

文章编号: 1004-4353(2014)04-0308-03

广义 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的上限估值

洪英辉

(韩山师范学院 数学与统计学系, 广东 潮州 521041)

摘要: 通过构造一个一元序列和一个二元序列, 得到了一个便于计算的广义 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的上限估值公式, 该公式将文献[2]中关于经典的 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的上限估值的一个结果推广到所有维数大于 1 的广义 Sierpinski 垫片的情形.

关键词: 广义 Sierpinski 垫片; Hausdorff 测度; 上限估值

中图分类号: O189.1

文献标识码: A

An estimation of the upper bound on the Hausdorff measure of the generalized Sierpinski gasket

HONG Yinghui

(*Department of Mathematics and Statistics, Hanshan Normal University, Chaozhou 521041, China*)

Abstract: We obtained a formula regarding the upper bounds of the Hausdorff measure of the generalized Sierpinski gasket by constructing a 1-tuple sequence and a 2-tuple sequence. By means of this formula we can calculate some comparable different upper bounds of the generalized-Sierpinski gasket easily. This formula extends the result on upper bounds of the Hausdorff measure of the classical Sierpinski gasket in reference [2] to the case of the generalized Sierpinski gasket with the dimension larger than 1.

Key words: generalized Sierpinski gasket; Hausdorff measure; estimation of the upper bound

1 引言与预备知识

分形集的 Hausdorff 测度的计算是一个十分重要且非常困难的问题, 目前为止, 很多维数大于 1 的分形的 Hausdorff 测度仍未能计算出来. 虽然有许多学者对于经典的 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度进行了研究, 但只得到了比较逼近的上界估计值, 其精确值仍未得到. 文献[1]通过构造 Sierpinski 垫片的覆盖序列, 得到了它的一个测度的上界估计 $H^s(S) \leq 0.8900$; 文献[2]构造了一个一元序列, 得到了一个便于计算的经典的 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的上限估值公式; 文献[3]则是将文献[1]中的方法运用到 $\frac{\sqrt{2}}{3} \leq c \leq \frac{1}{2}$ 的广义 Sierpinski 垫片, 得到了 Hausdorff 测度的一个上界 $H^s(S) \leq \frac{25}{22} \left(\frac{1+c}{1+c+c^2} \right)^s$; 文献[4]和文献[5]分别用不同的方法计算出 $c \leq \frac{1}{3}$ 时的广义 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的准确值为 1. 本文借助文献[2]中的方法, 得到了一个关于广义 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的上限估值公式, 该公式将文献[2]中关于经典的 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的上

限估值的一个结果推广到所有维数大于1的广义 Sierpinski 垫片的情形.

在欧氏平面上取一单位正三角形, 记为 S_0 , 在 S_0 的3个角上分别做3个边长为 c ($0 < c \leq \frac{1}{2}$) 的正三角形, 连同边界保留这3个正三角形, 其余部分去掉, 这3个正三角形的集合记为 S_1 . 对 S_1 的每个正三角形重复上述过程即在每个角做正三角形(含边界), 它们组成的集合记为 S_2 . 上述过程无限进行下去将得到 $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k \supset \cdots$, 其中 S_k 由边长为 c^k 的 3^k 个三角形组成(见图1), 非空集 $S = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k$

称为由 S_0 生成的广义 Sierpinski 垫片. 将上述过程用于 S_k 中的任何一个等边三角形上, 生成一个与 S 几何相似的集合(相似比为 c^k), 称之为 c^k -Sierpinski 垫片, 并记为 c^k - S , 由定义易得 S 的 Hausdorff 维数 $s = \dim_H S = \log_{\frac{1}{c}} 3$. 如果 $c = \frac{1}{2}$, 则 S 就是普通的 Sierpinski 垫片.

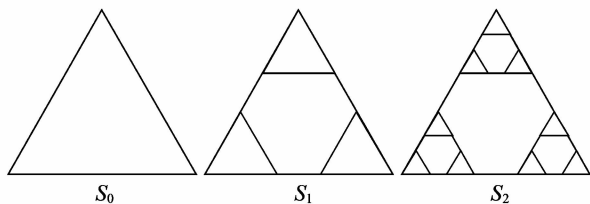


图1 广义 Sierpinski 垫片的构造

引理1^[5] 设 F 是满足开集条件的自相似集, 其相似比为 c ($=c_1 = \cdots = c_m$). 对任意正整数 k , 若集合 U 包含了 F 的 N ($1 \leq N \leq m^k$) 个 c^k - F , 则 $H^s(F) \leq \frac{m^k}{N} |U|^s$.

利用引理1中的估值不等式, 我们可以给出 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的较好的上方估值. 文献[6]利用此定理得到了自相似比为 $c = \frac{1}{2}$ 的普通 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的上限估值公式.

本文将基于上述引理讨论自相似比 $c \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ 的情况.

2 主要结果及证明

在平面 R^2 选取适当的集合 U , 便可以得到 $H^s(S)$ 的一个上限估值. 当 U 分别选取许多不同的实闭六边形时, 可得到 $H^s(S)$ 的一系列上限估值.

定理1 设 $s = \log_{\frac{1}{c}} 3$ ($\frac{1}{3} < c \leq \frac{1}{2}$), 构造数列 $\{x_n\} = 1, 3, 5, 9, 11, 15, 19, 27, \dots$, 即数列 $\{x_n\}$ 满足 $\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_{2^m} = 3^m, \forall m \geq 1; \\ x_{2^m+i} = 3^m + 2x_i, \forall 1 \leq i \leq 2^m; \end{cases}$ 数列 $\{y_n^{(k)}\}$ 满足 $\begin{cases} y_1^{(k)} = c^{k-1}(1-c), \\ y_{2^m}^{(k)} = c^{k-m-1}(1-c), \forall m \geq 1, \\ y_{2^m+i}^{(k)} = c^{k-m-1}(1-c) + y_i^{(k)}, \forall 1 \leq i \leq 2^m. \end{cases}$ 其中 $c \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ 为上述给定的自相似比, 则维数为 $s = \log_{\frac{1}{c}} 3$ 的广义 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的估值为 $H^s(S) \leq \frac{3^k(1-y_j^{(k)})^s}{3^k - 3x_j}$, 其中 k, j 为正整数, 且 $k \geq 2, 1 \leq j \leq 2^{k-1} - 1$.

证明 对任意给定 $k \geq 2$, 做实闭六边形 $U_j^k = A_j^k B_j^k C_j^k D_j^k E_j^k F_j^k A_j^k$ ($1 \leq j \leq 2^{k-1} - 1$), 其中 $|AA_j^k| = |BB_j^k| = |BC_j^k| = |CD_j^k| = |CE_j^k| = |AF_j^k|$, 使 U_j^k 包含 $N = 3^k - 3x_j$ 个不同的 c^k - S 之并, 并使得 U_j^k 的直径 $|U_j^k| = |A_j^k D_j^k| = |A_j^k B| = 1 - |AA_j^k|$ 最小. 图2是 $k=3$ 时的情形, 做 $U_2^3 = A_2^3 B_2^3 C_2^3 D_2^3 E_2^3 F_2^3 A_2^3$, 则 U_2^3 包含 $N = 3^3 - 3x_2$ 个不同的 c^k - S 之并, 直径 $|U_2^3| = 1 - |AA_2^3| = 1 - c(1-c)$. 按照这种作法, 对任意正整数 k ($k \geq 2$), 都能做出 $2^{k-1} - 1$ 个不同的实闭六边形 $U_j^k = A_j^k B_j^k C_j^k D_j^k E_j^k F_j^k A_j^k$, 使得 U_j^k 包含 $N = 3^k - 3x_j$ 个不同的 c^k - S , 且 U_j^k 的直径 $|U_j^k| = |A_j^k D_j^k| = |A_j^k B| = 1 - |AA_j^k|$, 而 S_k 中 3^k 个等边三角形的边长均为 c^k . 通过计算不难得

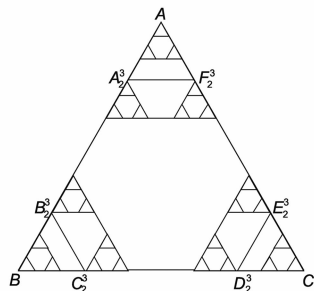


图2 细化等边三角形

出,对上述任意正整数 k , $|AA_j^k|$ 满足:

$$\begin{cases} |AA_1^k| = c^{k-1}(1-c); \\ |AA_{2^m}^k| = c^{k-m-1}(1-c), \forall m \geq 1; \\ |AA_{2^m+i}^k| = c^{k-m-1}(1-c) + |AA_i^k|, \forall 1 \leq i \leq 2^m. \end{cases}$$

记 $|AA_j^k| = y_j^{(k)}$, 则 $|U_j^k| = 1 - y_j^{(k)}$, 由引理 1 可得

$$H^s(S) \leq \frac{3^k}{N} |U_j^k|^s \leq \frac{3^k(1-y_j^{(k)})^s}{3^k-3x_j},$$

其中 $k \geq 2, 1 \leq j \leq 2^{k-1}-1$, 数列 $\{x_j\}, \{y_j^{(k)}\}$ 满足定理 1.

推论 1^[6] 设 $s = \log_2 3$, 数列 $\{x_n\}$ 满足定理 1, 则维数为 $s = \log_2 3$ 的 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的估值为 $H^s(S) \leq \frac{(2^k-2p+1)^s}{3^k-3x_{2^{p-1}}}$, 其中 k, p 为正整数, 且 $k \geq 2, 1 \leq p \leq 2^{k-2}$.

证明 在定理 1 中, 令 $c = \frac{1}{2}$, 则 $s = \log_2 3$, 而 $y_1^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, y_{2^m}^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-m-1}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-m}, y_{2^m+i}^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-m-1}\left(1-\frac{1}{2}\right) + y_i^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-m} + y_i^{(k)} (m \geq 1, m \in \mathbf{Z}^+)$. 可以看出对任意正整数 j , 都有 $y_j^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^k j$, 所以对任意给定的正整数 $k (k \geq 2)$, 都有

$$H^s(S) \leq \frac{3^k(1-y_j^{(k)})^s}{3^k-3x_j} = \frac{3^k\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^k j\right]^s}{3^k-3x_j} = \frac{3^k\left(\frac{2^k-j}{2^k}\right)^s}{3^k-3x_j} = \frac{(2^k-j)^s}{3^k-3x_j},$$

其中 j 为满足 $1 \leq j \leq 2^{k-1}-1$ 的正整数. 令 $j = 2p-1$, 得 $H^s(S) \leq \frac{(2^k-2p+1)^s}{3^k-3x_{2^{p-1}}}$, 由 $1 \leq j \leq 2^{k-1}-1$, 得 $1 \leq p \leq 2^{k-2}$.

推论 2 当 $s = \log_{\frac{3}{\sqrt[3]{2}}} 3$ 时, $H^s(S) \leq 0.9798 \dots$.

证明 当 $c = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$ 时, $s = \log_{\frac{3}{\sqrt[3]{2}}} 3$, 而 $\frac{\sqrt[3]{2}}{3} \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. 在定理 1 中, 令 $k = 10, j = 146$, 得 $x_{146} = x_{2^7+18} = 3^7 + 2x_{18} = 3^7 + 2x_{2^4+2} = 3^7 + 2(3^4 + 2x_2) = 3^7 + 2 \times 3^4 + 4 \times 3 = 2361, y_{146}^{(10)} = y_{2^7+18}^{(10)} = c^{10-7-1}(1-c) + y_{18}^{(10)} = c^2(1-c) + y_{2^4+2}^{(10)} = c^2(1-c) + c^{10-4-1}(1-c) + y_2^{(10)} = c^2(1-c) + c^5(1-c) + c^{10-1-1}(1-c) = (c^2 + c^5 + c^8)(1-c) = \left[\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)^8\right] \times \left(1 - \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right) = 0.1104 \dots$. 所以

$$H^s(S) \leq \frac{3^{10}(1-y_{146}^{(10)})^{\log_{\frac{3}{\sqrt[3]{2}}} 3}}{3^{10}-3x_{146}} = 0.9798 \dots.$$

注 1 由文献[3]知, 当 $\frac{\sqrt[3]{2}}{3} \leq c \leq \frac{1}{2}$ 时, $H^s(S) \leq \frac{25}{22} \left(\frac{1+c}{1+c+c^2}\right)^s$. 应用此结论, 可以算出当 $c = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$ 时, $H^s(S) \leq 0.9798 \dots$, 与上述结论相符. 本文讨论的是 $\frac{1}{3} < c \leq \frac{1}{2}$, 即所有维数 $s = \log_{\frac{1}{c}} 3 > 1$ 的广义 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的计算问题, 范围比文献[3]广, 因此本文方法为研究广义 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度提供了新的方法.

参考文献:

[1] 周作领. Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度[J]. 中国科学: A 辑, 1997, 27(6): 1491-1496.
[2] 许绍元, 朱传喜. 关于 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的一个注记[J]. 南昌大学学报: 工科版, 2004, 26(2): 23-26.
[3] 王经民. 泛 Sierpinski-垫片的 Hausdorff 测度[J]. 宝鸡文理学院学报: 自然科学版, 2002, 3(2): 107-109.
[4] 王明华. 一类 Sierpinski 垫的 Hausdorff 测度[J]. 数学研究与评论, 2007, 27(4): 795-802.
[5] 晋娜. 广义 Sierpinski-垫的 Hausdorff 测度与维数的研究[D]. 太原理工大学, 2013.
[6] 许绍元. 关于自相似集的 Hausdorff 测度的一个判据及其应用[J]. 数学进展, 2002, 31(2): 157-162.