文章编号：1004-4353(2015)01-0005-05

一类带脉冲呼吸系统疾病模型的周期解的存在性

曾晓云[1]， 侯成敏[2*]， 胡正高[3]

(1. 海军航空工程学院 系统科学与数学研究所，山东 烟台 264001；
2. 延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002；3. 海军航空工程学院 控制工程系，山东 烟台 264001)

摘要： 研究了具有脉冲效应的呼吸系统疾病模型，首先运用不等式技巧给出了该系统解的先验上界估计，其次运用迭合度理论中的延拓定理，得到了该系统至少存在一个正周期解的充分条件.

关键词： 脉冲；正周期解；迭合度；呼吸系统

中图分类号： O175.13　　**文献标识码：** A

Existence of periodic solutions for a respiratory diseases model with impulse

ZENG Xiaoyun[1]， HOU Chengmin[2*]， HU Zhenggao[3]

(1. *Institute of Systems Science and Mathematic*, *Naval Aeronautical and Astronautical University*, *Yantai* 264001, *China*; 2. *Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*; 3. *Department of Control Engineering*, *Naval Aeronautics and Astronautics University*, *Yantai* 264001, *China*)

Abstract: A respiratory diseases model with impulsive effects is investigated in this paper. A prior upper bound estimation for the solution of the system is given firstly. Using Gaines and Mawhin's continuation theorem from coincidence degree theory, we obtain the sufficient condition which ensures the system have at least one positive periodic solution.

Key words: impulse; positive periodic solution; coincidence degree; respiratory dynamics

1 问题的提出

Mackey 等[1]将非线性时滞微分方程

$$x'(t)+\frac{\alpha V_m x(t)x^n(t-\tau)}{\theta^n+x^n(t-\tau)}=\lambda,\ t\geqslant 0 \tag{1}$$

应用于呼吸系统疾病的动态病理模型，其中 $\alpha, V_m, \theta, \tau, \lambda\in(0,\infty)$，$n\in\mathbf{N}^+=\{1,2,\cdots\}$. 在方程(1)中，$x(t)$ 表示哺乳动物动脉中 CO_2 的浓度，λ 是 CO_2 的生成速度，V_m 表示最大通气量，τ 表示肺中血液氧合作用与脑干中化学传感器产生刺激之间的时间间隔. 研究表明，环境的周期变化会对许多生物和生态动力系统产生重要影响，Saker 等在文献[2]中研究了如下方程

$$x'(t)+\frac{\alpha V(t)x(t)x^n(t-m\omega)}{\theta^n+x^n(t-m\omega)}=\lambda(t), \tag{2}$$

收稿日期： 2014－12－11　　**基金项目：** 国家自然科学基金资助项目(11161049)

* **通信作者：** 侯成敏(1963—)，女，教授，研究方向为微分方程理论及其应用.

其中 m 与 n 是正整数,V 与 λ 是周期为 ω 的正周期函数,并得到了方程(2)正周期解存在和全局吸引的充分条件.事实上,任何生物或环境参数都随时间变化,假设时滞是常数并不现实.基于此,Chen 等[3] 给出了方程(2)的修正形式:

$$x'(t)+\frac{V(t)x(t)x^n(t-\tau(t))}{\theta(t)+x^n(t-\tau(t))}=r(t), \tag{3}$$

并得到了方程(3)正周期解存在和全局吸引的充分条件.在生态系统变化过程中,许多进化过程经过一段平稳变化后会发生突变,如年度捕获和放养的物种以及年度迁移的物种等,于是学者们引入了脉冲微分方程[4].考虑到环境的周期性及脉冲扰动的影响,本文研究下述具有脉冲效应的呼吸系统疾病模型:

$$\begin{cases} x'(t)+\dfrac{V(t)x(t)x^n(t-\tau(t))}{\theta(t)+x^n(t-\tau(t))}=r(t),\ t\neq t_k; \\ x(t_k^+)=\dfrac{1}{1+c_k}x(t_k),\ t=t_k, \end{cases} \tag{4}$$

并对系统(4)做如下假设:

(A_1) $n\in\mathbf{N}^+$, $V,\theta,r\in C(\mathbf{R},(0,\infty))$, $\tau\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$ 和 $\prod\limits_{0<t_k<t}(1+c_k)$ 均是周期为 ω 的函数,ω 是固定正整数;

(A_2) $c_k\in(-1,\infty)$, $k\in\mathbf{N}^+$, $\{t_k\}_{k\in\mathbf{N}^+}$ 是一严格单调增序列且存在 $q\in\mathbf{N}$ 使得 $t_{k+q}=t_k+\omega$, $t_1>0$, $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$.

基于生物学意义,只需考虑系统(4)的正解.作变换 $x(t)=1/y(t)$,则系统(4)化为下述非线性时滞脉冲微分方程

$$\begin{cases} y'(t)=y(t)\left[\dfrac{V(t)}{1+\theta(t)y^n(t-\tau(t))}-r(t)y(t)\right],\ t\neq t_k; \\ y(t_k^+)=(1+c_k)y(t_k),\ t=t_k. \end{cases} \tag{5}$$

本文将主要研究系统(5),其初始条件为 $y(t)=\varphi(t)$, $t\in[-\tau,0]$, $\varphi\in C([-\tau,0],[0,\infty))$, $\varphi(0)>0$,其中 $\tau=\max\limits_{t\in[0,\omega]}\tau(t)$.

2 主要结果及其证明

定义 1 称函数 $y\in([-\tau,\infty),(0,\infty))$ 是系统(5)在 $[-\tau,\infty)$ 的一个解,若满足:

(i) $y(t)$ 在 $(0,t_1]$ 上且在每个区间 $(t_k,t_{k+1}]$ 上绝对连续,其中 $k=1,2,\cdots$;

(ii) 对任意 t_k, $k=1,2,\cdots$, $y(t_k^+)$ 及 $y(t_k^-)$ 均存在且有 $y(t_k^-)=y(t_k)$;

(iii) $y(t)$ 在 $[0,\infty)\backslash\{t_k\}$ 内几乎处处满足系统(5)中的微分方程且满足 $t=t_k$, $k=1,2,\cdots$ 时刻下的脉冲条件方程.

定义 2 系统(5)被称作是持久的,如果存在两个正的常数 M 和 m,使得对系统(5)的任意解 $y(t)$ 都有 $m\leqslant\liminf\limits_{t\to\infty}y(t)\leqslant\limsup\limits_{t\to\infty}y(t)\leqslant M$.

设 T 是一给定常数且序列 $\{t_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 中的有限个点落在区间 $[0,T]$ 里.记 $PC([0,T],\mathbf{R}^n)$ 是满足以下条件的函数集合:函数 $x:[0,T]\to\mathbf{R}^n$,它在 $t\neq t_k$ 处连续,点 $t_k\in[0,T]$ 是函数的第一类不连续点且该点处左连续.引入范数 $\|x\|=\sup\{|x(t)|:t\in[0,T]\}$,从而 $PC([0,T],\mathbf{R}^n)$ 为一 Banach 空间.

定义 3 集合 $F\subset PC([0,T],\mathbf{R}^n)$ 在 $[0,T]$ 上是拟等度连续的,如果对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in F$, $k\in\mathbf{Z}$, $\tau_1,\tau_2\in(t_{k-1},t_k]\cap[0,T]$ 且 $|\tau_1-\tau_2|<\delta$ 时,有 $|x(\tau_1)-x(\tau_2)|<\varepsilon$.

引入下列引理:

引理 1[5] 集合 $F\subset PC([0,T],\mathbf{R}^n)$ 是相对紧的当且仅当:

(i) F 是有界的,即对每一 $x\in F$ 和常数 $l>0$,有 $\|x\|\leqslant l$;

(ii) F 在区间 $[0,T]$ 上是拟等度连续的.

为方便简记 $\bar{h}=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega h(t)\mathrm{d}t$, $g^*=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}g(t)$, $g_*=\min\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}g(t)$, $c=\sum\limits_{k=1}^{q}\ln(1+c_k)$, $f(t)=\frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nx(t-\tau(t))\}}-r(t)\exp\{x(t)\}$,其中 h,g 是周期为 ω 的函数.

定理 1　对系统(5)的初值 $\varphi(0)>0$ 来说,系统(5)的所有解满足 $y(t)>0$.

证明　对 $\forall t>0$,存在 $k\in\mathbf{N}$,使 $t\in(t_{k-1},t_k]$,并且有

$$y(t)=y(t_{k-1}^{+})\exp\left\{\int_{t_{k-1}}^{t}\left[\frac{V(t)}{1+\theta(t)y^n(t-\tau(t))}-r(t)y(t)\right]\mathrm{d}t\right\},$$

$$y(t_{k-1}^{+})=(1+c_{k-1})y(t_{k-1}).$$

由此可得到 $y(t)=\prod\limits_{j=1}^{k-1}(1+c_k)y(0^+)\exp\left\{\int_0^t\left[\frac{V(t)}{1+\theta(t)y^n(t-\tau(t))}-r(t)y(t)\right]\mathrm{d}t\right\}$,所以 $y(t)>0$.

定理 2　若条件(A_1)和(A_2)成立,且满足以下条件:

(A_3) 方程 $\int_0^\omega\frac{V(t)}{\theta(t)\exp\{nx\}}\mathrm{d}t-\int_0^\omega r(t)\exp\{x\}\mathrm{d}t+c=0$ 存在惟一的解,

则系统(5)至少存在一个正 ω-周期解.

证明　由定理 1 知系统(5)的所有解 $y(t)>0$,因此可对系统(5)做如下变换:

$$y(t)=\exp\{x(t)\},\tag{6}$$

从而系统(5)变成如下形式

$$\begin{cases}x'(t)=\dfrac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nx(t-\tau(t))\}}-r(t)\exp\{x(t)\},\ t\neq t_k;\\ \Delta x(t_k)=x(t_k^{+})-x(t_k)=\ln(1+c_k),\ t=t_k.\end{cases}\tag{7}$$

显然,若系统(7)有一个周期解 $x(t)$,那么系统(5)有一个正周期解 $y(t)=\exp\{x(t)\}$;因此,只要证明系统(7)至少存在一个周期解即可.

定义 $X=\{x:x\in PC_\omega\}$, $Y=X\times\mathbf{R}^q$,并定义

$$\|x\|_0=\sup_{t\in[0,\omega]}|x(t)|,\ x\in X,$$

$$\|y\|_1=\|x\|_0+\sum_{j=1}^{q}\|\xi_j\|,\ y=(x,\xi_1,\cdots,\xi_q)\in Y,$$

从而$(X,\|\cdot\|_0)$与$(Y,\|\cdot\|_1)$均为 Banach 空间.定义:$\mathrm{Dom}\,L=\{x\in X:x'\in X\}$, $L:\mathrm{Dom}\,L\to Y$, $L(x)=(x',(\Delta x(t_k))_{k=1}^q)$; $N:X\to Y$, $N(x)=(\frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nx(t-\tau(t))\}}-r(t)\exp\{x(t)\},(\ln(1+c_k))_{k=1}^q)$; $P:X\to X$, $P(x)=\bar{x}$; $Q:Y\to Y$, $Q(x,(m_k)_{k=1}^q)=(\bar{x}+\frac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{q}m_k,(0)_{k=1}^q)$.显然 $\mathrm{Im}\,L$ 在 Y 中是闭的,且有 $\mathrm{Im}\,P=\mathrm{Ker}\,L$, $\mathrm{Ker}\,Q=\mathrm{Im}\,L$,而 $\dim\mathrm{Ker}\,L=1=\mathrm{co}\dim\mathrm{Im}\,L$,从而知 L 是指标为 0 的 Fredholm 映射.进而广义逆映射 $K_P:\mathrm{Im}\,L\to\mathrm{Ker}\,P\cap\mathrm{Dom}\,L$ 为

$$K_P(x,(m_k)_{k=1}^q)=\int_0^t x(s)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}m_k-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^{q}m_k+\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{q}m_k t_k,$$

直接计算可得 $QNx=(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t)\mathrm{d}t+\frac{c}{\omega},(0)_{k=1}^q)$,且

$$K_P(I-Q)Nx=\int_0^t f(s)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}\ln(1+c_k)-\sum_{k=1}^{q}\ln(1+c_k)+\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{q}\ln(1+c_k)t_k+$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{\omega}\right)\left(\int_0^\omega f(t)\mathrm{d}t+c\right)-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理知,QN 和 $K_P(I-Q)N$ 都连续,进而由引理 1 并由周期性可知 $QN(\overline{\Omega})$ 和 $K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})$ 对任意有界开集 $\Omega \subset X$ 都是相对紧的,因此 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的.

下面寻找满足引理 1 的合适有界开子集 Ω. 考虑算子方程 $Lx=\lambda Nx$, $\lambda \in (0,1)$, 即

$$\begin{cases} x'(t)=\lambda f(t), \ t\neq t_k; \\ \Delta x(t_k)=\lambda \ln(1+c_k), \ t=t_k. \end{cases} \tag{8}$$

假设对 $\lambda \in (0,1)$, $x\in X$ 是方程(8) 的解,在区间$[0,\omega]$上对方程(8) 积分可得

$$\int_0^\omega \left\{\frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nx(t-\tau(t))\}} - r(t)\exp(x(t))\right\} \mathrm{d}t=-c,$$

从而

$$\int_0^\omega \frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nx(t-\tau(t))\}}\mathrm{d}t=\int_0^\omega r(t)\exp\{x(t)\}\,\mathrm{d}t-c. \tag{9}$$

由(8) 和(9) 式可得

$$\int_0^\omega |x'(t)|\,\mathrm{d}t<\int_0^\omega \frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nx(t-\tau(t))\}}\mathrm{d}t+\int_0^\omega r(t)\exp\{x(t)\}\,\mathrm{d}t=$$

$$2\int_0^\omega \frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nx(t-\tau(t))\}}\mathrm{d}t+c<2\int_0^\omega V(t)\mathrm{d}t+c=2\bar{V}\omega+c,$$

即

$$\int_0^\omega |x'(t)|\,\mathrm{d}t<2\bar{V}\omega+c. \tag{10}$$

进一步,对任意 $\zeta \in [0,\omega]$ 有下述不等式成立:

$$x(t)\geqslant x(\zeta)-\int_0^\omega |\dot{x}(s)|\,\mathrm{d}s-\sum_{k=1}^{q}|\ln(1+c_k)|; \tag{11}$$

$$x(t)\leqslant x(\zeta)+\int_0^\omega |\dot{x}(s)|\,\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{q}|\ln(1+c_k)|. \tag{12}$$

由于 $x\in X$, 从而存在 $\xi,\eta\in[0,\omega]$ 使得

$$x(\xi)=\inf_{t\in[0,\omega]} x(t), \ x(\eta)=\sup_{t\in[0,\omega]} x(t). \tag{13}$$

因此,从(9) 和(13) 式可得

$$\bar{r}\omega\exp(x(\xi))=\int_0^\omega r(t)\exp\{x(\xi)\}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\omega r(t)\exp\{x(t)\}\,\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^\omega \left\{\frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nx(t-\tau(t))\}}\right\}\mathrm{d}t+c\leqslant\int_0^\omega V(t)\mathrm{d}t+c=\bar{V}\omega+c,$$

从而 $x(\xi)\leqslant \ln(\frac{\bar{V}\omega+c}{\bar{r}\omega})$. 再由(10) 和(12) 式可得

$$x(t)<\ln(\frac{\bar{V}\omega+c}{\bar{r}\omega})+2\bar{V}\omega+c+\sum_{k=1}^{q}|\ln(1+c_k)|:=M_1, \tag{14}$$

进而,由(9) 和(13) 式可得

$$\overline{\left(\frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nM_1\}}\right)}\omega=\int_0^\omega \left\{\frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nM_1\}}\right\}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\omega \frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nx(t-\tau(t))\}}\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^\omega r(t)\exp\{x(t)\}\,\mathrm{d}t-c\leqslant\int_0^\omega r(t)\exp\{x(\eta)\}\,\mathrm{d}t-c=\bar{r}\omega\exp\{x(\eta)\}-c,$$

从而有 $x(\eta)\geqslant \ln\left(\frac{1}{\bar{r}\omega}\left(\overline{\left(\frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nM_1\}}\right)}\omega+c\right)\right)$. 再由(10) 及(11) 式可得

$$x(t)>\ln\left(\frac{1}{\bar{r}\omega}\overline{\left(\frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nM_1\}}\right)}\omega+c\right)-(2\bar{V}\omega+c)-\sum_{k=1}^{q}|\ln(1+c_k)|:=M_2. \tag{15}$$

由(14)和(15)式可得

$$\sup_{t\in[0,\omega]}|x(t)|<\max\{|M_1|,|M_2|\}:=M. \tag{16}$$

取 $\Omega=\{x\in X:\|x\|_0<M\}$. 显然 M 与 λ 无关，且 Ω 满足引理 1 的条件(i). 若 $x\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L=\partial\Omega\cap\mathbf{R}$，则 x 是一个常数并记为 d，且有 $\|x\|_0=M$. 由算子 N 与 Q 的定义知

$$QNx=\left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t)\mathrm{d}t+\frac{c}{\omega},(0)_{k=1}^q\right).$$

若 $QNd=0$，则有 $\int_0^\omega\left\{\frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nd\}}-r(t)\exp\{d\}\right\}\mathrm{d}t=-c$. 类似于(14)—(16)式，$M=|d|\leqslant\max\{|M_1|,|M_2|\}<M$，矛盾，从而表明 $QNx\neq0,\forall x\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L$，引理 1 的条件(ii)成立.

定义 $\varphi:\operatorname{Dom}L\times[0,1]\to X$ 为

$$\varphi(x,\mu)=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\left\{\frac{V(t)}{1-\mu+\theta(t)\exp\{nx(t-\tau(t))\}}-r(t)\exp\{x(t)\}\right\}\mathrm{d}t+\frac{c}{\omega},$$

若存在 $x\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L$ 使得 $\varphi(x,\mu)=0$，那么 $x=d$ 是范数 $|d|=M$ 的常数，且有

$$\int_0^\omega\frac{V(t)}{1+\theta(t)\exp\{nd\}}\mathrm{d}t=\int_0^\omega r(t)\exp\{d\}\mathrm{d}t-c.$$

同样类似于(14)—(16)式，$M=|d|\leqslant\max\{|M_1|,|M_2|\}<M$，矛盾，从而表明

$$\varphi(x,\mu)\neq0,\forall x\in(\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L)\times[0,1].$$

若 $\varphi(d,1)=0$，则有 $\int_0^\omega\frac{V(t)}{\theta(t)\exp\{nd\}}\mathrm{d}t=\int_0^\omega r(t)\exp\{d\}\mathrm{d}t-c$. 由定理 2 的条件知，上述方程存在惟一的解. 直接计算知 $\deg(\varphi(.,1),\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)=-1\neq0$. 再由同伦不变性知 $\deg\{JQNx,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\}=\deg(\varphi(.,0),\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)=\deg(\varphi(.,1),\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)\neq0$. 由于 $\operatorname{Im}Q=\ker L$，故取 J 为恒等映射.

因而 Ω 满足引理 1 的所有条件，所以系统(7)至少存在一个 ω-周期解. 由(6)式可知，系统(5)至少存在一个正 ω-周期解. 证毕.

参考文献：

[1] Mackey M C, Glass L. Oscillation and chaos in physiological control system[J]. Science, 1977,197:287-289.

[2] Saker S H, Agarwal S. Oscillation and global attractivity in a nonlinear delay periodic model of respiratory dynamics[J]. Comput Math Appl, 2002,44(5/6):623-632.

[3] Chen Y, Huang L. Existence and global attractivity of a positive periodic solution of a delayed periodic respiration model[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005,49(5):677-687.

[4] Bainov D, Simeonov P. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications[M]. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1993.

[5] Sun T, Xi H. Global attractivity for a family of nonlinear difference equations[J]. Appl Math Lett, 2007,20(7):741-745.

[6] Wang W T. Positive pseudo almost periodic solutions for a class of differential iterative equations with biological background[J]. Appl Math Lett, 2015,46:106-110.

[7] Zhang H, Wang L, Yang M. Existence and exponential convergence of the positive almost periodic solution for a model of hematopoiesi[J]. Appl Math Lett, 2013,26:38-42.