文章编号: 1004-4353(2014)04-0290-05

在黎曼流形上满足 Schur 定理的一个半对称射影共形联络

许达允[1], 全哲勇[1], 金光植[2*]

(1. 金日成综合大学 数学系, 朝鲜民主主义人民共和国 平壤;
2. 延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 在黎曼流形上定义了一个半对称射影共形联络,并研究了其性质,同时指出这种联络在特殊情形下可成半对称射影联络、半对称共形联络、对称射影共形联络、射影联络、共形联络以及 Levi-Civita 联络. 在此基础上提出了几种能够满足 Schur 定理的半对称射影共形联络的形式,并证明半对称射影共形联络的黎曼流形是常曲率黎曼流形的充分必要条件.

关键词: 半对称射影共形联络; 半对称射影联络; 半对称共形联络; 常曲率

中图分类号: O186.12　　　**文献标识码:** A

A semi-symmetric projective conformal connection satisfying the Schur's theorem on a Riemannian manifold

HO Talyun[1], JEN Cholyong[1], JIN Guangzhi[2*]

(1. *Department of Mathematics, Kim II Sung University, Pyongyang, DPRK*;
2. *Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*)

Abstract: In Riemannian manifold, we defined a semi-symmetric projective conformal connection and considered its properties. In particular cases, this connection reduces to several connections: semi-symmetric projective connection, semi-symmetric conformal connection, symmetric projective conformal connection, projective connection, conformal connection and Levi-Civita connection. We also found forms of a semi-symmetric projective conformal connection satisfying the Schur's theorem. And we considered necessary and sufficient condition that a Riemannian manifold with a semi-symmetric projective conformal connection be a Riemannian manifold with constant curvature.

Key words: semi-symmetric projective conformal connection; semi-symmetric projective connection; semi-symmetric conformal connection; constant curvature

A. Fridman 等在文献[1]中首次提出了半对称度量联络的概念,其后 H. A. Hayden[2] 和 K. Yano[3] 分别提出和研究了黎曼流形上半对称度量联络概念和性质. 随着对半对称度量联络研究的不断深入, N. S. Agache 等又提出了多种类型的半对称联络[4],在此基础上,文献[5-8]分别讨论了射影等效 Levi-Civita 联络的半对称联络性、射影共形联络等内容. 随后,文献[9]给出了度量联络和非度量联络的常曲率条件,文献[10-11]在提出半对称非度量联络的物理模型的基础上,讨论了半对称非度量联络的相互联络应用于古典重力场和电磁场的统一理论. 基于以上研究,本文首先定义了黎曼流体上的一个半对称

收稿日期: 2014 - 10 - 22

* **通信作者:** 金光植(1958—),男,副教授,研究方向为应用统计学.

射影共形联络，且指出这种联络在特殊情形下可成为几个联络，即：半对称射影联络、半对称共形联络、对称射影共形联络、射影联络、共形联络以及 Levi-Civita 联络，并给出了半对称射影共形联络的常曲率条件和此联络的相互联络常曲率条件.

1 半对称射影共形联络

在黎曼流形(M,G)里半对称度量联络 $\overset{\pi}{\nabla}$ 是对于 1-型式 π 满足 $\overset{\pi}{\nabla}_k g_{ij}=0$，$T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k$，其联络系数是$\overset{\pi}{\Gamma}{}_{ij}^k=\left\{{k \atop ij}\right\}+\varphi_j\delta_i^k-g_{ij}\varphi^k$，其中$\left\{{k \atop ij}\right\}$是 Levi-Civita 联络 $\overset{0}{\nabla}$ 的联络系数[12].

定义 1　在黎曼流形(M,g)里联络 $\overset{p}{\nabla}$ 称为半对称射影联络，如果 $\overset{p}{\nabla}$ 是射影等效于 $\overset{\pi}{\nabla}$.

半对称射影联络 $\overset{p}{\nabla}$ 的联络系数是对于任何 1-型式 φ，

$$\overset{p}{\Gamma}{}_{ij}^k=\overset{\pi}{\Gamma}{}_{ij}^k+\psi_i\delta_j^k+\psi_j\delta_i^k=\left\{{k \atop ij}\right\}+\psi_i\delta_j^k+\psi_j\delta_i^k+\varphi_j\delta_i^k-g_{ij}\varphi^k, \tag{1}$$

其联络满足 $\overset{p}{\nabla}_k g_{ij}=-2\psi_k g_{ij}-\psi_i g_{jk}-\psi_j g_{ik}$，$T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k$.

定义 2　在黎曼流形里联络 $\overset{c}{\nabla}$ 称为半对称共形联络，如果半对称度量联络 $\overset{\pi}{\nabla}$ 是共形等效和基于度量的共形变换 $g_{ij}\to\bar{g}_{ij}=e^{2\sigma}g_{ij}$ 组成的.

半对称共形联络 $\overset{c}{\nabla}$ 满足 $\overset{c}{\nabla}_k\bar{g}_{ij}=2\sigma_k\bar{g}_{ij}$，$T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k$，该联络系数为$\overset{c}{\Gamma}{}_{ij}^k=\overline{\left\{{k \atop ij}\right\}}-\sigma_i\delta_j^k-(\sigma_j-\varphi_j)\delta_i^k+\bar{g}_{ij}(\sigma^k-\varphi^k)$，其中$\sigma_i=\partial_i\sigma$，$\overline{\left\{{k \atop ij}\right\}}$是对于黎曼度量$\bar{g}_{ij}$ 的 Levi-Civita 联络 $\overset{c}{\nabla}$ 的联络系数.

定义 3　联络 ∇ 称为半对称射影共形联络，如果在黎曼流体(M,g)里联络是射影等效于半对称度量联络 $\overset{\pi}{\nabla}$ 和共形等效.

半对称射影共形联络 ∇ 满足 $\nabla_k\bar{g}_{ij}=-2(\psi_k-\sigma_k)\bar{g}_{ij}-\psi_i\bar{g}_{jk}-\psi_j\bar{g}_{ik}$，$T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k$，该联络系数为$\Gamma_{ij}^k=\overline{\left\{{k \atop ij}\right\}}-(\psi_i-\sigma_i)\delta_j^k+(\psi_j-\sigma_j+\varphi_j)\delta_i^k+\bar{g}_{ij}(\sigma^k-\varphi^k)$，其中$\varphi_i,\psi_i,\sigma_i$分别是半对称射影共形联络 ∇ 的半对称分量、射影分量和共形分量.

如果$\sigma_i=0$，则半对称射影共形联络 ∇ 是半对称射影联络 $\overset{p}{\nabla}$；如果$\psi_i=0$，则半对称射影共形联络 ∇ 是半对称射影联络 $\overset{c}{\nabla}$；如果$\varphi_i=0$，则半对称射影共形联络 ∇ 是对称射影共形联络 $\overset{s}{\nabla}$. 对称射影共形联络 $\overset{s}{\nabla}$ 满足 $\overset{s}{\nabla}_k\bar{g}_{ij}=-2(\psi_k-\sigma_k)\bar{g}_{ij}-\psi_i\bar{g}_{jk}-\psi_j\bar{g}_{ik}$，$T_{ij}^k=0$，该联络系数为$\overset{s}{\Gamma}{}_{ij}^k=\overline{\left\{{k \atop ij}\right\}}-(\psi_i-\sigma_i)\delta_j^k+(\psi_j-\sigma_j)\delta_i^k+\bar{g}_{ij}\sigma^k$.

注 1　如果$\sigma_k=\psi_k=0$，则 $\nabla=\overset{\pi}{\nabla}$；如果$\sigma_k=\varphi_k=0$，则半对称射影共形联络 ∇ 是射影联络；如果$\psi_k=\varphi_k=0$，则 ∇ 是共形联络（与 Levi-Civita 联络 $\overset{0}{\nabla}$ 共形等效）；如果$\varphi_i=\sigma_i=\psi_i=0$，则 $\nabla=\overset{0}{\nabla}$.

半对称射影共形联络 ∇ 的曲率张量为$R_{ijk}^l=\bar{K}_{ijk}^l+\delta_j^l\alpha_{ik}-\delta_i^l\alpha_{jk}+\bar{g}_{jk}\beta_i^l-\bar{g}_{ik}\beta_j^l+\delta_k^l\psi_{ij}$，其中$\bar{K}_{ijk}^l$为黎曼度量$\bar{g}_{ij}$ 的 $\overset{\circ}{\bar{\nabla}}$ 的曲率张量，$\alpha_{ik}=\overset{\circ}{\bar{\nabla}}_i(\psi_k-\sigma_k+\varphi_k)-(\psi_i-\sigma_i+\varphi_i)(\psi_k-\sigma_k+\varphi_k)-\frac{1}{2}\bar{g}_{ik}(\psi_p-\sigma_p+\varphi_p)(\sigma^p-\varphi^p)$，$\beta_{ik}=\overset{\circ}{\bar{\nabla}}_i(\sigma_k-\varphi_k)+(\sigma_i-\varphi_i)(\sigma_k-\varphi_k)+\frac{1}{2}\bar{g}_{ik}(\psi_p-\sigma_p+\varphi_p)(\sigma^p-\varphi^p)$，$\psi_{ij}=\overset{\circ}{\bar{\nabla}}_i\psi_j-\overset{\circ}{\bar{\nabla}}_j\psi_i$，对于半对称射影共形联络 ∇ 的曲率张量R_{ijk}^l的 Bianchi-Ⅰ 型恒等式为

$$R_{ijk}^l+R_{jki}^l+R_{kij}^l=-((\delta_i^l\varphi_{jk}+\delta_j^l\varphi_{ki}+\delta_k^l\varphi_{ij}), \tag{2}$$

如果 1-型式 π 为封闭的，则$R_{ijk}^l+R_{jki}^l+R_{kij}^l=0$. Bianchi-Ⅱ 型恒等式为

$$\nabla_h R_{ijk}^l+\nabla_i R_{jhk}^l+\nabla_j R_{hik}^l=2(\varphi_h R_{ijk}^l+\varphi_i R_{jhk}^l+\varphi_j R_{hik}^l), \tag{3}$$

其中 $\varphi_{ij}=\overset{\circ}{\overline{\nabla}}_i\varphi_j-\overset{\circ}{\overline{\nabla}}_j\varphi_i$.

2 半对称射影共形联络的常曲率条件

如果在黎曼流体的任何点 P 上的截面曲率与二维子空间的选择无关,则曲率张量可表示为 $R_{ijkl}=K(P)(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl})$,如果 k 是常数,则联络有常曲率.

定理1 在连接的黎曼流体 $(M,g)(\dim M\geqslant 3)$ 里半对称射影共形联络 ∇ 有常曲率的必要且充分条件是

$$2\sigma_h-\psi_h-\varphi_h=0. \tag{4}$$

证明 如果黎曼流体 (M,g) 里半对称射影共形联络 ∇ 的截面曲率与二维子空间的选择无关,则曲率张量为 $R_{ijkl}=K(P)(\bar{g}_{il}\bar{g}_{jk}-\bar{g}_{ik}\bar{g}_{jl})$,把该式代入到(3)式中得

$$\begin{aligned}&[\nabla_hK+2(\sigma_h-\psi_h)K](\bar{g}_{il}\bar{g}_{jk}-\bar{g}_{ik}\bar{g}_{jl})+[\nabla_iK+2(\sigma_i-\psi_i)K](\bar{g}_{jl}\bar{g}_{hk}-\bar{g}_{jk}\bar{g}_{hl})+\\&\quad[\nabla_jK+2(\sigma_j-\psi_j)K](\bar{g}_{hl}\bar{g}_{ik}-\bar{g}_{hk}\bar{g}_{il})=\\&\quad 2K(\varphi_h(\bar{g}_{il}\bar{g}_{jk}-\bar{g}_{ik}\bar{g}_{jl})+\varphi_i(\bar{g}_{jl}\bar{g}_{hk}-\bar{g}_{jk}\bar{g}_{hl})+\varphi_j(\bar{g}_{hl}\bar{g}_{ik}-\bar{g}_{hk}\bar{g}_{il})).\end{aligned} \tag{5}$$

将 $\bar{g}^{jk}$ 乘于(5)式并化简得

$$(n-2)\{\delta_i^l[\nabla_hK-2K(2\sigma_h-\psi_h-\varphi_h)]-\delta_h^l[\nabla_iK-2K(2\sigma_i-\psi_i-\varphi_i)]\}=0.$$

通过对指标 i,l 实施化简得 $(n-1)(n-2)[\nabla_hK+2K(2\sigma_h-\psi_h-\varphi_h)]=0$. 这表明,在 $M\geqslant 3$ 的情况下,K 为常数的必要且充分的条件是(4)式成立.

由定理1可给出在连接的黎曼流形 $(M,g)(\dim M\geqslant 3)$ 中满足Schur定理的半对称射影共形联络的5个类型:

1) $\sigma_i=0\ (\nabla=\overset{p}{\nabla},\ \psi_h=-\varphi_h)$ 时,

$$\overset{p}{\nabla}_kg_{ij}=2\varphi_kg_{ij}+\varphi_ig_{jk}+\varphi_jg_{ik},\ T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k,\ \overset{p}{\Gamma}{}_{ij}^k=\left\{{k \atop ij}\right\}-\varphi_i\delta_j^k-g_{ij}\varphi^p.$$

2) $\psi_i=0\ (\nabla=\overset{c}{\nabla},\ 2\sigma_h=\varphi_h)$ 时,

$$\overset{c}{\nabla}_k\bar{g}_{ij}=\varphi_k\bar{g}_{ij},\ T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k,\ \overset{c}{\Gamma}{}_{ij}^k=\left\{{\bar{k} \atop ij}\right\}-\frac{1}{2}(\varphi_i\delta_j^k-\varphi_j\delta_i^k+\bar{g}_{ij}\varphi^p).$$

3) $\pi=0\ (\nabla=\overset{s}{\nabla},\ \psi_h=2\sigma_h)$ 时,

$$\overset{s}{\nabla}_k\bar{g}_{ij}=-\psi_k\bar{g}_{ij}-\psi_i\bar{g}_{jk}-\psi_j\bar{g}_{ik},\ T_{ij}^k=0,\ \overset{s}{\Gamma}{}_{ij}^k=\left\{{\bar{k} \atop ij}\right\}+\frac{1}{2}(\psi_i\delta_j^k+\psi_j\delta_i^k+\bar{g}_{ij}\psi^k),$$

或

$$\overset{s}{\nabla}_k\bar{g}_{ij}=-2\sigma_k\bar{g}_{ij}-2\sigma_i\bar{g}_{jk}-2\sigma_j\bar{g}_{ik},\ T_{ij}^k=0,\ \overset{s}{\Gamma}{}_{ij}^k=\left\{{\bar{k} \atop ij}\right\}+\sigma_i\delta_j^k+\sigma_j\delta_i^k+\bar{g}_{ij}\sigma^k.$$

4) $\psi=\sigma=\pi$ 时,

$$\nabla_k\bar{g}_{ij}=-\varphi_i\bar{g}_{jk}-\varphi_j\bar{g}_{ik},\ T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k,\ \Gamma_{ij}^k=\left\{{\bar{k} \atop ij}\right\}+\varphi_j\delta_i^k.$$

5) $\psi_h=2\sigma_h-\varphi_h$ 或 $\sigma_h=\frac{1}{2}(\psi_h+\varphi_h)$ 时,

$$\nabla_k\bar{g}_{ij}=-(\psi_k-\sigma_k)\bar{g}_{ij}-\psi_i\bar{g}_{jk}-\psi_j\bar{g}_{ik},\ T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k,$$

$$\Gamma_{ij}^k=\left\{{\bar{k} \atop ij}\right\}+\frac{1}{2}[(\psi_i-\varphi_i)\delta_j^k+(\psi_j+\varphi_j)\delta_i^k+\bar{g}_{ij}(\psi^k-\varphi^k)],$$

或

$$\nabla_k\bar{g}_{ij}=-(\psi_k-\sigma_k)\bar{g}_{ij}-\psi_i\bar{g}_{jk}-\psi_j\bar{g}_{ik},\ T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k,$$

$$\Gamma_{ij}^k=\left\{{\bar{k} \atop ij}\right\}+\frac{1}{2}[(\psi_i-\varphi_i)\delta_j^k+(\psi_j+\varphi_j)\delta_i^k+\bar{g}_{ij}(\psi^k-\varphi^k)]. \tag{6}$$

注 2　从(4)式可知：如果 $\psi_h=\sigma_h=0$，则 $\varphi_h=0$；如果 $\sigma_h=\varphi_h=0$，则 $\psi_h=0$；如果 $\varphi_h=\psi_h=0$，则$\sigma_h=0$. 但如果 $\sigma_h=\psi_h=\varphi_h=0$，则 $\nabla=\overset{0}{\nabla}$，这时 Schur 定理成立.

所以在 $\sigma_h=\psi_h=0$，$\varphi_h\neq 0$ 的半对称度量联络或在 $\sigma_h=\varphi_h=0$，$\psi_h\neq 0$ 的射影对称联络的情形下 Schur 定理不成立，而且在 $\varphi_h=\psi_h=0$，$\sigma_h\neq 0$ 的共形对称联络的情形下 Schur 定理仍然不成立.

3　半对称射影共形联络的相互联络

半对称射影共形联络 ∇ 的相互联络 $\overline{\nabla}$ 满足

$$\overline{\nabla}_k\bar{g}_{ij}=-2(\psi_k-\sigma_k+\varphi_k)\bar{g}_{ij}-(\psi_i-\varphi_i)\bar{g}_{jk}-(\psi_j-\varphi_j)\bar{g}_{ik},\ \overline{T}^k_{ij}=\varphi_i\delta^k_j-\varphi_j\delta^k_i,\tag{7}$$

该联络系数为 $\overline{\Gamma}^k_{ij}=\overline{\{^{\,k}_{ij}\}}+(\psi_i-\sigma_i+\varphi_i)\delta^k_j+(\psi_j-\sigma_j)\delta^k_i+\bar{g}_{ij}(\sigma^k-\varphi^k)$，相互联络 $\overline{\nabla}$ 的曲率张量为 $\overline{R}^l_{ijk}=\overline{K}^l_{ijk}+\delta^l_j\bar{\alpha}_{ik}-\delta^l_i\bar{\alpha}_{jk}+\bar{g}_{ik}\bar{\beta}^l_j-\bar{g}_{jk}\bar{\beta}^l_i+\delta^l_k\bar{\psi}_{ij}$，其中：$\bar{\alpha}_{ik}=\overset{\circ}{\overline{\nabla}}_i(\psi_k-\sigma_k)-(\psi_i-\sigma_i)(\psi_k-\sigma_k)-\frac{1}{2}\bar{g}_{ik}(\psi_p-\varphi_p)(\sigma^p-\varphi^p)$，$\bar{\beta}_{ik}=\overset{\circ}{\overline{\nabla}}_i(\varphi_k-\sigma_k)-(\varphi_i-\sigma_i)(\varphi_k-\sigma_k)-\frac{1}{2}\bar{g}_{ik}(\psi_p-\sigma_p)(\sigma^p-\varphi^p)$，$\bar{\psi}_{ij}=\overset{\circ}{\overline{\nabla}}_i(\psi_j+\varphi_j)-\overset{\circ}{\overline{\nabla}}_j(\psi_i+\varphi_i)$. 对于相互联络 $\overline{\nabla}$ 的曲率张量 $\overline{R}^l_{ijk}$ 的 Bianchi-Ⅰ 型恒等式为

$$\overline{R}^l_{ijk}+\overline{R}^l_{jki}+\overline{R}^l_{kij}=\delta^l_i\varphi_{jk}+\delta^l_j\varphi_{ik}+\delta^l_k\varphi_{ij},$$

如果 1-形式 π 是封闭的，则 $\overline{R}^l_{ijk}+\overline{R}^l_{jki}+\overline{R}^l_{kij}=0$. 曲率张量 $\overline{R}^l_{ijk}$ 的 Bianchi-Ⅱ 型恒等式是

$$\overline{\nabla}_h\overline{R}^l_{ijk}+\overline{\nabla}_i\overline{R}^l_{jhk}+\overline{\nabla}_j\overline{R}^l_{hik}=-2(\varphi_h\overline{R}^l_{ijk}+\varphi_i\overline{R}^l_{jhk}+\varphi_j\overline{R}^l_{hik}).\tag{8}$$

定理 2　在连接的黎曼流体$(M,g)(\dim M\geqslant 3)$中，半对称射影共形联络 ∇ 的相互联络 $\overline{\nabla}$ 有常曲率的必要且充分条件是

$$\psi_h+2\varphi_h-2\sigma_h=0.\tag{9}$$

证明　如果在连接的黎曼流体$(M,g)(\dim M\geqslant 3)$的任何点 P 上，相互联络 $\overline{\nabla}$ 的相互联络与二维子空间的选择无关，则有 $\overline{R}_{ijkl}=K(P)(\bar{g}_{il}\bar{g}_{jk}-\bar{g}_{ik}\bar{g}_{jl})$，将该式代入到(8)式中得

$$\begin{aligned}&[\nabla_hK-2K(\psi_h-2\sigma_h-3\varphi_h)](\bar{g}_{il}\bar{g}_{jk}-\bar{g}_{ik}\bar{g}_{jl})+[\nabla_iK-2K(\psi_i-2\sigma_i-3\varphi_i)]\cdot\\&(\bar{g}_{jl}\bar{g}_{hk}-\bar{g}_{jk}\bar{g}_{hl})+[\nabla_jK-2K(\psi_j-2\sigma_j-3\varphi_j)](\bar{g}_{hl}\bar{g}_{ik}-\bar{g}_{hk}\bar{g}_{il})=\\&-2K[\varphi_h(\bar{g}_{il}\bar{g}_{jk}-\bar{g}_{ik}\bar{g}_{jl})+\varphi_i(\bar{g}_{jl}\bar{g}_{hk}-\bar{g}_{jk}\bar{g}_{hl})+\varphi_j(\bar{g}_{hl}\bar{g}_{ik}-\bar{g}_{hk}\bar{g}_{il})].\end{aligned}$$

用 $\bar{g}^{jk}$ 乘以上式并化简得

$$(n-2)\{\delta^l_i[\nabla_hK-2K(\psi_h-2\sigma_h+2\varphi_h)]-\delta^l_h[\nabla_iK-2K(\psi_i-2\sigma_i+2\varphi_i)]\}=0.$$

通过对指标 i,l 实施化简得$(n-1)(n-2)[\nabla_hK-2K(\psi_h-2\sigma_h+2\varphi_h)]=0$. 这表明，在 $\dim M\geqslant 3$，K 为常数的情形下，k 是常数的必要且充分的条件为(9)式成立.

由定理 2 可给出在连接的黎曼流形$(M,g)(\dim M\geqslant 3)$上满足 Schur 定理的半对称射影共形联络 ∇ 的如下 4 个特殊类型：

1）$\sigma_h=0$ $(\overline{\nabla}=\overset{p}{\overline{\nabla}},\ \psi_h=-2\varphi_h)$时，

$$\overset{p}{\overline{\nabla}}_kg_{ij}=2\varphi_kg_{ij}+3\varphi_ig_{jk}+3\varphi_jg_{ik},\ \overline{T}^k_{ij}=\varphi_i\delta^l_j-\varphi_j\delta^k_i,\ \overset{p}{\overline{\Gamma}}{}^k_{ij}=\{^{\,k}_{ij}\}-\varphi_i\delta^l_j-2\varphi_j\delta^k_i-g_{ij}\varphi^k.$$

2）$\psi_h=0$ $(\overline{\nabla}=\overset{c}{\overline{\nabla}},\ \sigma_h=\varphi_h)$时，

$$\overset{c}{\overline{\nabla}}_k\bar{g}_{ij}=\varphi_i\bar{g}_{jk}+\varphi_j\bar{g}_{ik},\ \overline{T}^k_{ij}=\varphi_i\delta^l_j-\varphi_j\delta^k_i,\ \overset{c}{\overline{\Gamma}}{}^k_{ij}=\overline{\{^{\,k}_{ij}\}}-\varphi_j\delta^k_i.\tag{10}$$

3）$\varphi_h=0$ $(\overline{\nabla}=\overset{s}{\overline{\nabla}},\ \psi_h=2\sigma_h)$时，

$$\overset{s}{\overline{\nabla}}_k\bar{g}_{ij}=-2\sigma_k\bar{g}_{ij}-2\sigma_i\bar{g}_{jk}-2\sigma_j\bar{g}_{ik},\ \overline{T}^k_{ij}=0,\ \overset{s}{\overline{\Gamma}}{}^k_{ij}=\overline{\{^{\,k}_{ij}\}}+\sigma_i\delta^k_j+\sigma_j\delta^k_i+\bar{g}_{ij}\sigma^k.\tag{11}$$

4）$\psi_h=2\sigma_h-2\varphi_h$ 时，

$$\overline{\nabla}_k \overline{g}_{ij} = -2(\sigma_k - \varphi_k)\overline{g}_{ij} - (2\sigma_i - 3\varphi_i)\overline{g}_{jk} - 2(\sigma_j - 3\varphi_j)\overline{g}_{ik}, \quad \overline{T}_{ij}^k = \varphi_i \delta_j^l - \varphi_j \delta_i^k,$$

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k = \overline{\left\{ {k \atop ij} \right\}} + (\sigma_i - \varphi_i)\delta_j^k + (\sigma_j - \varphi_j)\delta_i^k + \overline{g}_{ij}(\sigma^k - \varphi^k).$$

注 3 满足(10)式的联络 $\overline{\nabla}$ 和满足(6)式的联络 ∇ 是成对的,而满足(11)式的联络 $\overline{\nabla}$ 和满足(7)式的联络 ∇ 是相互等效的.

参考文献:

[1] Fridman A, Schouten J A. Uber die Geometric der halb-symmerschen Uber tragungen[J]. Math Zeitschrift, 1924, 21:211-233.

[2] Hayden H A. Subspaces of a space with torsion[J]. Proc of London Math Soc, 1932,34:27-50.

[3] Yano K. On semi-symmetric metric connection[J]. Rev Roum Math Purest Appl, 1970,15:1579-1586.

[4] Agache N S, Chafle M R. A semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold[J]. Indian J Pure Appl Math, 1992,23(6):309-409.

[5] Zhao P B, Song H Z. An invariant of the projective semi-symmetric connection[J]. Chinese Quarterly J of Math, 2001,16(4):49-54.

[6] Zhao P B. Some properties of projective semi-symmetric connections[J]. International Mathematical Forum, 2008, 3(7):341-347.

[7] Ho Talyun. On the projective semi-symmetric connection and conformal semi-symmetric connection on the Riemannian manifold[J]. Journal of Kim II Sung University: Natural Science, 2013,2(2):3-10.

[8] Kurose T. Conformal-projective geometry of statistical manifolds[J]. Interdisciplinary Information Sciences, 2002, 8(1):89-100.

[9] Ho Talyun. On a semi-symmetric non-metric connection satisfying Schur's theorem on a Riemannian manifold[J]. Journal of Kim II Sung University: Natural Science, 2013,2(1):3-7.

[10] Fu F Y, Yang X P, Zhao P B. Geometrical and physical characteristics of a class conformal mapping[J]. Journal of Geometry and Physics, 2012,62(6):1467-1479.

[11] Indranu Suhendro. A new semi-symmetric unified field theory of the classical fields of gravity and electromagnetism[J]. Progress in Physics, 2007,4:47-62.

[12] Han Yanling, Ho Talyun, Zhao Peibiao. Some Invariants of Quarter-symmetric metric connections under projective transformation[J]. Filomat, 2013,27(4):679-691.