基本的不动点定理证明了该问题正解的存在性和唯一性. 最后，用具体例子验证了文中主要结论的正确性.

关键词: 分数阶 q-差分; 边值问题; 正解
中图分类号: O175.6　　　　**文献标识码:** A

Existence of solutions for boundary value problems with a coupled system of fractional q-differences

SUN Mingzhe,　HOU Chengmin
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We study the existence of positive solutions for a fractional q-difference system with a fractional boundary condition. Firstly, expressions of the solutions are presented, and properties of the Green function are analyzed. Secondly, the existence and uniqueness of the positive solutions of the problem are proved by basic fixed point theorem. Finally, the main conclusions are verified by some specific examples.

Key words: fractional q-differences; boundary value problem; positive solution

q-微积分对量子力学、核及高能物理等领域的研究具有重要作用[1-2]. 1910 年，Jackson[3] 首先引入了 q-微积分概念，之后 Al-Salam[4] 和 Agarwal[5] 分别给出了分数阶 q-微积分的基本概念和基本性质，同时 q-微积分的基本理论也得到了不断地发展[6-7]. 近年来，分数阶 q-差分边值问题作为新的研究方向受到国内外学者的关注，而且有了一定的研究成果[8-10]. 文献[11] 研究了非线性分数阶微分系统

$$\begin{cases}(D^{\alpha}u)(x)+f(x,v(x))=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 1\leqslant\alpha\leqslant 2;\\(D^{\beta}v)(x)+g(x,u(x))=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 1\leqslant\beta\leqslant 2;\\u(0)=0,\ u(1)=au(\xi);\\v(0)=0,\ v(1)=bv(\xi);\ 0<a,\ b<1,\ 0<\xi<1\end{cases}$$

的正解. 受文献[11] 启发，本文讨论了非线性分数阶 q-差分系统

收稿日期: 2014-12-15　　　**基金项目:** 吉林省教育厅“十二五”科学技术研究项目(吉教科合字[2014]第 20 号)
作者简介: 孙明哲(1979—)，女，讲师，研究方向为微分方程理论.

$$\begin{cases}(D_q^{\alpha}u)(t)+f(t,v(t))=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1;\\(D_q^{\beta}v)(t)+g(t,u(t))=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1;\\u(0)=D_qu(0)=0,\ D_q^{\upsilon}u(1)=\xi;\\v(0)=D_qv(0)=0,\ D_q^{\upsilon}v(1)=\eta\end{cases}\tag{1}$$

的正解的存在性和唯一性. 其中 $2<\alpha,\ \beta\leqslant 3,\ 1<\upsilon<2,\ \xi,\eta>0,\ f,g:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为非负连续函数.

1　预备知识

定义 1[8]　$[a]_q=\dfrac{1-q^a}{1-q},\ a\in\mathbf{R},\ q\in(0,1).$

定义 2[8]　将幂指函数 $(a-b)^n$ 的 q-类似定义为：

$$(a-b)^{(0)}=1,\ (a-b)^{(n)}=a^n\prod_{k=0}^{n-1}(a-bq^k),\ n\in\mathbf{N},\ a,b\in\mathbf{R};$$

$(a-b)^{(\alpha)}=a^{\alpha}\prod\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a-bq^n}{a-bq^{\alpha+n}},\ \alpha\in\mathbf{R}$，特别地，$b=0$ 时 $a^{(\alpha)}=a^{\alpha}$.

定义 3[8]　将 q-Γ 函数定义为 $\Gamma_q(x)=\dfrac{(1-q)^{(x-1)}}{(1-q)^{x-1}},\ x\in\mathbf{R}\backslash\{0,-1,-2,\cdots\}$.

由定义 3 易知，$\Gamma_q(x+1)=[x]_q\Gamma_q(x)$.

定义 4[8]　将函数 $f(x)$ 的 q-导数定义为：$(D_qf)(x)=\dfrac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x},\ (D_qf)(0)=\lim\limits_{x\to 0}(D_qf)(x)$.
将函数 f 的高阶 q-导数定义为：$(D_q^0f)(x)=f(x),\ (D_q^nf)(x)=D_q(D_q^{n-1}f)(x),\ n\in\mathbf{N}$.

定义 5[8]　将函数 $f(x)$ 在区间 $[0,b]$ 上的 q-积分定义为

$$(I_qf)(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}_qt=x(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}f(xq^n)q^n,\ x\in[0,b].$$

若函数 f 在区间 $[0,b]$ 上的 q-积分存在，则有：

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}_qt=\int_0^b f(t)\mathrm{d}_qt-\int_0^a f(t)\mathrm{d}_qt,\ a\in[0,b];$$

$$(I_q^0f)(x)=f(x),\ (I_q^nf)(x)=I_q(I_q^{n-1}f)(x),\ n\in\mathbf{N}.$$

性质 1[8]　$(D_qI_qf)(x)=f(x),\ (I_qD_qf)(x)=f(x)-f(0)\ (f(x)$ 在 $x=0$ 处连续).

性质 2[8]　$[a(t-s)]^{(\alpha)}=a^{\alpha}(t-s)^{(\alpha)},\ {}_tD_q(t-s)^{(\alpha)}=[\alpha]_q(t-s)^{(\alpha-1)}$,

$${}_sD_q(t-s)^{(\alpha)}=-[\alpha]_q(t-qs)^{(\alpha-1)},\ ({}_xD_q\int_0^x f(x,t)\mathrm{d}_qt)(x)=\int_0^x {}_xD_qf(x,t)\mathrm{d}_qt+f(qx,x).$$

这里 ${}_iD_q$ 表示与变量 i 有关的 q-导数.

性质 3[8]　若 $\alpha>0,\ a\leqslant b\leqslant t$，则 $(t-a)^{(\alpha)}\geqslant(t-b)^{(\alpha)}$.

定义 6[8]　将 Riemann-Liouville 型分数阶 q-积分定义为

$$(I_q^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^x(x-qt)^{(\alpha-1)}f(t)\mathrm{d}_qt,\ \alpha>0,\ x\in[0,1],$$

其中 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数，规定 $(I_q^0f)(x)=f(x)$.

定义 7[8]　将 Riemann-Liouville 型分数阶 q-导数定义为

$$(D_q^{\alpha}f)(x)=(D_q^mI_q^{m-\alpha}f)(x),\ \alpha>0,\ x\in[0,1],$$

其中 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数，规定 $(D_q^0f)(x)=f(x)$，m 是不小于 α 的最小整数.

性质 4[8]　设 $\alpha,\beta\geqslant 0$，$f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数，则：

① $(I_q^{\beta}I_q^{\alpha}f)(x)=(I_q^{\alpha+\beta}f)(x)$;

② $(D_q^\alpha I_q^\alpha f)(x)=f(x)$.

性质5[8]　设 $\alpha>0$，p 是正整数，则

$$(I_q^\alpha D_q^p f)(x)=(D_q^p I_q^\alpha f)(x)-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^{\alpha-p+k}}{\Gamma_q(\alpha+k-p+1)}(D_q^k f)(0).$$

性质6[8]　设 $\alpha\in\mathbf{R}^+$，$\lambda\in(-1,\infty)$，则

$$I_q^\alpha((x-a)^{(\lambda)})=\frac{\Gamma_q(\lambda+1)}{\Gamma_q(\alpha+\lambda+1)}(x-a)^{(\alpha+\lambda)},0<a<x<b.$$

引理1[11]　设 E 是一个Banach空间，$C\subseteq E$ 是 $\mathbf{B}$ 上的一个锥；设 U 是含于 C 的开集，且 $0\in U$，$T:\overline{U}\to C$ 是一个连续紧算子，那么有下列二者之一成立：

① 算子 T 在 $\overline{U}$ 上有不动点；

② 存在 $u\in\partial U$，$\lambda\in(0,1)$ 有 $u=\lambda Tu$.

2　主要结果及其证明

考虑下面方程

$$\begin{cases}(D_q^\alpha u)(t)+y(t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1;\\ u(0)=(D_q u)(0)=0,\ (D_q^\upsilon u)(1)=\xi\geqslant 0.\end{cases}\tag{2}$$

定理1　设 $y\in C[0,1]$ 且 $2\leqslant\alpha\leqslant 3$，那么 $u(t)$ 是问题(2)的解当且仅当 $u(t)$ 有以下形式：

$$u(t)=h(t)+\int_0^1 G_1(t,qs)y(s)\mathrm{d}_q s.\tag{3}$$

这里 $h(t)=\dfrac{\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}{\Gamma_q(\alpha)}\xi t^{\alpha-1}$，$t\in[0,1]$，

$$G_1(t,s)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\begin{cases}(1-s)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1}-(t-s)^{(\alpha-1)},\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\\ (1-s)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1},\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

证明　假设 $u(t)$ 是问题(2)的解，由定义7和性质5有

$$u(t)=C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+C_3t^{\alpha-3}-I_q^\alpha y(t),\ C_1,C_2,C_3\in\mathbf{R}.$$

利用边值条件 $u(0)=0$，$(D_q u)(0)=0$ 解得 $C_3=0$，$C_2=0$. 由性质4、性质6和定义7可知

$$(D_q^\upsilon u)(t)=\frac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}C_1t^{\alpha-\upsilon-1}-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}\int_0^t(t-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}y(s)\mathrm{d}_q s,$$

再利用边值条件 $(D_q^\upsilon u)(1)=\xi$，解得

$$C_1=\frac{\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}{\Gamma_q(\alpha)}\left[\xi+\frac{1}{\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}y(s)\mathrm{d}_q s\right],$$

从而

$$u(t)=\frac{\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}{\Gamma_q(\alpha)}\xi t^{\alpha-1}+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}y(s)\mathrm{d}_q s-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^t(t-qs)^{(\alpha-1)}y(s)\mathrm{d}_q s=$$
$$h(t)+\int_0^1 G_1(t,qs)y(s)\mathrm{d}_q s,$$

其中 $h(t)=\dfrac{\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}{\Gamma_q(\alpha)}\xi t^{\alpha-1}$，格林函数为

$$G_1(t,s)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\begin{cases}(1-s)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1}-(t-s)^{(\alpha-1)},\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\\ (1-s)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1},\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

反之，如果 $u(t)$ 满足(3)式，则不难推出 $u(t)$ 是问题(2)的解. 证毕.

同理可得问题 $\begin{cases}(D_q^\beta v)(t)+g(t,u(t))=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1;\\ v(0)=D_q v(0)=0,\ D_q^\upsilon v(1)=\eta\end{cases}$ 解的形式为

$$v(t)=\frac{\Gamma_q(\beta-\upsilon)}{\Gamma_q(\beta)}\eta t^{\beta-1}+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\beta)}\int_0^1(1-qs)^{(\beta-\upsilon-1)}g(s,u(s))\mathrm{d}_q s-$$
$$\frac{1}{\Gamma_q(\beta)}\int_0^t(t-qs)^{(\beta-1)}g(s,u(s))\mathrm{d}_q s=k(t)+\int_0^1 G_2(t,qs)g(s,u(s))\mathrm{d}_q s,$$

其中 $k(t)=\frac{\Gamma_q(\beta-\upsilon)}{\Gamma_q(\beta)}\eta t^{\beta-1}$, $G_2(t,s)=\frac{1}{\Gamma_q(\beta)}\begin{cases}(1-s)^{(\beta-\upsilon-1)}t^{\beta-1}-(t-s)^{(\beta-1)},\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\\(1-s)^{(\beta-\upsilon-1)}t^{\beta-1},\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$ 即 $G(t,qs)=(G_1(t,qs),G_2(t,qs))$ 为边值问题(1)的格林函数.

定理 2　格林函数 $G(t,s)$ 具有下面的性质:

① $G(t,s)\geqslant 0$, 对一切 $t,s\in[0,1]$;

② $G(t,s)\leqslant G(1,s)$, 对一切 $t,s\in[0,1]$.

证明　易知 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上是连续的. 下面证明 $G_1(t,s)\geqslant 0$, 记

$$g_1(t,s)=(1-s)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1}-(t-s)^{(\alpha-1)},\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;$$
$$g_2(t,s)=(1-s)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1},\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.$$

1) 易见 $g_2(t,s)\geqslant 0$. 利用性质 2 和性质 3 可得

$$g_1(t,s)=(1-s)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1}-(t-s)^{(\alpha-1)}=(1-s)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1}-(1-\frac{s}{t})^{(\alpha-1)}t^{\alpha-1}\geqslant$$
$$t^{\alpha-1}[(1-s)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-s)^{(\alpha-1)}].$$

因为 $1<\upsilon<2$, 故有 $(1-s)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-s)^{(\alpha-1)}=\prod_{n=0}^{+\infty}\frac{1-sq^n}{1-sq^{n+\alpha-\upsilon-1}}-\prod_{n=0}^{+\infty}\frac{1-sq^n}{1-sq^{n+\alpha-1}}\geqslant 0$, 从而对固定的 $s\in[0,1]$, $G_1(t,s)\geqslant 0$.

同理可知 $G_2(t,s)\geqslant 0$, 即 $G(t,s)\geqslant 0$. 证毕.

2) 易见 $g_2(t,s)$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$ 上对于固定的 s 是关于 t 单调递增的. 利用性质 2, 类似于 1) 的证明过程可得 ${}_tD_q g_1(t,s)=[\alpha-1]_q(1-s)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-2}-[\alpha-1]_q(t-s)^{(\alpha-2)}=t^{\alpha-2}[\alpha-1]_q[(1-s)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-\frac{s}{t})^{(\alpha-2)}]>t^{\alpha-2}[\alpha-1][(1-s)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-s)^{(\alpha-2)}]>0$. 由此知 $g_1(t,s)$ 在区间 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 上对于固定的 s 是关于 t 单调递增的, 故 $G_1(t,s)\leqslant G_1(1,s)$.

同理可知 $G_2(t,s)\leqslant G_2(1,s)$, 即 $G(t,s)\leqslant G(1,s)$ 成立. 证毕.

下面讨论问题(1)解的存在性和唯一性.

定义空间 $X=\{u(t)\,|\,u(t)\in C[0,1]\}$, 赋范数 $\|u\|_X=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|$; $Y=\{v(t)\,|\,v(t)\in C[0,1]\}$, 赋范数 $\|v\|_Y=\max_{t\in[0,1]}|v(t)|$; 对于 $(u(t),v(t))\in X\times Y$, 赋范数 $\|(u,v)\|_{X\times Y}=\max\{\|u\|_X,\|v\|_Y\}$; 设 $P=\{(u,v)\in X\times Y\,|\,u\geqslant 0,v\geqslant 0\}$, 那么锥 $P\subset X\times Y$.

定理 3　设 $f(t,v)$, $g(t,u)$ 是连续的, 那么 $(u(t),v(t))\in X\times Y$ 是边值问题(1)的解当且仅当 $(u(t),v(t))\in X\times Y$ 是 $\begin{cases}u(t)=h(t)+\int_0^1 G_1(t,qs)f(s,v(s))\mathrm{d}_q s;\\v(t)=k(t)+\int_0^1 G_2(t,qs)g(s,u(s))\mathrm{d}_q s\end{cases}$ 的一个解.

证明　由定理 1 易知定理 3 结论成立. 事实上, 设算子 $T: X\times Y\rightarrow X\times Y$, 其中

$$T(u,v)(t)=(h(t)+\int_0^1 G_1(t,qs)f(t,v)\mathrm{d}_q s,k(t)+\int_0^1 G_2(t,qs)g(s,u)\mathrm{d}_q s)=:(T_1v,T_2u).\quad(4)$$

由定理 1 可知, 算子 T 的不动点即为边值问题(1)的解.

定理 4　如果 $f(t,v)$, $g(t,u)$ 在 $[0,1]\times[0,+\infty)\rightarrow[0,+\infty)$ 上是连续的, 那么(4)式定义的算子 $T: P\rightarrow P$ 是完全连续的.

证明　设 $(u,v)\in P$, 由于 $G(t,qs)$, $f(t,v)$, $g(t,u)$ 是非负连续函数, 因此算子 $T: P\rightarrow P$ 是连续

的.设 Ω 是 P 的有界子集,即存在常数 $h>0$,对于 $\forall (u,v)\in\Omega$,有 $\|(u,v)\|\leqslant h$ 成立.选取

$$M=\max\{|f(t,v)|:0\leqslant t\leqslant 1,0\leqslant v\leqslant h\},$$
$$N=\max\{|g(t,u)|:0\leqslant t\leqslant 1,0\leqslant u\leqslant h\},\tag{5}$$

那么有

$$|T_1v(t)|=\left|\int_0^1 G_1(t,qs)f(s,v(s))\mathrm{d}_q s+h(t)\right|\leqslant$$
$$M\int_0^1 G_1(1,qs)\mathrm{d}_q s+\frac{\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}{\Gamma_q(\alpha)}\xi\leqslant M\int_0^1 G_1(1,qs)\mathrm{d}_q s+A,$$
$$|T_2u(t)|=\left|\int_0^1 G_2(t,qs)g(s,u(s))\mathrm{d}_q s+k(t)\right|\leqslant$$
$$N\int_0^1 G_2(1,qs)\mathrm{d}_q s+\frac{\Gamma_q(\beta-\upsilon)}{\Gamma_q(\beta)}\eta\leqslant N\int_0^1 G_2(1,qs)\mathrm{d}_q s+A$$

成立,这里 $A=\max\left\{\frac{\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}{\Gamma_q(\alpha)}\xi,\frac{\Gamma_q(\beta-\upsilon)}{\Gamma_q(\beta)}\eta\right\}$.于是有

$$\|T(u,v)\|\leqslant\max\left\{M\int_0^1 G_1(1,qs)\mathrm{d}_q s+A,N\int_0^1 G_2(1,qs)\mathrm{d}_q s+A\right\},$$

即 $T(\Omega)$ 一致有界.由于 $G_1(t,qs)$ 在$[0,1]\times[0,1]$上连续,且一致连续,因此对于固定的 $s\in[0,1]$ 和 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $\forall t_1,t_2\in[0,1]$ 且 $|t_1-t_2|<\delta$ 时,有 $|G_1(t_1,qs)-G_1(t_2,qs)|<\frac{\varepsilon}{M}$,$|t_1^{\alpha-1}-t_2^{\alpha-1}|<\varepsilon$ 成立,故有

$$|T_1v(t_2)-T_1v(t_1)|\leqslant M\int_0^1|G_1(t_2,qs)-G_1(t_1,qs)|\mathrm{d}_q s+A\varepsilon\leqslant(A+1)\varepsilon.$$

类似地,有

$$|T_2u(t_2)-T_2u(t_1)|\leqslant N\int_0^1|G_2(t_2,qs)-G_2(t_1,qs)|\mathrm{d}_q s+A\varepsilon\leqslant(A+1)\varepsilon.$$

当 $t_1,t_2\in[0,1]$ 且 $|t_1-t_2|<\delta$ 时,由 R^2 上欧几里得距离公式有

$$d(T(u,v)(t_2)-T(u,v)(t_1))=\sqrt{(T_1v(t_2)-T_1v(t_1))^2+(T_2u(t_2)-T_2u(t_1))^2}\leqslant\sqrt{2}(A+1)\varepsilon,$$

故 $T(P)$ 为等度连续.再由 Arzela-Ascoli 定理知算子 $T:P\to P$ 是完全连续的.证毕.

定理 5 如果 $f(t,v),g(t,u)$ 在$[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$上连续,且存在函数 $m(t)>0$,$n(t)>0$ 满足:

(H_1) $|f(t,v_2)-f(t,v_1)|\leqslant m(t)|v_2-v_1|$,$t\in[0,1]$,$v_1,v_2\in[0,+\infty)$;

(H_2) $|g(t,u_2)-g(t,u_1)|\leqslant n(t)|u_2-u_1|$,$t\in[0,1]$,$u_1,u_2\in[0,+\infty)$.

那么边值问题(1)有唯一的正解当且仅当 $\rho=\int_0^1 G_1(1,qs)m(s)\mathrm{d}_q s<1$,$\theta=\int_0^1 G_2(1,qs)n(s)\mathrm{d}_q s<1$ 成立.

证明 设$(u,v)\in P$,由于 $G(t,qs)$,$f(t,v)$,$g(t,u)$ 是非负连续函数,有 $T(u,v)(t)\geqslant 0$,故 $T(P)\subseteq P$.

$$\|T_1v_2-T_1v_1\|=\max_{t\in[0,1]}|T_1v_2-T_1v_1|=\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G_1(t,qs)[f(s,v_2)-f(s,v_1)]\mathrm{d}_q s\right|\leqslant$$
$$\int_0^1 G_1(1,qs)m(s)\mathrm{d}_q s\|v_2-v_1\|\leqslant\rho\|v_2-v_1\|.$$

类似地,有 $\|T_2u_2-T_2u_1\|\leqslant\theta\|u_2-u_1\|$.因此 $\|T(u_2,v_2)-T(u_1,v_1)\|\leqslant\max(\rho,\theta)\|(u_2,v_2)-(u_1,v_1)\|$,即 T 是一个压缩映像.由定理 4 知 T 是完全连续的,由 Banach 不动点定理知算子 T 在 P 上有唯一的不动点,即边值问题(1)有唯一的正解.

定理 6 如果 $f(t,v),g(t,u)$ 在$[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$上连续,且满足:

(H_3) $|f(t,v(t))|\leqslant a_1(t)+a_2(t)|v(t)|$;

(H_4) $|g(t,u(t))|\leqslant b_1(t)+b_2(t)|u(t)|$;

(H_5) $A_1=\int_0^1 G_1(1,qs)a_2(s)\mathrm{d}_q s<1$，$0<B_1=\int_0^1 G_1(1,qs)a_1(s)\mathrm{d}_q s<\infty$；

(H_6) $A_2=\int_0^1 G_2(1,qs)b_2(s)\mathrm{d}_q s<1$，$0<B_2=\int_0^1 G_2(1,qs)b_1(s)\mathrm{d}_q s<\infty$.

那么边值问题(1)至少有一个正解(u,v)，且

$$(u,v)\in C=\left\{(u,v)\in P \mid \|u,v\|<\max\left\{\frac{B_1+A}{1-A_1},\frac{B_2+A}{1-A_2}\right\}\right\}.$$

证明　令 $C=\{(u,v)\in P \mid \|u,v\|<r\}$，其中 $r=\max\left\{\frac{B_1+A}{1-A_1},\ \frac{B_2+A}{1-A_2}\right\}$. 定义形如(4)式的算子 $T:C\to P$，如果$(u,v)\in C$，即 $\|u,v\|<r$，那么

$$\|T_1 v\|=\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G_1(t,qs)f(s,v)\mathrm{d}_q s+k(t)\right|\leqslant\int_0^1 G_1(1,qs)(a_1(s)+a_2(s)|v(s)|)\mathrm{d}_q s+A\leqslant$$
$$\int_0^1 G_1(1,qs)a_1(s)\mathrm{d}_q s+\int_0^1 G_1(1,qs)a_2(s)\mathrm{d}_q s\,\|v(s)\|+A=B_1+A_1\|v\|+A\leqslant r.$$

类似地，$\|T_2 u\|\leqslant r$，故 $\|T(u,v)\|\leqslant r$，$T(u,v)\subseteq\bar{C}$. 由定理 4 可知，算子 $T:\bar{C}\to\bar{C}$ 是完全连续的.

考虑特征值问题

$$(u,v)=\lambda T(u,v),\ \lambda\in(0,1). \tag{6}$$

对于 $\lambda\in(0,1)$，假设(u,v)是(6)式的解，则得到

$$\|u\|=\|\lambda T_1 v\|=\lambda\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G_1(t,qs)f(s,v(s))\mathrm{d}_q s+h(t)\right|<$$
$$\int_0^1 G_1(1,qs)(a_1(s)+a_2(s)|v(s)|)\mathrm{d}_q s+A=\int_0^1 G_1(1,qs)a_1(s)\mathrm{d}_q s+$$
$$\int_0^1 G_1(1,qs)a_2(s)\mathrm{d}_q s\,\|v\|+A=B_1+A_1\|v\|+A\leqslant r.$$

类似地，$\|v\|=\|\lambda T_2 u\|<r$，故 $\|(u,v)\|<r$. 这表明$(u,v)\notin\partial C$，由引理 1 知算子 T 在 $\bar{C}$ 上存在不动点. 证毕.

例 1　考虑边值问题

$$\begin{cases}(D_{0.5}^{2.5}u)(t)+\dfrac{tv(t)}{v(t)+|\cos t|}=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1;\\ (D_{0.5}^{3}v)(t)+t\left[10+\dfrac{t^2}{20}+u(t)\right]=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1;\\ u(0)=D_{0.5}u(0)=0,\ D_{0.5}^{1.5}u(1)=\xi;\\ v(0)=D_{0.5}v(0)=0,\ D_{0.5}^{1.5}v(1)=\eta.\end{cases} \tag{7}$$

显然式中 $\alpha=2.5$，$\beta=3$，$q=0.5$，$\upsilon=1.5$，$f(t,v(t))=\dfrac{tv(t)}{v(t)+|\cos t|}$，$g(t,u(t))=t\left[10+\dfrac{t^2}{20}+u(t)\right]$. 令 $u_1,u_2,v_1,v_2\in[0,+\infty)$，$t\in[0,1]$，则有

$$|f(t,v_2)-f(t,v_1)|\leqslant t|v_2-v_1|,\ |g(t,u_2)-g(t,u_1)|\leqslant t|u_2-u_1|,$$

因此 $\rho\leqslant\int_0^1 G_1(1,qs)\mathrm{d}_q s=\int_0^1[(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-qs)^{(\alpha-1)}]\mathrm{d}_q s=\dfrac{1}{[\alpha-\upsilon]_q}-\dfrac{1}{[\alpha]_q}\approx 0.392\,631<1$；$\theta\leqslant\int_0^1 G_2(1,qs)n(s)\mathrm{d}_q s\leqslant\int_0^1[(1-qs)^{(\beta-\upsilon-1)}-(1-qs)^{(\beta-1)}]\mathrm{d}_q s=\dfrac{1}{[\beta-\upsilon]_q}-\dfrac{1}{[\beta]_q}\approx 0.202\,03<1$. 由此知问题(7)满足定理 5 的所有条件，从而问题(7)有唯一正解.

例 2　考虑边值问题

$$\begin{cases}(D_{0.5}^{2.5}u)(t)+t+\dfrac{t}{t+1}\ln(1+v(t))=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1;\\(D_{0.5}^{2.6}v)(t)+t^2+\cos t+u(t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1;\\u(0)=D_{0.5}u(0)=0,\ D_{0.5}^{1.5}u(1)=\xi;\\v(0)=D_{0.5}v(0)=0,\ D_{0.5}^{1.5}v(1)=\eta.\end{cases}\tag{8}$$

显然式中 $\alpha=2.5$, $\beta=2.6$, $q=0.5$, $\upsilon=1.5$, $f(t,v(t))=t+\dfrac{t}{t+1}\ln(1+v(t))$, $g(t,u(t))=t^2+\cos t+u(t)$,有 $|f(t,v(t))|\leqslant t+\dfrac{t}{t+1}|v(t)|$, $|g(t,u(t))|=(t^2+\cos t)+|u(t)|$,因此有:

$$A_1=\int_0^1 G_1(1,qs)a_2(s)\mathrm{d}_q s=\int_0^1[(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-qs)^{(\alpha-1)}]\frac{s}{1+s}\mathrm{d}_q s<$$

$$\int_0^1[(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-qs)^{(\alpha-1)}]\mathrm{d}_q s=\frac{1}{[\alpha-\upsilon]_q}-\frac{1}{[\alpha]_q}\approx 0.392\,631<1;$$

$$0<B_1=\int_0^1 G_1(1,qs)a_1(s)\mathrm{d}_q s=\int_0^1[(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-qs)^{(\alpha-1)}]s\,\mathrm{d}_q s<\infty;$$

$$A_2=\int_0^1 G_2(1,qs)b_2(s)\mathrm{d}_q s=\int_0^1[(1-qs)^{(\beta-\upsilon-1)}-(1-qs)^{(\beta-1)}]\mathrm{d}_q s=$$

$$\frac{1}{[\beta-\upsilon]_q}-\frac{1}{[\beta]_q}\approx 0.338\,477<1;$$

$$0<B_2=\int_0^1 G_2(1,qs)b_1(s)\mathrm{d}_q s=\int_0^1[(1-qs)^{(\beta-\upsilon-1)}-(1-qs)^{(\beta-1)}](s^2+\cos s)\mathrm{d}_q s<\infty.$$

因此,问题(8)满足定理 6 的所有条件,从而问题(8)至少有一个正解.

参考文献:

[1] Strominger A. Information in black hole radiation[J]. Phys Rev Lett, 1993,71:3743-3746.
[2] Youm D. q-deformed conformal quantum mechanics[J]. Phys Rev, 2000,62(9):1-9.
[3] Jackson F H. q-difference equations Amer[J]. J Math, 1910,32:305-314.
[4] Al-Salam W A. Some fractional q-integrals and q-derivatives[J]. Proc Edinb Math Soc, 1966,17:616-621.
[5] Agarwal R P. Certain fractional q-integrals and q-derivatives[J]. Proc Cambridge Philos Soc, 1969,66:365-370.
[6] Atici F M, Eloe P W. Fractional q-calculus on a time scale[J]. J Nonlinear Math Phys, 2007,14:333-344.
[7] Rajković P M, Marinković S D, Stanković M S. Fractional integrals and derivatives in q-calculus[J]. Discrete Math, 2007,1:311-323.
[8] Rui Ferreira. Positive solutions for a class of boundary value problems with fractional q-differences[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011,61(2):367-373.
[9] Ahmad B. Boundary-value problems for nonlinear third-order q-difference equations[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2011,94:1-7.
[10] Zhou W X, Liu H Z. Existence solutions for boundary value problem of nonlinear fractional q-difference equations [J]. Advances in Difference Equations, 2013,1:1-12.
[11] Wang Jinhua, Xiang Hongjun, Liu Zhigang. Positive solution to nonzero boundary values problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations[J]. International Journal of Differential Equations, 2010, 2010:1-13. DOI: 10.1155/2010/186928 .