文章编号: 1004-4353(2015)01-0001-04

完备的 *D*-度量空间上具有收缩型条件映射族的唯一公共不动点

龚学, 徐佳宁, 吴凡, 朴勇杰*
(延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 利用完备的 D-度量空间上满足某种收缩条件的 4 个自映射 S,T,I,J 构造了具有唯一极限的序列,并证明了该序列的唯一极限即为 S,T,I,J 的唯一公共不动点,且由此得到了更为一般形式的无穷多个映射的唯一公共不动点定理,所得结果推广和改进了 D-度量空间上的若干唯一公共不动点定理.

关键词: D-度量空间; 弱相容; 重合点; 公共不动点
中图分类号: O177.3; O189.11　　**文献标识码:** A

Unique common fixed points for a family of mappings with contractive type conditions on complete *D*-metric spaces

GONG Xue, XU Jianing, WU Fan, PIAO Yongjie*
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We use four self-mappings S, T, I, J satisfying some contractive conditions on complete D-metric spaces to construct a sequence which has a unique limit, and prove that the unique limit of the sequence is the unique common fixed point of S, T, I, J. Furthermore, we obtain a more general unique common fixed point theorem for an infinite family of self-mappings. The obtained results generalize and improve some unique common fixed point theorems on D-metric spaces.

Key words: D-metric space; weakly compatible; coincidence point; common fixed point

1 基本概念及引理

1992 年, B Dhage[1] 引进了 D-度量空间,并在该空间上得到收缩型映射的不动点定理.之后,文献[2-6]给出了若干满足收缩条件的一个映射的不动点定理和若干个映射的公共不动点定理,文献[7-8]分别给出了在 D-度量空间上无穷多个映射的唯一公共不动点存在定理.

下面给出本文所需要的基本概念和引理.

定义 1[7-8] 设 X 是非空集合, $D: X\times X\times X\to \mathbf{R}^+=[0,+\infty)$ 为映射.称(X,D)为 D-度量空间,如果满足如下条件:

(i) $D(x,y,z)=0 \Leftrightarrow x=y=z$(重叠性);

(ii) 对任何 $x,y,z\in X$, $D(x,y,z)=D(u,v,w)$, $\forall \{u,v,w\}=\{x,y,z\}$(对称性);

(iii) 对任何 $x,y,z,a\in X$, $D(x,y,z)\leqslant D(x,y,a)+D(x,a,z)+D(a,y,z)$.

收稿日期: 2014-12-23　　**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11361064)
* **通信作者:** 朴勇杰(1962—),男,理学博士,教授,研究方向为非线性分析和不动点理论.

定义 2[7-8] 设$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$是D-度量空间X中序列，$x\in X$. 若$\lim\limits_{m,n\to+\infty}D(x_m,x_n,x)=0$，则称$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ D-收敛于x. 称序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$为D-柯西是指$\lim\limits_{m,n,p\to+\infty}D(x_m,x_n,x_p)=0$. 完备的$D$-度量空间$(X,D)$是指$X$中每个$D$-柯西序列都$D$-收敛于$X$中的点. 称一个子集$S\subset X$是有界的是指存在一个常数$M\geqslant 0$满足$D(x,y,z)\leqslant M$，$\forall x,y,z\in X$. 此时，称$M$是$S$的一个$D$-有界数.

文献[2,7]中指出，如果D-度量关于两个变元是连续的，则收敛序列的极限是唯一的. 本文假设D-度量关于两个变元是连续的.

定义 3[9-10] 设X是非空集合，$f,g:X\to X$是两个映射. 如果存在$x,w\in X$使得$w=fx=gx$，则称x是$\{f,g\}$的重合点，w是$\{f,g\}$的重合的点.

定义 4[11] 设X是非空集合，$f,g:X\to X$是两个映射. 如果$x\in X$且$fx=gx$时，$fgx=gfx$成立，则称$\{f,g\}$是弱相容的.

引理 1[7,12] (D-柯西原理)设$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$是D-度量空间X中具有D-有界数M的序列. 如果对任何$n,m\in\mathbf{N}$且$m>n$，成立$D(x_n,x_{n+1},x_m)\leqslant\alpha^n M$，其中$0\leqslant\alpha<1$，则$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$必是$D$-柯西序列.

引理 2[9-10] 如果$f,g:X\to X$是弱相容的且有唯一的重合的点$w=fx=gx$，则w是f和g的唯一公共不动点.

2 主要结果及其证明

定理 1 设X是完备的具有D-有界数M的D-度量空间，$S,T,I,J:X\to X$是4个映射，使得$SX\subset JX$，$TX\subset IX$且I或J是满映射. 假设对任何$x,y,z\in X$，有

$$D(Sx,Ty,z)\leqslant qD(Ix,Jy,z),\tag{1}$$

其中$0\leqslant q<1$，则$\{T,J\}$及$\{S,I\}$有相同的唯一重合的点. 进一步，如果$\{T,J\}$及$\{S,I\}$分别是弱相容的，则$\{S,T,I,J\}$有唯一公共不动点.

证明 任选$x_0\in X$. 根据$SX\subset JX$及$TX\subset IX$可构造两个序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$满足

$$y_{2n}=Sx_{2n}=Jx_{2n+1},\ y_{2n+1}=Tx_{2n+1}=Ix_{2n+2},\ n=0,1,2,\cdots.\tag{2}$$

对任何固定的n及$z\in X$，$D(y_{2n},y_{2n+1},z)=D(Sx_{2n},Tx_{2n+1},z)\leqslant qD(Ix_{2n},Jx_{2n+1},z)=qD(y_{2n-1},y_{2n},z)=qD(Sx_{2n},Tx_{2n-1},z)\leqslant q^2D(Ix_{2n},Jx_{2n-1},z)=q^2D(y_{2n-2},y_{2n-1},z)\leqslant\cdots\leqslant q^{2n}D(x_0,x_1,z)\leqslant q^{2n}M$，由此得到

$$D(y_{2n+1},y_{2n+2},z)=D(Sx_{2n+2},Tx_{2n+1},z)\leqslant qD(Ix_{2n+2},Jx_{2n+1},z)=qD(y_{2n+1},y_{2n},z)\leqslant q^{2n+1}M.$$

综合上述两个结论可得到对任何$n,p\in\mathbf{N}$，

$$d(y_n,y_{n+1},y_{n+p})\leqslant q^nM.\tag{3}$$

故根据引理1知$\{y_n\}$是柯西序列，再由X的完备性知存在$u\in X$使得$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=u$.

假设J是满射，则存在$v\in X$使得$u=Jv$. 对任何n，

$$D(u,Tv,u)\leqslant D(y_{2n},Tv,u)+D(u,y_{2n},u)+D(u,Tv,y_{2n})=2D(Sx_{2n},Tv,u)+D(u,y_{2n},u)\leqslant 2qD(Ix_{2n},Jv,u)+D(u,y_{2n},u)=2qD(y_{2n-1},u,u)+D(u,y_{2n},u).$$

令$n\to\infty$，则上式右边的极限为0，于是$D(u,Tv,u)=0$，因此$Tv=u=Jv$，即v是$\{T,J\}$的重合点，u是$\{T,J\}$的重合的点.

因为$u=Tv\in TX\subset IX$，因此存在$w\in X$使得$u=Iw$. 对任何n，

$$D(Sw,u,u)\leqslant D(y_{2n+1},u,u)+D(Sw,y_{2n+1},u)+D(Sw,u,y_{2n+1})=D(y_{2n+1},u,u)+2D(Sw,Tx_{2n+1},u)\leqslant D(y_{2n+1},u,u)+2qD(Iw,Jx_{2n+1},u)=D(y_{2n+1},u,u)+2qD(u,y_{2n},u).$$

令$n\to\infty$，则上式右边的极限为0，于是$D(Sw,u,u)=0$，因此$Sw=u=Iw$，即w是$\{S,I\}$的重合点，

u 是$\{S,I\}$ 的重合的点.

假设 $z=Sx=Ix$ 也是$\{S,I\}$ 的重合的点，则根据 $D(z,u,u)=D(Sx,Tv,u)\leqslant qD(Ix,Jv,u)=qD(z,u,u)$ 及 $q<1$ 得到 $D(z,u,u)=0$，于是 $z=u$. 这说明 u 是$\{S,I\}$ 的唯一的重合的点. 类似地，可证明 u 也是$\{T,J\}$ 的唯一的重合的点.

如果$\{T,J\}$ 及$\{S,I\}$ 分别是弱相容的，则根据引理2可知 u 是$\{T,J\}$ 及$\{S,I\}$ 的唯一公共不动点，于是 u 是$\{S,T,I,J\}$ 的一个公共不动点. 显然，u 是$\{S,T,I,J\}$ 的唯一公共不动点.

如果 I 是满映射，可类似地证得相同的结果，故本证明在此省略.

推论 1 设 X 是完备的具有 D-有界数 M 的 D-度量空间，$S,T:X\to X$ 是 2 个映射. 假设对任何 $x,y,z\in X$，

$$D(Sx,Ty,z)\leqslant qD(x,y,z), \tag{4}$$

其中 $0\leqslant q<1$，则$\{S,T\}$ 有唯一公共不动点.

证明 只需在定理 1 中取 $I=J=1_X$ 即可到推论 1.

推论 2 设 X 是完备的具有 D-有界数 M 的 D-度量空间，$I,J:X\to X$ 是两个满映射. 假设对任何 $x,y,z\in X$，

$$D(x,y,z)\leqslant qD(Ix,Jy,z), \tag{5}$$

其中 $0\leqslant q<1$，则$\{I,J\}$ 有唯一公共不动点.

证明 只需在定理 1 中取 $S=T=1_X$ 即可到推论 2.

注记 1 如果在推论 1 中 $S=T$ 及在推论 2 中 $I=J$，则推论 1 和推论 2 分别是 Banach 收缩原理和第一膨胀映射的不动点存在定理[13] 在 D-度量空间上的一种新的表现形式.

设$\{f_i\}_1^\infty$，$\{g_i\}_1^\infty$，$\{s_i\}_1^\infty$，$\{t_i\}_1^\infty:X\to X$ 为映射族. 令 $\mathscr{F}=\{f_i,g_i,s_i,t_i\}_1^\infty$ 且 $\mathscr{F}_i=\{f_i,g_i,s_i,t_i\}$，$\forall i\in\mathbf{N}$. 如果对任何 $i,j\in\mathbf{N}$ 且 $i\neq j$，只要 $A\in\mathscr{F}_i$，$B\in\mathscr{F}_j$ 时成立 $AB=BA$，则称 $\mathscr{F}$ 是弱可交换的.

定理 2 设 X 是完备的具有 D-有界数 M 的 D-度量空间，对每个 $i\in\mathbf{N}$，$S_i,T_i,I_i,J_i:X\to X$ 是 4 个映射，m_i,n_i,h_i,k_i 是 4 个正整数且 $0\leqslant q_i<1$，使得 $S_i^{m_i}X\subset J_i^{k_i}X$ 及 $T_i^{n_i}X\subset I_i^{h_i}X$ 且 I_i 或 J_i 是满映射. 假设对任何 $i\in\mathbf{N}$ 及 $x,y,z\in X$，有

$$D(S_i^{m_i}x,T_i^{n_i}y,z)\leqslant q_iD(I_i^{h_i}x,J_i^{k_i}y,z), \tag{6}$$

且$\{T_i^{n_i},J_i^{k_i}\}$ 及$\{S_i^{m_i},I_i^{h_i}\}$ 分别是弱相容的，$\mathscr{F}=\{S_i,T_i,I_i,J_i\}_1^\infty$ 是弱可交换的，则 $\mathscr{F}=\{S_i,T_i,I_i,J_i\}_1^\infty$ 有唯一公共不动点.

证明 令 $s_i=S_i^{m_i}$，$t_i=T_i^{n_i}$，$f_i=I_i^{h_i}$，$g_i=J_i^{k_i}$（$\forall i\in\mathbf{N}$），则 s_i,t_i,f_i,g_i 满足定理 1 的所有条件，于是知$\{s_i,t_i,f_i,g_i\}$ 有唯一公共不动点 u_i（$\forall i\in\mathbf{N}$）. 取 $x=y=u_i$，$z=S_iu_i$，且代入到(6) 式中整理得

$$D(u_i,u_i,S_iu_i)\leqslant q_iD(u_i,u_i,S_iu_i),$$

于是得到 $S_iu_i=u_i$. 类似地，可得到 $T_iu_i=I_iu_i=J_iu_i=u_i$，因此 u_i 是$\{S_i,T_i,I_i,J_i\}$ 的一个公共不动点. 若 v_i 是$\{S_i,T_i,I_i,J_i\}$ 的公共不动点，则 u_i 和 v_i 都是$\{s_i,t_i,f_i,g_i\}$ 的公共不动点，于是 $u_i=v_i$. 因此对每个 $i\in\mathbf{N}$，$\{S_i,T_i,I_i,J_i\}$ 有唯一公共不动点 u_i.

设 $i,j\in\mathbf{N}$ 且 $i\neq j$. 因为 $S_iu_i=T_iu_i=I_iu_i=J_iu_i=u_i$，$S_ju_j=T_ju_j=I_ju_j=J_ju_j=u_j$，再结合 $\mathscr{F}$ 的弱可交换性可得

$$S_ju_i=S_jS_iu_i=S_iS_ju_i,\ S_ju_i=S_jT_iu_i=T_iS_ju_i,\ S_ju_i=S_jI_iu_i=I_iS_ju_i,\ S_ju_i=S_jJ_iu_i=J_iS_ju_i.$$

这说明 S_ju_i 是$\{S_i,T_i,I_i,J_i\}$ 的一个公共不动点，于是由$\{S_i,T_i,I_i,J_i\}$ 的公共不动点唯一性得到 $S_ju_i=u_i$. 类似地，可得到 $T_ju_i=u_i$，$I_ju_i=u_i$，$J_ju_i=u_i$. 于是 u_i 是$\{S_j,T_j,I_j,J_j\}$ 的一个公共不动点，由$\{S_j,T_j,I_j,J_j\}$ 的公共不动点的唯一性得 $u_j=u_i$. 令 $u^*=u_i$，则 u^* 是 $\mathscr{F}$ 的一个公共不动点. 显然，u^* 是 $\mathscr{F}$ 的唯一公共不动点.

注记 2 假设 $m_i=n_i=h_i=k_i=1$, $\forall i=1,2,\cdots$. 此时,当定理2中的 $\mathscr{F}=\{S_i,T_i,I_i,J_i\}_1^\infty$ 的元素排成 $4\times\infty$ 型无穷矩阵形状,即把 $\{S_i\}_1^\infty$, $\{T_i\}_1^\infty$, $\{I_i\}_1^\infty$, $\{J_i\}_1^\infty$ 分别放在第1、2、3、4行时,定理2只要求位于同一列的4个映射满足收缩条件(6),并不要求所有4个映射之间都满足条件(6),但要求位于不同列的任何2个映射都是可交换的.

参考文献:

[1] Dhage B. Generalized metric spaces and mappings with fixed points[J]. Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 1992,84(4):329-336.

[2] Singh B, Jain S, Jain S. Semicompatibility and fixed point theorems in an unbounded D-metric space[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Science, 2005,2005(5):789-801.

[3] Dhage B, Arya S, Ume J. A general lemma for fixed point theorems involving more than two maps in D-metric spaces with applications[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Science, 2003,2003(11):661-672.

[4] Dhage B, Asha A, Kang S. On common fixed points of pairs of a single and a multivalued coincidentally commuting mappings in D-metric spaces[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Science, 2003,2003(40):2519-2539.

[5] Singh B, Jain S. Common fixed points of weak-compatible maps on D-metric space[J]. Journal of ChungCheong Mathematical Society, 2004,17(2):111-124.

[6] Singh B, Sharma R. Common fixed points via compatible maps in D-metric spaces[J]. Rad Mat, 2002,11(2):145-153.

[7] Gajić L. On a common fixed point for sequence of selfmappings in generalized metric space[J]. Novi Sad J Math, 2006,36(2):153-156.

[8] 沈京虎,朴勇杰. D-度量空间上一族拟收缩自映射的唯一公共不动点[J]. 延边大学学报:自然科学版,2014,40(1):8-10.

[9] Abbas M, Jungck G. Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006,341(1):416-420.

[10] Han Y, Xu S Y. New common fixed point results for four maps on cone metric spaces[J]. Applied Mathematics, 2011,2:1114-1118.

[11] Bari C D, Vetro P. ϕ-pairs and common fixed points in cone metric spaces[J]. Rendiconti del circolo Matematico Palermo, 2008,57:279-285.

[12] Dhage B. Some results on common fixed points-I[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 1999,30(8):827-837.

[13] 王尚志,李伯渝,高智民. 膨胀映射及其不动点定理[J]. 数学进展,1982,11(2):149-153.