文章编号： 1004-4353(2014)04-0295-04

一个半线性椭圆型变分不等式约束下的最优控制问题解的存在性

姜今锡， 刘文斌， 金艳
(延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要： 目标泛函相对于状态函数不可微的情形下，利用分解法和引入罚微分方程式等过程，研究了一个半线性椭圆型变分不等式最优控制问题，并证明了其解的存在性.

关键词： 椭圆型变分不等式；特征函数；最优控制
中图分类号： O177.92　　　**文献标识码：** A

Existence of solution for an optimal control problem governed by semi-linear elliptic variational inequality

JIANG Jinxi， LIU Wenbin， JIN Yan
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: In this paper, an optimal control problem governed by semi-linear elliptic variational inequality is studied by means of decomposition and process of introducing a penalty differential equation, and the existence of solution is proved, where the objective function is not differential with respect to the state function.

Key words: elliptic variational inequality; characteristic function; optimal control

微分或变分不等式广泛应用于力学、控制论、经济数学、对策论和最优化中的许多重要问题，如最优控制问题、弹性问题、渗流问题以及处理非线性奇异摄动问题等. 变分不等式作为非线性微分方程的一个特殊类型，具有非线性性、不确定或自由边界条件、以及解的不可微性等特点，其最优控制问题的讨论比非线性微分方程更为困难[1-2]. 文献[1-12]从不同角度对多种类型的线性及非线性变分不等式的最优控制问题进行了讨论，考察了解的存在性、最优化条件、数值解法等问题，并得到了许多有价值的研究成果，但是其中大多数研究仅局限于其目标函数相对于状态可微分的特殊情形. 本文基于已有的研究成果，重点讨论目标函数相对于状态函数不可微情形下的一个最优控制问题，并证明其解的存在性.

1　最优控制问题的设定

1.1　记号表示

“$a := b$” 表示 a 定义为 b；$W^{k,p}(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上的索伯列夫空间 ($k \geqslant 0$, $p > 1$)；$H^k(\Omega)$ 表示 $p = 2$ 时的 $W^{k,p}(\Omega)$ 空间；$W_+ := \{v \in W \mid v \geqslant 0\}$，这里 W 为由函数构成的线性空间；$a^+ := \begin{cases} a, & a \geqslant 0; \\ 0, & a < 0, \end{cases}$ $a^- := \begin{cases} 0, & a \geqslant 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

收稿日期： 2014－07－08
作者简介： 姜今锡(1959—)，男，博士，教授，研究方向为概率统计、最优化理论.

1.2 状态模型

状态函数 u 满足的半线性椭圆型变分不等式如下：

$$u \in K;\ \int_{\Omega} r\lambda \nabla u \nabla(v-u)\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{12}} rG(u)(v-u)\mathrm{d}\Gamma \geqslant \int_{\Gamma_3} r\varphi(v-u)\mathrm{d}\Gamma,\ \forall v \in K, \tag{1}$$

其中：$K := \{v \in H^1(\Omega) \mid$ 在 Ω 上 $v \geqslant 0$，在 Γ_1 上 $v \geqslant u_*$，在 Γ_4 上 $\frac{\partial v}{\partial n}=0\}$，$u_* \in \mathbf{R}_+^1$，$\lambda \in W_+^{1,\infty}(\Omega)$，$\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$，$r \geqslant r_0 > 0$，$u = u(r,z)$ 是定义在 Ω 上的未知函数，$\varphi \in L^2(\Gamma_3)_+$，$G(u) := \alpha(u-\bar{u}) + \beta(u^4 - \bar{\bar{u}}^4)$，$\alpha,\beta \in \mathbf{R}_+^1$，$\bar{u},\bar{\bar{u}} \in \mathbf{R}_+^1$，$\Gamma_{12} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$，$\Gamma = \sum_{i=1}^{4}\Gamma_i$ 为 Ω 的边界.

不等式(1) 在 $H^1(\Omega)$ 上存在唯一的解 u.

1.3 不等式(1)的解的性质及光滑性

$\tilde{G}(u) := \alpha(u-\bar{u}) + \beta(|u|^3 \cdot u - \bar{\bar{u}}^4)$，为讨论解的光滑性，引入如下引理：

引理 1 如下非线性边值问题(2) 存在唯一的解，且其解 $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ 满足如下关系式：

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(r\lambda \nabla u_\varepsilon) + (-1/\varepsilon)\bar{u}_\varepsilon = 0,\ \text{在 } \Omega \text{ 上}; \\ \lambda \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} + \tilde{G}(u_\varepsilon) - \dfrac{1}{\varepsilon}(u-u_*)^- = 0,\ \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}; \\ \lambda \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} + \tilde{G}(u_\varepsilon) = 0,\ \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}; \\ \lambda \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \varphi,\ \text{在 } \Gamma_3 \text{ 上}; \\ \lambda \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \varphi,\ \text{在 } \Gamma_4 \text{ 上}. \end{cases} \tag{2}$$

证明 问题(2) 的变分方程式为

$$\int_{\Omega} r\lambda \nabla u_\varepsilon \nabla v \,\mathrm{d}\Omega - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega} u_\varepsilon^- v \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{12}} r\tilde{G}(u_\varepsilon) v \,\mathrm{d}\Gamma - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_1} (u-u_*)^- v \,\mathrm{d}\Gamma =$$

$$\int_{\Gamma_3} r\varphi v \,\mathrm{d}\Gamma,\ \forall v \in H^1(\Omega), \tag{3}$$

$$(\beta_1(u_\varepsilon), v)_\Omega := \int_{\Omega} -u_\varepsilon^- \cdot v \,\mathrm{d}\Omega,\ (\beta_2(u_\varepsilon), v)_{\Gamma_1} := \int_{\Gamma_1} -(u_\varepsilon - u_*)^- \cdot v \,\mathrm{d}\Gamma,$$

其中 β_1,β_2 是 $H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))^*$ 的单调有界、半连续的，$\tilde{\tilde{G}}(u_\varepsilon) := |u_\varepsilon|^3 \cdot u_\varepsilon$ 是 $H^{1/2}(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ 的单调有界连续算子. 定义

$$\langle A_\varepsilon u_\varepsilon, v\rangle_{V\times V^*} := (r\lambda \nabla u_\varepsilon, \nabla v)_\Omega + (r\alpha u_\varepsilon + r\beta \tilde{\tilde{G}}(u_\varepsilon), v)_{\Gamma_{12}} + \frac{1}{\varepsilon}(\beta_1(u_\varepsilon), v)_\Omega + \frac{1}{\varepsilon}(\beta_2(u_\varepsilon), v)_{\Gamma_1},$$

其中 $V = H^1(\Omega)$，V^* 为 V 的共轭，$(\cdot,\cdot)_\Omega$ 和 $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ 分别为 $L^2(\Omega)$ 和 $L^2(\Gamma)$ 上的内积. 由于算子 $A_\varepsilon: V \to V^*$ 是单调、有界、强制的和半连续的，所以方程 $\langle A_\varepsilon u_\varepsilon, v\rangle_{V\times V^*} := (r\varphi, v)_{\Gamma_3} + (rg, v)_{\Gamma_3}$，$\forall v \in V = H^1(\Omega)$ $(g = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}^4 > 0)$ 存在唯一的解 $u_\varepsilon \in V = H^1(\Omega)$.

引理 2 若 $\varphi \in L^2(\Gamma_3)$，则问题(2) 的解 u_ε 在 Ω 上几乎处处满足 $u_\varepsilon \geqslant 0$.

证明 $\tilde{G}(u_\varepsilon) = \alpha u_\varepsilon + \beta|u_\varepsilon|^3 \cdot u_\varepsilon - g$，在(3) 式中令 $v = u_\varepsilon^-$，则有

$$(r\lambda|\nabla u_\varepsilon^-|^2, 1)_\Omega + \frac{1}{\varepsilon}((u_\varepsilon^-)^2, 1)_\Omega + (r\alpha + r\beta|u_\varepsilon|^3, (u_\varepsilon^-)^2)_{\Gamma_{12}} + (\varphi, u_\varepsilon^-)_{\Gamma_3} + (g, u_\varepsilon^-)_{\Gamma_{12}} =$$

$$\frac{1}{\varepsilon}(-(u_\varepsilon - u_*)^-, u_\varepsilon^-)_{\Gamma_1} \leqslant 0.$$

因为不等式左端非负，而右端不大于零，故有 $((u_\varepsilon^-)^2, 1)_\Omega = \int_{\Omega} (u_\varepsilon^-)^2 \mathrm{d}\Omega \leqslant 0$，从而在 Ω 上几乎处处有 $u_\varepsilon^- = 0$，即 Ω 上几乎处处有 $u_\varepsilon \geqslant 0$. 证毕.

推论 1　变分方程式$\int_{\Omega} r\lambda \nabla u_{\varepsilon} \nabla v \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{12}} rG(u_{\varepsilon}) v \mathrm{d}\Gamma - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_1} (u - u_*)^- v \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_3} r\varphi v \mathrm{d}\Gamma, \forall v \in V$有唯一解$u_{\varepsilon} \in V$，且在$\Omega$上几乎处处成立$u_{\varepsilon} \geqslant 0$.

证明　可直接从引理1和引理2得到.

定理 1　若$\varphi \in L^2(\Gamma_3)$，则不等式(1)的解$u$满足$u \in H^{3/2}(\Omega)$.

证明　从引理1和引理2可知，不等式(1)的罚(penalty)微分方程式便是在边值问题(2)中以$\tilde{G}$替代G. 由于$u_{\varepsilon} \in H^1(\Omega)$，所以$u_{\varepsilon}^1 \in H^1(\Omega)$，$u_{\varepsilon}^1|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$. 又由于$H^{1/2}(\Gamma)$弱收敛于$H^p(\Gamma)(1 < p < \infty)$，所以$G(u_{\varepsilon}) \in L^2(\Gamma_{12})$，从而有$G(u_{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon}(u_{\varepsilon} - u_*)^- \in L^2(\Gamma_{12})$，$\lambda \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} \in L^2(\Gamma)$. 由此可得$u_{\varepsilon} \in H^{3/2}(\Omega)$，$\| u_{\varepsilon} \|_{H^{3/2}(\Omega)} \leqslant C$($C$是常数). 当$\varepsilon \to 0$时，选取子序列并在边值问题(2)中取极限，则可证得极限u就是(1)式的解，且有$u \in H^{3/2}(\Omega)$. 证毕.

引理 3　u是不等式(1)的解当且仅当u为如下问题的解：

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(r\lambda \nabla u) = 0,\ u \geqslant 0,\ \text{在}\ \Omega\ \text{上}; \\ \lambda \dfrac{\partial u}{\partial n} + G(u) \geqslant 0,\ u - u_* \geqslant 0,\ (\lambda \dfrac{\partial u}{\partial n} + G(u))(u - u_*) = 0,\ \text{在}\ \Gamma_1\ \text{上}; \\ \lambda \dfrac{\partial u}{\partial n} + G(u) = 0,\ \text{在}\ \Gamma_2\ \text{上}; \\ \lambda \dfrac{\partial u}{\partial n} + \varphi = 0,\ \text{在}\ \Gamma_3\ \text{上}; \\ \lambda \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0,\ \text{在}\ \Gamma_4\ \text{上}. \end{cases}$$

证明　利用变分不等式的半梯度表示及其性质即可得到证明.

1.4　最优控制问题的设定

假设不等式(1)的解u受φ的控制，则$u = u(\varphi)$. 做如下约定：$F(u) := \{(r,z) \in \Gamma_1 \mid u(r,z) = u_*\}$；$F_d \subset \Gamma_1$，即为给定的$\Gamma_1$的子集合；$\chi_A$表示集合$A$的特征函数，即$\chi_A(x) = \begin{cases} 1,\ x \in A; \\ 0,\ x \notin A; \end{cases}$ $U^* := L^2(\Gamma_3)_+$. 目标函数为$J(\varphi) := \frac{1}{2} \left| \chi_{F(u)} - \chi_{F_d} \right|_{\Gamma_1}^2 + \frac{v}{2} |\varphi|_{\Gamma_3}^2 (v > 0)$，这里$|\cdot|_{\Gamma_1}^2 = \int_{\Gamma_1} (\cdot)^2 \mathrm{d}\Gamma$. 当$u = u(\varphi)$是(1)式的唯一解时，最优控制问题可表示为如下形式：

$$(\mathrm{P}):\ \begin{cases} \inf\ \ J(\varphi) \\ \varphi \in U^*. \end{cases}$$

2　最优控制问题解的存在性

引理 4　$\varphi \to \chi_{F(u(\varphi))}$是$L^2(\Gamma_3) \to L^2(\Gamma_1)$的强、弱连续映射.

证明　首先证明$\varphi \to \chi_{F(u(\varphi))}$的弱连续性. 假设在$L^2(\Gamma_3)$上$\varphi_n$弱收敛于$\varphi$，且$u_n = u(\varphi_n)$是$\varphi = \varphi_n$时(1)的解. 由于在$H^{3/2}(\Omega)$上$u_n$弱收敛于$u$，当$n \to \infty$时$\lambda \frac{\partial u_n}{\partial n}|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$弱收敛于$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma)$. 由定理1可知$u$也是(1)的解，故由引理3的条件可知在$\Gamma_1$上有

$$(u - u_*)\chi_{F(u)} = (u - u_*)(\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + G(u)). \tag{4}$$

因为u_n也是(1)式的解，所以在Γ_1上有

$$(u_n - u_*)\chi_{F(u_n)} = (u_n - u_*)(\lambda \frac{\partial u_n}{\partial n} + G(u_n)). \tag{5}$$

由映射$H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$的紧性可知，在$L^2(\Gamma_1)$上$u_n$强收敛于$u$，$G(u_n)$弱收敛于$G(u)$，$\lambda \frac{\partial u_n}{\partial n}$弱收敛

于$\lambda\frac{\partial u}{\partial n}$. 由于$F_{\chi_{F(u_n)}}$是$L^2(\Gamma_1)$上的有界集,在$L^2(\Gamma_1)$上$\chi_{F(u_n)}$弱收敛于$l(l\in L^2(\Gamma_1))$. 在(5)式中令$n\to\infty$,则有

$$(u-u_*)\cdot l=(u-u_*)(\lambda\frac{\partial u}{\partial n}+G(u)). \tag{6}$$

由(4)式和(6)式可知,当$u>u_*$时,$l=0$. 另一方面,当u是(1)的解时,由引理3可知,在Γ_1上$\chi_{F(u)}\cdot(\lambda\frac{\partial u}{\partial n}+G)=\lambda\frac{\partial u}{\partial n}+G$,同样在$\Gamma_1$上对$u_n$也有$\chi_{F(u_n)}\cdot(\lambda\frac{\partial u_n}{\partial n}+G(u_n))=\lambda\frac{\partial u_n}{\partial n}+G(u_n)$. 当$n\to\infty$时,$l\cdot(\lambda\frac{\partial u}{\partial n}+G(u))=\lambda\frac{\partial u}{\partial n}+G(u)$. 比较前面两式可得当$u=u_*$时,$l=1$. 综合上面结果可得$l=\begin{cases}1, & u=u_*;\\ 0, & u>u_*,\end{cases}$即在$\Gamma_1$上几乎成立$l=\chi_{F(u)}$,从而$\varphi\to\chi_{F(u(\varphi))}$的弱收敛性得到证明.

下证强收敛性. 事实上,由于$\chi_{F(u)}=\chi^2_{F(u)}$,所以$\chi^2_{F(u)}$在$L^2(\Gamma_1)$上弱收敛. 对$\forall\varphi\in L^2(\Gamma_1)$,有

$$(\left|\chi_{F(u(\varphi_n))}-\chi_{F(u(\varphi))}\right|^2,\varphi)_{\Gamma_1}=(\chi^2_{F_n}+\chi^2_F-2\chi_{F_n}\cdot\chi_F,\varphi)_{\Gamma_1}\to(2\chi_F-2\chi_F,\varphi)_{\Gamma_1}=0,$$

其中$F_n:=F(u(\varphi_n))=F(u_n)$, $F:=F(u(\varphi))=F(u)$. 令$\varphi\equiv1$,则有$(\left|\chi_{F_n}-\chi_F\right|^2,1)_{\Gamma_1}=\int_{\Gamma_1}(\chi_{F_n}-\chi_F)^2\mathrm{d}\Gamma\to0\ (n\to\infty)$,从而在$\Gamma_1$上$\chi_{F(u_n)}\to\chi_{F(u)}$. 证毕.

定理2 最优控制问题(P)至少有一个解.

证明 令$j:=\inf J(\varphi)$,设$\{\varphi_n\}$为最小化序列,则有$\lim\limits_{n\to\infty}J(\varphi_n)=j$. 由$\varphi\to J$的强制性可知,$\varphi_n$在$L^2(\Gamma_3)$上有界,且$\varphi_n$在$L^2(\Gamma_3)$上弱收敛于$\varphi$. 设$u_n=u(\varphi_n)$是$\varphi=\varphi_n$时的(1)式的解,则由先验估计公式,在$H^1(\Omega)$上有$\|u_n\|_{H^1(\Omega)}\leqslant C$($C$是与$n$无关的常数),且在$H^1(\Omega)$上$u_n$弱收敛于$u$,而在$L^p(\Omega)$(或$L^p(\Gamma)$)上$u_n\to u\ (1<p<\infty)$,在$\Omega$(或$\Gamma$)上几乎处处有$u_n\to u$. 由$U^*$的紧致性可知$\varphi\in U^*$,在$u_n$所满足的变分不等式中令$n\to\infty$,可知$u$是(1)的解. 由引理4,在$L^2(\Gamma_1)$上有$\chi_{F(u_n)}\to\chi_{F(u)}$. 综上所述,可得到$j=\underline{\lim}_{n\to\infty}J(\varphi_n)\geqslant J(\varphi)$, $\varphi\in U^*$,即φ为问题(P)的解. 证毕.

参考文献:

[1] Bermudez A, Saguez C. Optimal control of a sigorrini problem[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1987,25(3):576-587.

[2] Bermudez A, Saguez C. Optimal control of variational inequalities[J]. Control and Cybernetics, 1985,14(1/3):9-30.

[3] He Zhengxu. State constramed control problems governed by variational inequalities[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1987,25(5):1119-1144.

[4] 张石生,向淑文. 一类型变分不等式解的存在性唯一性问题及其对力学中的Signorini问题的应用[J]. 应用数学与力学,1991,12(5):401-406.

[5] 陈学华. 带不变凸的非光滑约束分式最优控制问题的对偶[J]. 苏州大学学报:自然科学版,2001,17(3):27-34.

[6] David Adams R, Suzanne Tenhard. Optimal shape design subject to ellptic viriational inequalities[J]. Applied Mathematics and Optimization, 2003,47(1):79-95.

[7] Hintermuller M, Laurain A. Optimal shape design subject to ellptic variational inequalities[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2011,49(3):1015-1047.

[8] Gunzburger M D, Manservis S. Analisis and approximation of the velocity tracking problem for navier-stokes flows with distributed control[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2000,37(5):1481-1512.

[9] Gunzburger M D, Manservis S. The velocity traching problem for navier-stokes flows with boundary control[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2001,39(2):594-634.

[10] Arada N, Raymond J P. Optimal control problems with mixed control-state constraints[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2000,39(5):1391-1407.

[11] Chen Qihong, Chu Delin, Roger Tan C E. Optimal contrrol of obstacle for quasi-linear elliptic variational problems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2005,44(3):1067-1080.

[12] Lou Hongwei. An optimal control problem governed by quasi-linear variational inequalities[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2002,41(4):1229-1253.