

文章编号: 1004-4353(2014)04-0311-03

# $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$ 中的最大纠缠基与无偏基

雷丽霞<sup>1</sup>, 王天娇<sup>2</sup>, 南华<sup>2\*</sup>

(1. 延吉市第七中学 教导处, 吉林 延吉 133000; 2. 延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

**摘要:** 利用  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  空间的特点, 避开了不可扩展的最大纠缠基, 给出了一组完全由最大纠缠态组成的  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  空间的完备基, 并通过构造  $\mathbf{C}^6$  的一个标准正交基得到了  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  空间上的另一组完备的最大纠缠基, 最后证明了这两组基是互不偏的.

**关键词:** 最大纠缠基; 无偏基; Pauli 矩阵

**中图分类号:** O413.1

**文献标识码:** A

## Maximally entangled bases and mutually unbiased bases in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$

LEI Lixia<sup>1</sup>, WANG Tianjiao<sup>2</sup>, NAN Hua<sup>2\*</sup>

(1. Teaching and Guiding Office, No. 7 Middle School, Yanji 133000, China;

2. Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

**Abstract:** Using the characteristics of  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$ , we provide a complete basis composed by maximally entangled bases in  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  escaped from unextendible maximally entangled basis. Moreover, by constructing an orthonormal basis in  $\mathbf{C}^6$ , another complete maximally entangled is constructed which is mutually unbiased with the first one.

**Key words:** maximally entangled bases; mutually unbiased bases; Pauli matrices

## 0 引言

Hilbert 空间  $\mathbf{C}^d$  中的两组归一化的基态  $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^{d-1}$  和  $\{|b_i\rangle\}_{i=1}^{d-1}$  称为互不偏的(简记为 MU) 当且仅当  $|\langle a_i | b_j \rangle|^2 = \frac{1}{d}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, d$ ). 两两互不偏的一族归一化正交基  $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  称作无偏基(简记为 MUBs). 无偏基是量子信息研究中一个很重要的概念, 它在量子信息数据处理、量子态断层摄像术、加密协议、多路干涉仪中波粒二象性的量化等方面都有重要应用<sup>[1-2]</sup>. 文献[3-4]构造了单体 2 到 6 维空间上的所有无偏基, 并指出当空间维数  $d$  是素数幂时, MUBs 个数的最大值  $N(d) = d + 1$ ; 当空间维数  $d$  为 6 时, 文献[5]给出了 3 组无偏基; 当  $d$  是非素数幂的合数时, 尚不能确定  $N(d)$  的值.

纠缠态作为一种物理资源, 在量子隐形传态、量子密钥分配、量子计算等方面都起着重要作用, 其中最大纠缠态尤为重要<sup>[6]</sup>. 在两体系统  $A \otimes B$  ( $A$  是  $d$  维,  $B$  是  $d'$  维) 中, 态矢  $|\phi\rangle$  是  $d \otimes d'$  最大纠缠态当且仅当对于任一给定的系统  $A$  的归一化正交完备基  $\{|i_A\rangle\}$  总存在子系统  $B$  的归一化正交基  $\{|i_B\rangle\}$ ,

使得  $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle^{[7]}$ .

本文利用  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  空间的特点,通过对比不可扩展的最大纠缠基的概念,给出了最大纠缠基的概念,即给出了一组完全由最大纠缠态组成的  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  空间的完备基,并通过构造  $\mathbf{C}^6$  的一个酉矩阵,以其为过渡矩阵,得到了  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  空间上的另一组完备的最大纠缠基,最后证明了这两组基是互不偏的.

1  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  中的不可扩展最大纠缠基与最大纠缠基

在量子系统的研究中,由纠缠基的概念引发了许多具有不同纠缠程度的其他的基底的研究,例如:直积基、不可扩展的直积基、不可扩展的最大纠缠基.

**定义 1<sup>[8]</sup>** 一个态矢的集合  $\{|\varphi_i\rangle \in \mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'} : i=1,2,\cdots,n, n < dd'\}$  称为不可扩展的最大纠缠基(简记为 UMEB) 当且仅当: (i)  $|\varphi_i\rangle, i=1,2,\cdots,n$  是最大纠缠态; (ii)  $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j=1,\cdots,n$ ; (iii) 若对任意的  $i=1,2,\cdots,n$ , 有  $\langle \varphi_i | \psi \rangle = 0$ , 则  $|\psi\rangle$  不是最大纠缠态.

**定义 2** 一个态矢的集合  $\{|\varphi_i\rangle \in \mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^{d'} : i=1,2,\cdots,dd'\}$  称为最大纠缠基(简记为 MEB) 当且仅当: (i)  $|\varphi_i\rangle, i=1,2,\cdots,dd'$  是最大纠缠态; (ii)  $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j=1,\cdots,dd'$ .

文献[8-9] 研究了不可扩展的最大纠缠基,并构造了由完备化的 UMEB 构成的无偏基. 本文将在  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  空间中构造由最大纠缠态组成的最大纠缠基.

设  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  和  $\{|0'\rangle, |1'\rangle, |2'\rangle, |3'\rangle, |4'\rangle, |5'\rangle\}$  分别是  $\mathbf{C}^2$  和  $\mathbf{C}^6$  中的一组标准正交基,考虑  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  中的态矢:

$$|\varphi'_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_i \otimes I_6)(|0\rangle|(0+2j)'\rangle + |1\rangle|(1+2j)'\rangle), i=0,1,2,3, j=0,1,2, \tag{1}$$

其中  $\sigma_i (i=1,2,3)$  是 Pauli 矩阵,  $\sigma_0 = I_2$  是  $2 \times 2$  的单位矩阵. 可以验证(1) 式中的 12 个态矢都是最大纠缠的,同时两两正交,因此(1) 式构成了  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  中的一组完备的最大纠缠基.

2 用  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  的 MEB 构造 MUB

利用上述在  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  空间中构造 MEB 的方法,构造两组两两无偏的 MEB. 设矩阵

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & i & i & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 1 \\ \frac{-\sqrt{3}+i}{2} & i & 1 & 1 & i & \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \\ i & -i & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & -i & i \\ 1 & -1 & \frac{\sqrt{3}-i}{2} & \frac{-\sqrt{3}+i}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -\frac{1+\sqrt{3}i}{2} & -i & i & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}-i}{2} & -i & -1 & 1 & i & \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \end{pmatrix}.$$

由  $A^\dagger A = I$  可知,  $A$  是酉矩阵. 以矩阵  $A$  为过渡矩阵,可以得到  $\mathbf{C}^6$  的另一组标准正交基  $\{|\varepsilon'_i\rangle\}_{i=0}^5$ :  $\{|\varepsilon'_0\rangle, |\varepsilon'_1\rangle, |\varepsilon'_2\rangle, |\varepsilon'_3\rangle, |\varepsilon'_4\rangle, |\varepsilon'_5\rangle\} = A\{|0'\rangle, |1'\rangle, |2'\rangle, |3'\rangle, |4'\rangle, |5'\rangle\}$ .

类似于(1) 式中的结果,可以构造  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  的另一组完备的 MEB:

$$|\psi'_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_i \otimes I_6)(|0\rangle|\varepsilon'_{2j}\rangle + |1\rangle|\varepsilon'_{1+2j}\rangle), i=0,1,2,3, j=0,1,2, \tag{2}$$

其中  $\sigma_i (i=1,2,3)$  是 Pauli 矩阵,  $\sigma_0 = I_2$  是  $2 \times 2$  的单位矩阵.

**定理 1** 在两体量子系统  $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^6$  中, 两组最大纠缠基(1) 与(2) 是两两互不偏的.

**证明** 从两组 MEB 中分别任取一个态作内积, 如:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1^0 | \psi_0^0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 10' | + \langle 01' | ) \frac{1}{\sqrt{2}} (| 0\epsilon'_0 \rangle + | 1\epsilon'_1 \rangle) = \\ &= \frac{1}{2} (\langle 0' | \epsilon'_1 \rangle + \langle 1' | \epsilon'_0 \rangle) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} i \right), \\ \langle \varphi_0^0 | \psi_1^1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 00' | + \langle 11' | ) \frac{1}{\sqrt{2}} (| 1\epsilon'_2 \rangle + | 0\epsilon'_3 \rangle) = \frac{1}{2} (\langle 0' | \epsilon'_3 \rangle + \langle 1' | \epsilon'_2 \rangle) = \frac{1}{2\sqrt{6}} (1-i), \\ \langle \varphi_3^0 | \psi_0^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 00' | - \langle 11' | ) \frac{1}{\sqrt{2}} (| 0\epsilon'_4 \rangle + | 1\epsilon'_5 \rangle) = \frac{1}{2} (\langle 0' | \epsilon'_4 \rangle - \langle 1' | \epsilon'_5 \rangle) = \frac{1}{2\sqrt{6}} (-1+i), \\ \langle \varphi_2^0 | \psi_3^0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} i (\langle 10' | - \langle 01' | ) \frac{1}{\sqrt{2}} (| 0\epsilon'_0 \rangle - | 1\epsilon'_1 \rangle) = \\ &= \frac{1}{2} i (-\langle 1' | \epsilon'_0 \rangle - \langle 0' | \epsilon'_1 \rangle) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} i \right). \end{aligned}$$

分别取模得  $|\langle \varphi_1^0 | \psi_0^0 \rangle| = |\langle \varphi_0^0 | \psi_1^1 \rangle| = |\langle \varphi_3^0 | \psi_0^2 \rangle| = |\langle \varphi_2^0 | \psi_3^0 \rangle| = \frac{1}{\sqrt{12}}.$

通过进一步计算可得

$$|\langle \varphi_i^j | \psi_{i'}^{j'} \rangle| = \frac{1}{\sqrt{12}}, \quad i, i' = 0, 1, 2, 3, \quad j, j' = 0, 1, 2,$$

故两组完备的 MEBs(1) 和(2) 是 MUBs.

## 参考文献:

- [1] Raynal P, Lu X, Englert B-G. Mutually unbiased bases in six dimensions: the four most distant bases[J]. Phys Rev A, 2011,83:062303.
- [2] Durt T, Englert B-G, Bengtsson I, et al. On mutually unbiased bases[J]. Int J Quant Inform, 2010,8:535.
- [3] Brierley S, Weigert S, Bengtsson I. All mutually unbiased bases in dimension two to five[J]. Quant Inform Comput, 2010,10:803-820.
- [4] McNulty D, Weigert S. The limited role of mutually unbiased product bases in dimension 6[J]. J Phys A: Math Theor, 2012,45(10):102001.
- [5] Wiesniak M, Paterek T, Zeilinger A. Entanglement in mutually unbiased bases[J]. 2011, arXiv: 1102.2080v3 [quant-ph].
- [6] Bennett C H, Wiesner S J. Communication via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states[J]. Phys Rev Lett, 1992,69:2881-2884.
- [7] Li Z G, Zhao M J, Fei S M, et al. Mixed maximally entangled states[J]. Quant Inform Comput, 2012,12(1/2): 63-73.
- [8] Nan H, Tao Y H, Zhang J. Unextendible maximally entangled bases and mutually unbiased bases in  $\mathbf{C}^d \otimes \mathbf{C}^d$  [J]. Int J Theor Phys, 2014; DOI10.1007/s10773-014-2288-1.
- [9] 苑普光,张秀丽,杨潇,等.  $\mathbf{C}^3 \otimes \mathbf{C}^8$  中不可拓展的最大纠缠基和互不偏基[J]. 延边大学学报:自然科学版,2014,40(3):215-219.