文章编号：1004-4353(2014)04-0305-03

Hilbert 空间中的 g-Riesz 基序列

黄喜娇，　杨永燕
(安阳师范学院人文管理学院 建筑工程学院，河南 安阳 455000)

摘要：在复 Hilbert 空间中，根据 g-框架的概念及其相关性质，引进了 g-Riesz 基序列的概念，并得到了若干 g-Riesz基序列的性质. 另外，利用 g-Riesz 基序列的性质证明了 g-Riesz 基的稳定性.

关键词：Riesz 基序列；g-Riesz 基序列；g-框架；g-Riesz 基
中图分类号：O177.1　　**文献标识码**：A

g-Riesz base sequences in Hilbert spaces

HUANG Xijiao，　YANG Yongyan
(*College of Architectural Engineering*, *Humanistic Management College of Anyang Normal University*, *Anyang* 455000, *China*)

Abstract: We introduced the definition of a g-Riesz base sequence in a complex Hilbert space and obtained some characterizations of the g-Riesz base sequence by using the concept of g-frame and its related properties. In addition, we proved the stability of the g-Riesz base sequence by using the properties of g-Riesz based sequences.

Key words: Riesz base sequences; g-Riesz base sequences; g-frame; g-Riesz base

自 1952 年 Hilbert 空间中的框架概念被提出后，框架理论至今已经取得了丰硕的成果[1-2]. 由于框架的定义和 Riesz 基序列的定义之间联系密切，一些学者对 Riesz 基序列的性质进行了研究. 2002 年，P. G. Casazza 和 O. Christensen 等[3]对 Hilbert 空间中的 Riesz 基序列的性质进行了研究. 之后，李登峰、董立华等[4-5]对 Hilbert 空间中的 Riesz 基序列做了进一步的研究. 2006 年，孙文昌[6]首次引入了 g-框架概念，随后 g-Riesz 基、g-Riesz 框架、g-框架序列、g-Riesz-Fischer 序列、g-Besselian 框架等陆续被学者研究，并且取得了一系列重要的成果[6-11]，但是对 Hilbert 空间中的 Riesz 基序列的研究较少. 本文引入 g-Riesz 基序列的概念，对 g-Riesz 基序列的性质进行了研究，并利用 g-Riesz 基序列的性质证明了 g-Riesz 基的稳定性.

1　预备知识

设 U 和 V 是两个复 Hilbert 空间，其内积和范数分别用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 表示，J 是整数集 $\mathbf{Z}$ 的子集，$\{V_j\}_{j\in J}$ 是 V 的闭子空间序列，记 $L(U,V_j)$ 为从 U 到 V_j 的所有有界线性算子的集合，对每个 $j\in J$，有算子 $\Lambda_j\in L(U,V_j)$.

定义 1　设 H 为 Hilbert 空间，序列 $\{f_j\}_{j\in J}\subset H$ 称为 H 的框架，如果存在正数 $A,B>0$，使 $A\|f\|^2\leqslant\sum\limits_{j\in J}|\langle f,f_j\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2$，$\forall f\in H$ 成立，称 A,B 为框架界；如果只有右边的不等式成立，则称

收稿日期：2014－10－10
作者简介：黄喜娇(1980—)，女，讲师，研究方向为小波分析及其应用.

$\{f_j\}_{j\in J}$ 为 H 的 Bessel 序列,B 为 Bessel 界.

定义 2[3] 设 $\{f_j\}_{j\in J}$ 为 H 的序列,如果存在常数 $A,B>0$,使得对任何有限数列 $\{c_j\}_{j\in J}$ $A\sum_{j\in J}|c_j|^2\leqslant\left\|\sum_{j\in J}c_jf_j\right\|^2\leqslant B\sum_{j\in J}|c_j|^2$ 成立,则称 $\{f_j\}_{j\in J}$ 为 H 的 Riesz 基序列;如果仅有左边的不等式成立,则称 $\{f_j\}_{j\in J}$ 为 H 的 Riesz-Fischer 序列.

定义 3[6] 设 $\Lambda_j\in L(U,V_j)$,$j\in J$,则称序列 $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-框架.如果存在正数 $A,B>0$,使得 $A\|f\|^2\leqslant\sum_{j\in J}\|\Lambda_jf\|^2\leqslant B\|f\|^2$,$\forall f\in U$,则满足不等式的 A,B 分别称为 g-框架的下界和上界.

定义 4[6] 设 $\Lambda_j\in L(U,V_j)$,$j\in J$,则称序列 $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-Riesz 基.如果序列 $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ 满足以下两个条件:

① $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ 是 g-完备的,即 $\{f\in U:\Lambda_jf=0,\ j\in J\}=\{0\}$;

② 存在正数 $A,B>0$,使得对任意有限子集 $J_1\subset J$ 和 $g_j\in V_j$,$j\in J$,有

$$A\sum_{j\in J_1}\|g_j\|^2\leqslant\left\|\sum_{j\in J_1}\Lambda_j^*g_j\right\|^2\leqslant B\sum_{j\in J_1}\|g_j\|^2,$$

则称 A,B 为 g-Riesz 基的上、下界.

定义 5 设 $\Lambda_j\in L(U,V_j)$,$j\in J$,如果存在正常数 $A,B>0$,使得对任意有限子集 $I\subset J$,$g_j\in V_j$,有 $A\sum_{j\in I}\|g_j\|^2\leqslant\left\|\sum_{j\in I}\Lambda_j^*g_j\right\|^2\leqslant B\sum_{j\in I}\|g_j\|^2$,则称 $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-Riesz 基序列.

注 1 当 $V_j=C$,$\Lambda_j\in L(U,V_j)$ 时,由 Riesz 表示定理得:存在 $f_j\in U$ 使得 $\Lambda_j(\cdot)=\langle\cdot,f_j\rangle$,$j\in J$,经过简单的计算可得 $\Lambda_j^*(c)=cf_j$,$\forall c\in C$,这与 Hilbert 空间中的 Riesz 基序列的定义一致.

2 主要结果及证明

定理 1 序列 $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-Riesz 基序列,界为 A,B 当且仅当可定义有界线性算子

$$Q:l^2(\{V_j\}_{j\in J})\to U,\ Q(\{g_j\}_{j\in J})=\sum_{j\in J}\Lambda_j^*g_j,$$

且满足对任意 $a=\{a_j\}_{j\in J}\in l^2(\{V_j\}_{j\in J})$,有 $A\|a\|^2\leqslant\|Qa\|^2\leqslant B\|a\|^2$.

证明 必要性.设 $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-Riesz 基序列,界为 A,B.由定义 5 知对任意有限子集 $I\subset J$,$g_j\in V_j$,有 $\left\|\sum_{j\in I}\Lambda_j^*g_j\right\|\leqslant\sqrt{B}\left(\sum_{j\in I}\|g_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.由于 $\sum_{j\in J}\|g_j\|^2<+\infty$,因此级数 $\sum_{j\in J}\Lambda_j^*g_j$ 在 U 中收敛,故对任意的 $a=\{a_j\}_{j\in J}\in l^2(\{V_j\}_{j\in J})$,有 $A\sum_{j\in J}\|a_j\|^2\leqslant\left\|\sum_{j\in J}\Lambda_j^*a_j\right\|\leqslant B\sum_{j\in J}\|a_j\|^2$,所以可定义从 $l^2(\{V_j\}_{j\in J})$ 到 U 的有界线性算子 $Q:l^2(\{V_j\}_{j\in J})\to U$,$Q(\{g_j\}_{j\in J})=\sum_{j\in J}\Lambda_j^*g_j$,且满足 $A\|a\|^2\leqslant\|Qa\|^2\leqslant B\|a\|^2$,$a\in l^2(\{V_j\}_{j\in J})$.充分性的证明由条件即得.

定理 2 设序列 $\{\Lambda_j:\Lambda_j\in L(U,V_j)\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-Riesz 基序列,界为 A,B.若 $\lambda,\beta\in(-1,1)$,$\mu\geqslant0$,且 $\max\{\lambda+\mu/\sqrt{A},\beta\}<1$,如果 $\{\Gamma_j:\Gamma_j\in L(U,V_j)\}_{j\in J}$ 满足:对任意的有限子集 $I\subset J$ 和 $g_j\in V_j$ 有

$$\left\|\sum_{j\in I}(\Lambda_j^*-\Gamma_j^*)g_j\right\|\leqslant\lambda\left\|\sum_{j\in I}\Lambda_j^*g_j\right\|+\beta\left\|\sum_{j\in I}\Gamma_j^*g_j\right\|+\mu\left(\sum_{j\in I}\|g_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}},\tag{1}$$

则 $\{\Gamma_j\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-Riesz 基序列,且界为 $\frac{((1-\lambda)\sqrt{A}-\mu)^2}{(1+\beta)^2}$,$\frac{((1+\lambda)\sqrt{B}+\mu)^2}{(1-\beta)^2}$.

证明 设序列 $\{\Lambda_j:\Lambda_j\in L(U,V_j)\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-Riesz 基序列,界为 A,B,则对任意有限子集 $I\subset J$,$g_j\in V_j$,有

$$\sqrt{A}\ \left(\sum_{j\in I}\|g_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\|\sum_{j\in I}\Lambda_j^* g_j\right\|\leqslant\sqrt{B}\ \left(\sum_{j\in I}\|g_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}},\tag{2}$$

由条件(1)得 $\left\|\sum_{j\in I}\Gamma_j^* g_j\right\|\leqslant\frac{1+\lambda}{1-\beta}\left\|\sum_{j\in I}\Lambda_j^* g_j\right\|+\frac{\mu}{1-\beta}\left(\sum_{j\in I}\|g_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{(1+\lambda)\sqrt{B}+\mu}{(1-\beta)}\left(\sum_{j\in I}\|g_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

由(1)和(2)式得

$$\left\|\sum_{j\in I}\Gamma_j^* g_j\right\|\geqslant\left\|\sum_{j\in I}\Lambda_j^* g_j\right\|-\left\|\sum_{j\in I}(\Lambda_j^*-\Gamma_j^*)g_j\right\|\geqslant(1-\lambda)\left\|\sum_{j\in I}\Lambda_j^* g_j\right\|-\beta\left\|\sum_{j\in I}\Gamma_j^* g_j\right\|-$$
$$\mu\left(\sum_{j\in I}\|g_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant[(1-\lambda)\sqrt{A}-\mu]\left(\sum_{j\in I}\|g_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}-\beta\left\|\sum_{j\in I}\Gamma_j^* g_j\right\|,$$

所以 $\left\|\sum_{j\in I}\Gamma_j^* g_j\right\|\geqslant\frac{(1-\lambda)\sqrt{A}-\mu}{(1+\beta)}\left(\sum_{j\in I}\|g_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 综上所述，可知 $\{\Gamma_j\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-Riesz 基序列，且界为 $\frac{((1-\lambda)\sqrt{A}-\mu)^2}{(1+\beta)^2},\frac{((1+\lambda)\sqrt{B}+\mu)^2}{(1-\beta)^2}$.

有关 g-框架的稳定性，孙文昌在文献[7]中已经做了讨论，本文将利用下面的引理 1 及引理 2，用不同的方法证明 g-Riesz 基的稳定性.

引理 1[7]　假设 $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-框架，框架界为 A,B. $\lambda,\beta\in(-1,1)$，$\mu\geqslant 0$，且 $\max\{\lambda+\mu/\sqrt{A},\beta\}<1$. 若 $\{\Gamma_j\in L(U,V_j)\}_{j\in J}$ 满足对任意有限子集 $I\subset J$ 和 $g_j\in V_j$，有

$$\left\|\sum_{j\in I}(\Lambda_j^*-\Gamma_j^*)g_j\right\|\leqslant\lambda\left\|\sum_{j\in I}\Lambda_j^* g_j\right\|+\beta\left\|\sum_{j\in I}\Gamma_j^* g_j\right\|+\mu\left(\sum_{j\in I}\|g_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则 $\{\Gamma_j\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-框架，且框架界为

$$\frac{((1-\lambda)\sqrt{A}-\mu)^2}{(1+\beta)^2},\frac{((1+\lambda)\sqrt{B}+\mu)^2}{(1-\beta)^2}.\tag{3}$$

引理 2[8]　令 $\Lambda_j\in L(U,V_j)$，$j\in J$，则下列两个条件等价：

① 序列 $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ 是 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-Riesz 基，界为 A,B；

② 序列 $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-框架，界为 A,B，且 $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ 是 $l^2(\{V_j\}_{j\in J})$ 线性无关的，即若 $\left\|\sum_{j\in J}\Lambda_j^* g_j\right\|^2=0$，则 $g_j=0$，$\forall j\in J$，其中 $\{g_j\}_{j\in J}\in l^2(\{V_j\}_{j\in J})$.

文献[11]中有如下结果：

推论 1　设序列 $\{\Lambda_j:\Lambda_j\in L(U,V_j)\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-Riesz 基，界为 A,B. 若 $\lambda,\beta\in(-1,1)$，$\mu\geqslant 0$，$\max\{\lambda+\mu/\sqrt{A},\beta\}<1$，如果 $\{\Gamma_j:\Gamma_j\in L(U,V_j)\}_{j\in J}$ 满足：对任意的有限子集 $I\subset J$ 和 $g_j\in V_j$，有 $\left\|\sum_{j\in I}(\Lambda_j^*-\Gamma_j^*)g_j\right\|\leqslant\lambda\left\|\sum_{j\in I}\Lambda_j^* g_j\right\|+\beta\left\|\sum_{j\in I}\Gamma_j^* g_j\right\|+\mu\left(\sum_{j\in I}\|g_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，则 $\{\Gamma_j\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-Riesz 基，且界为 $\frac{((1-\lambda)\sqrt{A}-\mu)^2}{(1+\beta)^2},\frac{((1+\lambda)\sqrt{B}+\mu)^2}{(1-\beta)^2}$.

本文给出推论 1 的另一个证明方法：

证明　由引理 1 和引理 2，可以得到 $\{\Gamma_j\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-框架，其界由(3)式给出. 由 g-框架的左边不等式可以得到

$$\frac{((1-\lambda)\sqrt{A}-\mu)^2}{(1+\beta)^2}\|f\|^2\leqslant\sum_{j\in J}\|\Gamma_j f\|^2.$$

若 $\Gamma_j f=0$，$j\in J$，可得 $f=0$，所以 $\{\Gamma_j\}_{j\in J}$ 是 g-完备的. 再根据定理 2 知，$\{\Gamma_j\}_{j\in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j\in J}$ 的 g-Riesz 基，并且界为 $\frac{((1-\lambda)\sqrt{A}-\mu)^2}{(1+\beta)^2},\frac{((1+\lambda)\sqrt{B}+\mu)^2}{(1-\beta)^2}$.

（下转第 351 页）

[3] 杨淑媛，焦李成，王敏. 一种新的方向多分辨脊波网络[J]. 西安电子科技大学学报：自然科学版，2006，33(4)：557-562.

[4] Yang Shuyuan，Wang Ming，Jiao Licheng. Incremental constructive ridgelet neural network[J]. Neurocomputing，2008，72：367-377.

[5] Amjady N，Keynia F，Zareipour H. Short-term wind power forecasting using ridgelet neural network[J]. Electric Power Systems Research，2011，81(12)：2099-2107.

[6] Zheng N，Tan H F. SAR image classification based on brushlet and self-adaptive ridgelet neural network[J]. Applied Mechanics and Materials，2013，347：3024-3028.

[7] 孙锋利，何明一，高全华. 基于自适应脊波网络的高光谱遥感图像分类[J]. 计算机科学，2011，38(8)：260-264.

[8] Kennedy J，Eberhart R C. Particle swarm optimization[J]. IEEE Conference on Neural Networks，1995：1942-1948.

[9] Eberhart R C，Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory[J]. Institute of Electrical and Electronics Engineers，1995，10：39-43.

[10] Shi Y，Eberhart R C. A modified particle swarm optimizer[J]. Institute of Electrical and Electronics Engineers，1998，5：69-73.

[11] 夏婷，周卫平，李松毅，等. 一种新的 Pseudo-Zernike 矩的快速算法[J]. 电子学报，2005，33(7)：1295-1298.

[12] 钟智，朱曼龙，张晨，等. 最近邻分类方法的研究[J]. 计算机科学与探索，2011，5(5)：467-473.

(上接第 307 页)

参考文献：

[1] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases[M]. Boston：Birkhǎuser，2003.

[2] Casazza P G. The art of frame theory[J]. Taiwanese J of Math，2000，4(2)：129-201.

[3] Casazza P G，Christensen O，Linder A. Riesz-Fischer sequences and lower frame bounds[J]. Z Anal Anwend，2002，21(2)：305-314.

[4] 李登峰，薛明志. Banach 空间上的基和框架[M]. 北京：科学出版社，2007：68-71.

[5] 董立华，姜曰华，张玉坤. 关于 Riesz-Fischer 序列[J]. 烟台师范学院学报：自然科学版，2003，19(1)：10-13.

[6] Sun W. G-frames and g-Riesz bases[J]. Math Anal Appl，2006，322(1)：437-452.

[7] Sun W. Stability of g-frames[J]. Math Anal Appl，2006，326(2)：858-868.

[8] Ding M L，Zhu Y C. G-Besselian frames in Hilbert spaces[J]. Acta Mathematica Sinica：English Series，2010，26(11)：2117-2130.

[9] 李建振，朱玉灿. Hilbert 空间中的 g-Riesz 框架[J]. 中国科学：数学，2011，41(1)：53-68.

[10] 黄喜娇，朱玉灿. Hilbert 空间中的 g-Riesz-Fischer 序列的扰动[J]. 三明学院学报：自然科学版，2012，29(4)：12-16.

[11] Zhu Y C. Characterizations of g-frames and g-Riesz bases in Hilbert spaces[J]. Acta Mathematica Sinica：English Series，2008，24(10)：1727-1736.