文章编号: 1004-4353(2014)04-0299-06

具依赖状态脉冲的泛函微分系统的稳定性

唐晓伟[1], 孙晓辉[2]
(1.齐鲁师范学院 数学学院, 山东 济南 250013; 2.山东师范大学 数学科学学院, 山东 济南 250014)

摘要: 利用 Lyapunov 函数结合 Razumikhin 技巧给出了在解曲线与每个脉冲面可连续碰撞有限次的情况下具依赖状态脉冲的无穷延滞型泛函微分系统稳定性的直接结果,改进和推广了文献[15-17]的结论.

关键词: (h_0, h)-一致渐近稳定; 依赖状态脉冲; Lyapunov 函数
中图分类号: O175.13　　**文献标识码:** A

Stability of functional differential system with state-dependent impulses

TANG Xiaowei[1], SUN Xiaohui[2]
(1. *Mathematical School, Qilu Normal University, Jinan* 250013, *China*;
2. *School of Mathematical Science, Shandong Normal University, Jinan* 250014, *China*)

Abstract: In the case that the solution of one functional differential system with state-dependent impulses can beat each impulse surface finite times, we give the stable properties by Lyapunove functions and Razumikhin conditions, which improves the existing results.

Key words: (h_0, h)-uniformly asymptotic stability; state-dependent impulses; Lyapunov function

0 引言

自然界中很多现象的数学模型表现为脉冲泛函微分系统.目前为止,人们对脉冲泛函微分系统的研究已取得了显著成果[1-10],但其中大部分成果是关于固定时刻脉冲的脉冲泛函微分系统.由于自然事件发生具有不确定性,因此对具依赖状态脉冲的脉冲泛函微分系统的研究具有十分重要的意义,并且具依赖状态脉冲的脉冲泛函微分系统包含了固定时刻脉冲泛函微分系统这一特殊情形,因而其具有更广泛的应用范围.近年来,对具依赖状态脉冲的脉冲泛函微分系统的研究成果大多侧重于常微分系统和具有界滞量的泛函微分系统[11-17],例如:Liu Xinzhi 等[15]和 Wang Lin 等[16]研究了具依赖状态脉冲的有界滞量脉冲泛函微分系统的稳定性,且必须限制解依次与每个脉冲面只碰撞一次;Tang Xiaowei 等[17]应用比较方法研究了具依赖状态脉冲的无穷延滞型脉冲泛函微分系统在解与每个脉冲面依次碰撞有限次的前提下系统的稳定性,但是这种方法的局限性是系统的确定比较困难.

鉴于此,本文针对具依赖状态脉冲的无穷延滞型脉冲泛函微分系统,用 Lyapunov 函数结合 Razumikhin 技巧给出了在解曲线与每个脉冲面可连续碰撞有限次的情况下系统稳定性的直接结果,改进了文献[15-17]中的结论.

收稿日期: 2014－06－27　　**作者简介:** 唐晓伟(1983—),女,讲师,研究方向为微分方程稳定性.
基金项目: 山东省优秀中青年科学家科研奖励基金资助项目(BS2012DX039);国家自然科学基金资助项目(11301308)

1 预备知识

令 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间,对 $\forall x \in \mathbf{R}^n$,定义 $\|x\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$,$|\cdot|$表示 $\mathbf{R}$ 中的范数,$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,$\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$,$\mathbf{N}^+$ 表示正整数集.

考虑如下的具依赖状态脉冲的泛函微分系统

$$\begin{cases}x'(t)=f(t,x_t),\ t\neq\tau_k(x(t^-));\\ x(t)=x(t^-)+I_k(x(t^-)),\ t=\tau_k(x(t^-));\\ x_{t_0}=\varphi_0,\ t_0\geqslant t^*.\end{cases}\tag{I}$$

其中 $x_t = x(t+s)$,$t\geqslant t^*\geqslant\alpha\geqslant-\infty$,$s\in[\alpha,0]$,$f(t,0)=0$,$\tau_k(x)<\tau_{k+1}(x)$,$k=1,2,\cdots$,$I_k(0)=0$,$\lim\limits_{k\to+\infty}\tau_k(x)=+\infty$. 对 $\forall I\subset\mathbf{R}$,定义 $PC[I,\mathbf{R}^n]=\{x(t):I\to\mathbf{R}^n$,$x(t)$ 在除了点 $t=\tau_k(x(t^-))$,$k\in\mathbf{N}^+$ 之外均连续且在点 $t=\tau_k(x(t^-))$,$k\in\mathbf{N}^+$ 是右连续的$\}$. 对 $\forall t\geqslant t^*$,记 $PC[[\alpha,t],\mathbf{R}^n]$ 为 $PC(t)$,特别地,记 $PC(0)=PC$;$\varphi_0\in PC$,对 $\forall\varphi\in PC$ 定义 $\|\varphi\|_0=\sup\limits_{\alpha\leqslant s\leqslant 0}|s|$.

假设系统(I) 的过(t_0,φ_0) 的解总是整体存在的[4],且 t_0 不是系统(I) 的脉冲时刻.

定义 1 定义如下的函数类:

$K=\{a(s)\in C[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+]$:$a(0)=0$ 且 $a(s)$ 关于 s 严格单调递增$\}$;

$\Gamma=\{h(t,x)\in C[\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^+]$:$\inf\limits_{(t,x)}h(t,x)=0$,$(t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\}$;

$S_k=\{(t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$:$t=\tau_k(x(t))$,$k=1,2,\cdots\}$;

$G_k=\{(t,x(t))\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$:$t$ 为 $x(t)$ 与脉冲面碰撞产生的相邻脉冲时刻构成的左闭右开区间$\}$,

$G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}G_k$;

$K_1=\{H\in C[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+]$:$H(0)=0$,$H(s)>0$,$s>0\}$;

$K_2=\{H\in C[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+]$:$H(0)=0$,$H(s)>0$,$s>0$,$H(s)$ 关于 s 单调递增$\}$;

$S(h,\rho)=\{(t,x)$:$h(t,x)<\rho$,$h(t,x)\in\Gamma$,$\rho>0$ 为常数$\}$.

定义 2 称函数 $V\in v^0$:$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$,若:

(i) $V(t,x)$ 在 G_k 上连续,且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件;

(ii) 对$(t_k,x)\in S_k$,$(t,y)\in G_k$,$\lim\limits_{(t,y)\to(t_k^-,x)}V(t,y)$ 存在,$k=1,2,\cdots$.

设 $V\in v^0$,定义 $V(t,x)$ 沿系统(I) 的连续部分的 Dini 导数如下:

$$D^+V(t,x(t))=\lim_{h\to0^+}\sup_{\alpha\leqslant s\leqslant0}\frac{1}{h}[V(t+h,x(t)+hf(t,x_t))-V(t,x(t))].$$

定义 3 令 $h^0,h\in\Gamma$,$\varphi_0\in PC$,$h_0(t,\varphi_0)=\sup\limits_{\alpha\leqslant s\leqslant0}\{h^0(t+s,\varphi_0(s))\}$,则系统(I) 被称为:

(i) (h_0,h)-一致稳定的,若对任意给定的 $\varepsilon>0$ 和对任意给定的 $t_0\geqslant t^*$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得当 $h_0(t_0,\varphi_0)<\delta$ 时,有 $h(t,x(t))<\varepsilon$,$t\geqslant t_0$,其中 $x(t)$ 是系统(I) 的过(t_0,φ_0) 的解;

(ii) (h_0,h)-一致吸引的,若对任意给定的 $\varepsilon>0$ 和对任意给定的 $t_0\geqslant t^*$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,$T=T(\varepsilon)>0$,使得当 $h_0(t_0,\varphi_0)<\delta$ 时,有 $h(t,x(t))<\varepsilon$,$t\geqslant t_0+T$;

(iii) (h_0,h)-一致渐近稳定的,若(i) 和(ii) 同时成立.

2 主要结果及其证明

对系统(I) 给出以下的条件:

(H_1) $\|f(t,x_t)\|\leqslant c<\infty$,$\forall(t,x(t))\in S(h,\rho)$;

(H_2) 存在 $L_2\geqslant0$,使得对 $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$,$\forall k\in\mathbf{N}^+$,有 $|\tau_k(x)-\tau_k(y)|\geqslant L_2\|x-y\|$;

(H_3) 对 $\forall x \in \mathbf{R}^n$，存在 $M_1 > 0$，使得 $\| I_k(x) \| \geqslant M_1 > 0$；

(H_4) 存在 $\tau > 0$，使得$\inf\limits_{k} d(S_k, S_{k+1}) = \tau > 0$，其中 $d(S_k, S_{k+1}) = \inf\limits_{(x,y)} d(x,y)$，$(\tau_k(x), x) \in S_k$，$(\tau_{k+1}(y), y) \in S_{k+1}$，$k \in \mathbf{N}^+$，$d(x,y)$ 表示 x, y 两点之间的距离.

引理 1　假设系统(I) 的满足 $h(t, x(t)) < \rho$，$h \in \Gamma$，$\rho > 0$ 的解 $x(t)$ 与某一脉冲面 $S_k (k \in \mathbf{N}^+)$ 连续碰撞两次，脉冲时刻分别为 t_1, t_2 且 $t_1 < t_2$，则当(H_1)、(H_2)、(H_3) 成立时，有 $t_2 - t_1 \geqslant \dfrac{L_2 M_1}{1 + L_2 c}$.

证明　由已知条件可得 $t_1 = \tau_k(x(t_1^-))$，$t_2 = \tau_k(x(t_2^-))$，且 $x(t_1) = x(t_1^-) + I_k(x(t_1^-))$. 考虑区间 $[t_1, t_2)$，此时有 $x'(t) = f(t, x_t)$，于是 $x(t_2^-) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2^-} f(s, x_s) \mathrm{d}s$，从而

$$t_2 - t_1 = \tau_k(x(t_2^-)) - \tau_k(x(t_1^-)) = \tau_k\Big(x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2^-} f(s, x_s) \mathrm{d}s\Big) - \tau_k(x(t_1^-)) \geqslant$$

$$L_2 \Big\| x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2^-} f(s, x_s) \mathrm{d}s - x(t_1^-) \Big\| = L_2 \Big\| I_k(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^{t_2^-} f(s, x_s) \mathrm{d}s \Big\| \geqslant L_2 M_1 - L_2 c (t_2 - t_1),$$

故 $t_2 - t_1 \geqslant \dfrac{L_2 M_1}{1 + L_2 c}$. 证毕.

定理 1　假设系统(I) 满足(H_1)—(H_4)，且系统(I) 的任意解 $x(t)$ 与每个脉冲面至多碰撞有限次，若下述条件成立，则系统(I) 是(h_0, h)-一致渐近稳定的：

(i) $h^0, h \in \Gamma$，存在函数 $\varphi \in \mathbf{K}$，常数 $\rho_0 > 0$，使得 $h(t, x) \leqslant \varphi(h^0(t, x))$，$(t, x) \in S(h^0, \rho_0)$；

(ii) 存在 $V \in v^0$，$a, b \in \mathbf{K}$，且 $b(s) \leqslant a(s)$，常数 $\rho > 0$，使得 $b(h(t, x)) \leqslant V(t, x)$，$(t, x) \in S(h, \rho)$ 且 $V(t, x) \leqslant a(h^0(t, x))$，$(t, x) \in S(h^0, \rho)$；

(iii) $V(t, x)$ 沿系统(I) 的解 $x(t)$ 的连续部分的 Dini 导数 $D^+ V(t, x(t))$ 满足：对 $\forall s \in [t + \alpha, t)$，当 $g(V(t, x(t))) > V(s, x(s))$ 时，有 $D^+ V(t, x(t)) \leqslant -p(t) C(V(t, x(t)))$，其中 $p \in PC[\mathbf{R}, \mathbf{R}^+]$，$C \in K_1$，$g \in K_2$；

(iv) 系统(I) 的任意解 $x(t)$ 满足 $V(t, x(t)) \leqslant \psi_k(V(t^-, x(t^-)))$，$(t, x) \in S_k$，其中 $\psi_k \in PC[\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+]$，且 $s \leqslant \psi_k(s) < g(s)$，$s > 0$，$k = 1, 2, \cdots$；

(v) 取 $\mu = \min\{\tau, \dfrac{L_2 M_1}{1 + L_2 c}\}$，对 $\forall u \in \mathbf{R}^+$，系统(I) 的任意解 $x(t)$ 满足

$$-\int_{\tau_k(x(t^-))}^{\tau_k(x(t^-)) + \mu} p(s) \mathrm{d}s + \int_u^{g(u)} \frac{1}{C(s)} \mathrm{d}s < 0, \ k = 0, 1, 2, \cdots, \text{其中 } \tau_0(x(t^-)) = t_0;$$

(vi) 若$(t, x(t^-)) \in S_k \cap S(h, \rho)$，则$(t, x(t^-) + I_k(x(t^-))) \in S(h, \rho)$.

证明　对 $\forall 0 < \varepsilon < \min\{\rho, \rho_0\}$，令 $x(t)$ 是系统(I) 的过(t_0, φ_0) 的解. 因为 $t_0 \neq \tau_k(x(t_0))$，$k = 1, 2 \cdots$，所以必存在某 $k_0, k_1 (k_0 \leqslant k_1)$，使得 $\tau_{k_0}(x(t_0)) < t_0 < \tau_{k_1}(x(t_0))$. 令 $t_i = \tau_{k_i}(x(t_i^-))$，$i = 1, 2, \cdots$ (τ_{k_i} 与 τ_{k_j} 可以相同)，不妨假设 $t_i < t_{i+1}$，于是 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ 即为 $x(t)$ 与脉冲面碰撞所产生的脉冲时刻.

取 $0 < \delta < \min\{\varphi^{-1}(\varepsilon), \rho_0, \rho\}$，且满足 $a(\delta) < b(\varepsilon)$. 当 $h_0(t_0, \varphi_0) < \delta$，$t \in [t_0 + \alpha, t_0]$ 时，有 $h(t, x(t)) \leqslant \varphi(h^0(t, x(t))) = \varphi(h^0(t_0 + (t - t_0), x(t_0 + (t - t_0)))) \leqslant \varphi(h_0(t_0, \varphi_0)) < \varphi(\delta) < \varepsilon$.

下证

$$V(t, x(t)) < b(\varepsilon), \ \forall t \in [t_0, t_1). \tag{1}$$

若不然，则必存在 $\hat{t} \in [t_0, t_1)$，满足

$$V(\hat{t}, x(\hat{t})) = b(\varepsilon), \ V(t, x(t)) < b(\varepsilon), \ t \in [t_0, \hat{t}), \tag{2}$$

且

$$D^+ (\hat{t}, x(\hat{t})) > 0. \tag{3}$$

由于

$$V(t_0,x(t_0))\leqslant a(h^0(t_0,x_0))\leqslant a(h_0(t_0,\varphi_0))<a(\delta)<b(\varepsilon),\tag{4}$$

从而 $\hat{t}\in(t_0,t_1)$. 下面分两种情形讨论.

情形 1. $\exists\, t\in[t_0,\hat{t}]$, 使 $g(V(t,x(t)))\leqslant b(\varepsilon)$. 令 $\bar{t}=\sup\{t\in[t_0,\hat{t}]\mid g(V(t,x(t)))\leqslant b(\varepsilon)\}$. 考虑区间$[\bar{t},\hat{t}]$, 对 $\forall\, t\in[\bar{t},\hat{t}]$, $\forall\, s\in[t+\alpha,t]$, 由(2)式可得 $g(V(t,x(t)))>b(\varepsilon)\geqslant V(s,x(s))$, 从而由条件(iii)知 $D^+(V(t,x(t)))\leqslant -p(t)C(V(t,x(t)))\leqslant 0$, $\forall\, t\in[\bar{t},\hat{t}]$, 这与(3)式矛盾.

情形 2. 对 $\forall\, t\in[t_0,\hat{t}]$, $g(V(t,x(t)))>b(\varepsilon)$. 此时对 $\forall\, t\in[t_0,\hat{t}]$, $\forall\, s\in[t+\alpha,t]$, $g(V(t,x(t)))>b(\varepsilon)\geqslant V(s,x(s))$, 由条件(iii)可知 $D^+(V(t,x(t)))\leqslant -p(t)C(V(t,x(t)))\leqslant 0$, $\forall\, t\in[t_0,\hat{t}]$, 这与(3)式矛盾.

综合上述两种情形可知(1)式成立. 又因为 $b(h(t,x))\leqslant V(t,x)$, 从而当 $t\in[t_0,t_1)$ 时, 有

$$h(t,x(t))<\varepsilon<\rho.\tag{5}$$

其次证明 $g(V(t_1^-,x(t_1^-)))\leqslant b(\varepsilon)$. 若对 $\forall\, t\in[t_0,t_1)$, $g(V(t,x(t)))>b(\varepsilon)$, 于是对 $\forall\, s\in[t+\alpha,t]$, 有 $g(V(t,x(t)))>b(\varepsilon)>V(s,x(s))$, 从而$D^+(V(t,x(t)))\leqslant -p(t)C(V(t,x(t)))$, $\forall\, t\in[t_0,t_1)$. 由引理 1 知 $t_0+\mu\leqslant t_1$, 而

$$0\geqslant\int_{t_0}^{t_1^-}p(s)\mathrm{d}s+\int_{V(t_0,x(t_0))}^{V(t_1,x(t_1^-))}\frac{1}{C(s)}\mathrm{d}s\geqslant\int_{t_0}^{t_0+\mu}p(s)\mathrm{d}s+\int_{b(\varepsilon)}^{V(t_1,x(t_1^-))}\frac{1}{C(s)}\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\int_{t_0}^{t_0+\mu}p(s)\mathrm{d}s+\int_{g(V(t_1,x(t_1^-)))}^{V(t_1,x(t_1^-))}\frac{1}{C(s)}\mathrm{d}s>0,$$

得出矛盾结果, 于是存在 $t\in[t_0,t_1)$, 使得 $g(V(t_1^-,x(t_1^-)))\leqslant b(\varepsilon)$.

令 $\bar{t}=\sup\{t\in[t_0,t_1)\mid g(V(t,x(t)))\leqslant b(\varepsilon)\}$, 于是 $g(V(\bar{t},x(\bar{t})))=b(\varepsilon)$. 考虑区间$[\bar{t},t_1)$, 对 $\forall\, t\in[\bar{t},t_1)$, $\forall\, s\in[t+\alpha,t]$, $g(V(t,x(t)))>b(\varepsilon)>V(s,x(s))$. 由条件(iii)知 $g(V(\bar{t},x(\bar{t})))=b(\varepsilon)\geqslant g(V(t_1^-))>b(\varepsilon)$, 显然这是矛盾的, 于是 $\bar{t}=t_1$.

由条件(iv)可得 $V(t_1,x(t_1))\leqslant\psi_k(V(t_1^-,x(t_1^-)))\leqslant g(V(t_1^-,x(t_1^-)))\leqslant b(\varepsilon)$. 类似地可以证明 $V(t,x(t))<b(\varepsilon)$, $t\in[t_1,t_2)$; $g(V(t_2^-,x(t_2^-)))\leqslant b(\varepsilon)$. 同样 $V(t,x(t))<b(\varepsilon)$, $\forall\, t\in[t_i,t_{i+1})$, $i=1,2,\cdots$. 结合(5)式即可知 $h(t,x(t))<\varepsilon$, $t\geqslant t_0$, 从而系统(I)是(h_0,h)-一致稳定的.

接下来证明系统(I)是(h_0,h)-一致渐近稳定的. 因为系统(I)是(h_0,h)-一致稳定的, 故对上述给定的 $\rho>0$, $\forall\, t_0\geqslant t^*$, 存在 $\delta_0=\delta_0(\rho)>0$, 使得当 $h_0(t_0,\varphi_0)<\delta_0$ 时, 有 $h(t,x(t))<\rho$, $V(t,x(t))<b(\rho)$, $t\geqslant t_0$, 且 $V(t,x(t))\leqslant b(\rho)$, $(t,x(t))\in S_k$. 对上述 $t_0\geqslant t^*$, 令 $\delta=\delta_0>0$, 对 $\forall\,\varepsilon>0$. 下面证明存在 $T=T(\varepsilon)$, 使得当 $h_0(t_0,\varphi_0)<\delta$ 时, 有 $h(t,x(t))<\varepsilon$, $t\geqslant t_0+T$. 令 $\hat{d}(\varepsilon)=\hat{d}=\inf\limits_k\{g(s)-\psi_k(s)\mid g(s)\geqslant\frac{b(\varepsilon)}{2},s\leqslant a(\rho)\}$, 取 $d=d(\varepsilon)<\min\{a(\rho)-b(\varepsilon),\hat{d},\frac{b(\varepsilon)}{2}\}$, 并且令 N 是满足 $a(\rho)<b(\varepsilon)+Nd$ 的最小的正整数.

下面用数学归纳法证明

$$V(t,x(t))\leqslant a(\rho)-id,\ t\geqslant t_i,\ i=0,1,2,\cdots,N.\tag{6}$$

当 $i=0$ 时, 由于 $V(t,x(t))<b(\rho)$, $\forall\, t\geqslant t_0$, 结合条件(ii)即可知 $V(t,x(t))\leqslant a(\rho)$, $\forall\, t\geqslant t_0$ 成立. 假设 $V(t,x(t))\leqslant a(\rho)-id$, $t\geqslant t_i$, $0\leqslant i<N$. 下证

$$V(t,x(t))\leqslant a(\rho)-(i+1)d,\ t\geqslant t_{i+1}.\tag*{(6)$_0$}$$

首先证明

$$g(V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-)))\leqslant a(\rho)-id.\tag{7}$$

若不然, 则有 $g(V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-)))>a(\rho)-id$. 以下分两种情形讨论.

情形 1. $\exists\, t\in[t_i,t_{i+1})$, 使 $g(V(t,x(t)))\leqslant a(\rho)-id$. 此时, 令 $\bar{t}=\sup\{t\in[t_i,t_{i+1})\mid g(V(t,x(t)))\leqslant a(\rho)-id\}$, 于是 $g(V(\bar{t},x(\bar{t})))=a(\rho)-id$. 考虑区间$[\bar{t},t_{i+1})$, 对 $\forall\, t\in[\bar{t},t_{i+1})$, $t+\alpha\leqslant s\leqslant t$, 有 $g(V(t,$

$x(t)))\geqslant a(\rho)-id\geqslant V(s,x(s))$. 由条件(iii)可得 $D^+V(t,x(t))\leqslant -p(t)C(V(t,x(t)))\leqslant 0,\forall t\in[\bar{t},t_{i+1})$，于是 $g(V(\bar{t},x(\bar{t})))=a(\rho)-id\geqslant g(V(\bar{t}_{i+1},x(\bar{t}_{i+1})))>a(\rho)-id$，这是矛盾的.

情形 2. 对 $\forall t\in[t_i,t_{i+1})$，$g(V(t,x(t)))>a(\rho)-id$. 考虑区间$[t_i,t_{i+1})$，对 $\forall t\in[t_i,t_{i+1})$，$t+\alpha\leqslant s\leqslant t$，由于 $g(V(t,x(t)))>a(\rho)-id\geqslant V(s,x(s))$，由条件(iii)得 $D^+V(t,x(t))\leqslant -p(t)C(V(t,x(t)))$，$t\in[t_i,t_{i+1})$. 结合引理 1，对上式两端在区间$[t_i,t_{i+1})$上积分，得

$$0\geqslant\int_{t_i}^{t_{i+1}}p(s)\mathrm{d}s+\int_{V(t_i,x(t_i))}^{V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-))}\frac{1}{C(s)}\mathrm{d}s\geqslant\int_{t_i}^{t_i+\mu}p(s)\mathrm{d}s+\int_{a(\rho)-id}^{V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-))}\frac{1}{C(s)}\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\int_{t_i}^{t_i+\mu}p(s)\mathrm{d}s+\int_{g(V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-)))}^{V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-))}\frac{1}{C(s)}\mathrm{d}s>0,$$

显然矛盾.

结合情形 1 和情形 2 的讨论可知(7)式成立.

其次证明

$$V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-))<a(\rho)-(i+1)d. \tag{8}$$

假设 $0\leqslant g(V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-)))\leqslant\frac{b(\varepsilon)}{2}$，此时 $V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-))\leqslant\psi_k(V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-)))\leqslant\frac{b(\varepsilon)}{2}\leqslant a(\rho)-id-\frac{b(\varepsilon)}{2}<a(\rho)-(i+1)d$；假设 $\frac{b(\varepsilon)}{2}<g(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-))\leqslant a(\rho)-id$，此时 $V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-))\leqslant g(V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-)))\leqslant a(\rho)-id\leqslant a(\rho)$. 于是，$V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-))\leqslant\psi_k(V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-)))\leqslant g(V(t_{i+1}^-,x(t_{i+1}^-)))-\hat{d}<a(\rho)-(i+1)d$.

最后证明

$$V(t,x(t))\leqslant a(\rho)-(i+1)d,\ t_{i+1}\leqslant t<t_{i+2}. \tag{9}$$

假若(9)式不成立，则必存在 $t\in[t_{i+1},t_{i+2})$，使得 $V(t,x(t))>a(\rho)-(i+1)d$ 成立. 令 $\bar{t}=\inf\{t\in[t_{i+1},t_{i+2})\mid V(t,x(t))\geqslant a(\rho)-(i+1)d\}$，则 $V(\bar{t},x(\bar{t}))=a(\rho)-(i+1)d$. 由(8)式可得，$\bar{t}\in(t_{i+1},t_{i+2})$. 又 $g(a(\rho)-(i+1)d)>a(\rho)-(i+1)d>a(\rho)-id-\frac{b(\varepsilon)}{2}\geqslant\frac{b(\varepsilon)}{2}$，且 $a(\rho)-(i+1)d<a(\rho)$，故 $g(a(\rho)-(i+1)d)\geqslant\psi_k(a(\rho)-(i+1)d)+\hat{d}\geqslant a(\rho)-(i+1)d+\hat{d}>a(\rho)-(i+1)d+d=a(\rho)-id$，因此

$$g(V(\bar{t},x(\bar{t})))=g(a(\rho)-(i+1)d)>a(\rho)-id. \tag{10}$$

下面分两种情形考虑：

情形 1. 若 $\exists t\in[t_{i+1},\bar{t}]$，使 $g(V(t,x(t)))\leqslant a(\rho)-id$. 此时，令 $\hat{t}=\sup\{t\in[t_{i+1},\bar{t}]\mid g(V(t,x(t)))\leqslant a(\rho)-id\}$，由(10)式可得 $\hat{t}\in[t_{i+1},\bar{t})$，且 $g(V(\hat{t},x(\hat{t})))=a(\rho)-id$. 考虑区间$[\hat{t},\bar{t}]$，对 $\forall t\in[\hat{t},\bar{t}]$，$s\in[t+\alpha,t]$，$g(V(t,x(t)))\geqslant a(\rho)-id>V(s,x(s))$. 由条件(iii)可得 $D^+V(t,x(t))\leqslant -p(t)\cdot C(V(t,x(t)))\leqslant 0,\forall t\in[\hat{t},\bar{t}]$，即有 $V(\bar{t},x(\bar{t}))\leqslant V(\hat{t},x(\hat{t}))=a(\rho)-id$，矛盾.

情形 2. 对 $\forall t\in[t_{i+1},\bar{t}]$，有 $g(V(t,x(t)))>a(\rho)-id$. 考虑区间$[t_{i+1},\bar{t}]$，对 $\forall t\in[t_{i+1},\bar{t}]$，$s\in[t+\alpha,t]$，由条件(iii)可得 $D^+V(t,x(t))\leqslant -p(t)C(V(t,x(t)))\leqslant 0,\forall t\in[t_{i+1},\bar{t}]$，于是 $V(t_{i+1},x(t_{i+1}))\geqslant V(\bar{t},x(\bar{t}))$，这与 $V(\bar{t},x(\bar{t}))=a(\rho)-(i+1)d>V(t_{i+1},x(t_{i+1}))$ 矛盾.

结合情形 1 和情形 2 的讨论可知(9)式成立.

重复(8)和(9)式的证明过程可得

$$V(t,x(t))\leqslant a(\rho)-(i+1)d,\ t_{i+j}\leqslant t\leqslant t_{i+j+1},\ j=1,2,\cdots,$$

从而$(6)_0$式成立，故(6)式成立.

取 $T=t_N-t_0$，则当 $t\geqslant t_0+T$ 时，$V(t,x(t))\leqslant a(\rho)-Nd<b(\varepsilon)+Nd-Nd=b(\varepsilon)$. 由条件(ii)得 $b(h(t,x(t)))\leqslant V(t,x(t))<b(\varepsilon)$，从而 $h(t,x(t))<\varepsilon$，$t\geqslant t_0+T$. 证毕.

推论 1 假设系统(I)的任意解 $x(t)$ 依次与每个脉冲面只碰撞一次,且:

(i)′ 定理1中的(i)—(iv)、(vi)成立;

(ii)′ 对 $\forall u>0$,系统(I)的任意解 $x(t)$ 满足 $\int_{\tau_k(x(t^-))}^{\tau_k(x(t^-))+\tau} p(s)\mathrm{d}s+\int_u^{g(u)} \frac{1}{C(s)}<0$, $k=0,1,2,\cdots$,

其中 $\tau_0(x(t^-))=t_0$,则系统(I)为(h_0,h)-一致渐近稳定的.

推论 2 若令 $\tau_k(x(t^-))=t_k$, $k=1,2,\cdots$,假设:

(i)′ 定理1中的(i)—(iv)、(vi)成立;

(ii)′ 令 $\mu=\inf\{t_{k+1}-t_k\}_{k=0}^{\infty}$,对 $\forall u>0$,系统(I)的任意解 $x(t)$ 满足 $\int_{t_k}^{t_k+\mu} p(s)\mathrm{d}s+\int_u^{g(u)} \frac{1}{C(s)}<0$,

$k=0,1,2,\cdots$,

则系统(I)为(h_0,h)-一致渐近稳定的.

注 1 由推论2可以看出,定理1比文献[15-16]的结果有更广泛的应用.

参考文献:

[1] 傅希林,闫宝强,刘衍胜.脉冲微分系统引论[M].北京:科学出版社,2005.

[2] 傅希林,闫宝强,刘衍胜.非线性脉冲微分系统[M].北京:科学出版社,2008.

[3] 傅希林,范进军.非线性微分方程[M].北京:科学出版社,2010.

[4] Yan Baoqiang, Fu Xilin. Existence of solution for impulsive functional differential equations with infinite delay[J]. Chin Sci Abs, 1999,5(12):1497-1498.

[5] Lakshmikantham V, Liu Xinzhi. Stability analysis in terms of two measures[M]. Singapore: World Scientic, 1993.

[6] Zhang Yu, Sun Jitao. Strict stability of impulsive functional differential equations[J]. Math Anal Appl, 2005,301(1):237-248.

[7] Zhang Shunian. A new approach to stability theory of infinite delay differential equations[J]. Comput Math Appl, 2002,44(10):1275-1287.

[8] Luo Zhiguo, Shen Jianhua. Stability of functional differential equations with infinite delays[J]. Appl Math B, 2005,20(2):142-150.

[9] Luo Zhiguo, Shen Jianhua. Stability and boundedness results for impulsive functional differential equations with infinite delays[J]. Nonlinear Anal, 2001,46(4):475-493.

[10] Zhang Yu, Sun Jitao. Stability of impulsive infinite delay differential equations[J]. Appl Math Lett, 2006,19(10):1100-1106.

[11] 窦家维,李开泰.一类脉冲微分方程零解的稳定性[J].系统科学与数学,2004,24(1):56-63.

[12] 张瑜,王春燕,孙继涛.具有可变脉冲点的脉冲微分方程的稳定性[J].数学物理学报,2005,25(6):777-783.

[13] 罗宏,蒲志林,陈光淦.具有可变脉冲扰动的时滞脉冲微分方程解的稳定性[J].四川师范大学学报,2002,25(6):18-21.

[14] Kaul S. Vector Lyapunov functions in impulsive variable-time differential system[J]. Nonlinear Anal, 1997,30(5):2695-2698.

[15] Liu Xinzhi, Wang Qing. Stability of nontrivial solution of delay differential equations with state-dependent impulses[J]. Appl Math Comput, 2006,174(1):271-288.

[16] Wang Lin, Fu Xilin. A new comparison principle for impulsive differential systems with variable impulsive perturbations and stability theory[J]. Comput Math Appl, 2007,54:730-736.

[17] Tang Xiaowei, Fu Xilin. New comparison principle with Razumikhin condition for impulsive infinite delay differential systems[J]. Discrect and Continuous Dynamical Systems-Supplement, 2009:739-743.