文章编号: 1004-4353(2014)04-0283-07

Logistic 反应扩散方程的周期波解

窦丽萍, 何延生*
(延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 利用三维周期波解的定义及相关引理,指出带有多项式的反应扩散方程解的存在性问题可转化为相应的偏差分方程解的存在性问题. 针对带有 Logistic 反应控制项的反应扩散方程,利用基本的分析法获得了它的(2,2)-周期波解.

关键词: 扩散方程; 波解; 偏差分方程; 周期解
中图分类号: O175 **文献标识码:** A

Periodic wave solutions of Logistic reaction diffusion equation

DOU Liping, HE Yansheng*
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: Using the definition and associated lemma of the three periodic wave solutions, we show that the existence of the wave solutions of a reaction diffusion equation with poly-nomial can be transformed into the existence of the solutions of corresponding partial difference equation. Especially for the reaction diffusion equation with a Logistic control, we obtained its (2,2)-periodic solutions by using basic analysis method.

Key words: diffusion equation; wave solutions; partial diffusion solutions; periodic solution

0 引言

格点动力系统(LDSs)是无穷多个常微分方程(Lattice ODEs)或差分方程(CMLs)的系统. 由于传播波可以根据系统的初值来决定其长期行为,因此目前关于格点动力系统的研究很多集中在格点微分方程传播波的问题上. 1984 年 Bell 等在文献[1]中给出了以下典型例子:

$$\frac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t}=D(u_{n+1}(t)-2u_n(t)+u_{n-1}(t)+f(u_n(t))),\ n\in\mathbf{Z},\ t>0. \tag{1}$$

对于给定的线性函数 f, 并利用初始状态研究了其解的长期性. 之后,文献[2]的作者分析了一类微差分方程的传播波,文献[3]的作者给出了一类时滞发展方程的数值解. Shao Yuanhuang 等[4]在一定的假设条件下,研究了 λ-ω 型非自治反应扩散方程周期传播波的存在性. 关于波解的存在性结果可以参阅文献[5-7].

本文引入 2+1 维格点离散动力系统的传播波的一般概念,首先建立了系统的传播波与其剖面序列所满足的偏差分方程,并证明了一个反应扩散方程波解的存在性与其相应的偏差分方程解的存在性之间的关系;其次,利用基本分析法研究了一类带有 Logistic 控制的反应扩散方程

$$u_{m,n}^{(t+1)}=u_{m-1,n}^{(t)}+u_{m+1,n}^{(t)}+u_{m,n-1}^{(t)}+u_{m,n+1}^{(t)}-4u_{m,n}^{(t)}+H(u_{m,n}^{(t)}),\ m,n\in\mathbf{Z}^2,\ t\in\mathbf{N} \tag{2}$$

收稿日期: 2014-08-10
* **通信作者:** 何延生(1962—),男,副教授,研究方向为微差分方程理论及其应用.

的周期波解的存在性,并找出了方程(2)的全部(2,2)-周期波解.方程(2)中 $H(u_{m,n}^{(t)})=\beta u_{m,n}^{(t)}(1-u_{m,n}^{(t)})$ 是一个 Logistic 控制项.

1 基本概念及引理

对于序列 $\varphi=\{\varphi_m\}$,如果存在 $\omega\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $\varphi_{m+\omega}=\varphi_m$, $m\in\mathbf{Z}$,那么 ω 是 φ 的一个周期.如果 ω 是 φ 的一个最小正周期,那么 φ 称为 ω-周期的.

下面的定义和引理可参阅文献[8].

引理 1 如果 $y=\{y_i\}$ 是一个 ω-周期,而 ω_1 是 y 的一个周期,则 $\omega_1 \bmod \omega=0$.

定义 1 如果将三指标的序列 $\{u_{m,n}^{(t)}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,t\in\mathbf{N}}$ 代入方程(2),可使方程(2)成为恒等式,则 $\{u_{m,n}^{(t)}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,t\in\mathbf{N}}$ 是方程(2)的一个解.

定义 2 若 $r\in\mathbf{Z}^+$($\mathbf{Z}^+$ 表示自然数集),$(p,q)\in\mathbf{N}^2$, $\gcd(p,q,r)=1$,那么数组 (p,q,r) 是相容的.

定义 3 设 m 是正整数,a,b 是整数,a 与 b 同余,如果 $m\mid(a-b)$,并记为 $a=b \bmod m$.

定义 4 设 (p,q,r) 相容,若三指标序列 $\{u_{m,n}^{(t)}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,t\in\mathbf{N}}$ 满足 $u_{m,n}^{(t+r)}=u_{m+p,n+q}^{(t)}$,则称其为一个带有速度 $(-p/r,-q/r)$ 的传播波.

定义 5 令 $y=\{y_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$ 是一个双序列,如果 y 关于第一变量 m 是 ρ-周期的,而关于第二变量 n 是 σ-周期的,那么 y 称为是 (ρ,σ) 周期的.

定义 6 令 $\{u_{m,n}^{(t)}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,t\in\mathbf{N}}$ 是三项指数序列,$t\in\mathbf{N}$ 是时间变量,$(m,n)\in\mathbf{Z}^2$ 是空间变量.如果时间变量 u 是 Δ-周期的,同时空间变量又是 (γ,ψ)-周期的,那么称 $\{u_{m,n}^{(t)}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,t\in\mathbf{N}}$ 是方程(2)的带有速度 $(-p/r,-q/r)$ 的 (Δ,γ,ψ)-周期波解.

引理 2 设 (p,q,r) 相容,对于任意 $(z_1,z_2)\in\mathbf{Z}^2$,如果存在 $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$, $s\in\{0,1,\cdots,r-1\}$ 使得 $(z_1,z_2)=r(m,n)+s(p,q)$,那么 (m,n) 和 s 是唯一的.

本文记 $W=\{(z_1,z_2)\mid(z_1,z_2)=r(m,n)+s(p,q)$,对于所有 $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$, $s\in\{0,1,\cdots,r-1\}\}$,显然,如果 $r=1$,那么 $\Omega=\mathbf{Z}^2$.

引理 3 设 (p,q,r) 相容,对于任意 $(z_1,z_2)\in\mathbf{Z}^2$,如果存在 $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$,使得 $(z_1,z_2)=r(m,n)+i(p,q)$,则 $(z_1,z_2)\in\Omega$.

证明 假设 $\{u_{m,n}^{(t)}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,t\in\mathbf{N}}$ 是一个速度为 $(-p/r,-q/r)$ 的传播波,令 $\varphi(z_1,z_2)=u_{m,n}^{(s)}$, $(z_1,z_2)\in\Omega$, $(z_1,z_2)=r(m,n)+s(p,q)$, $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$, $s\in\{0,1,\cdots,r-1\}$.任意给定 $t\in\mathbf{N}$,存在唯一的 $i\in\mathbf{N}$ 和 $s\in\{0,1,\cdots,r-1\}$ 使得 $t=ir+s$,则

$$u_{m,n}^{(t)}=u_{m,n}^{(ir+s)}=u_{m+p,n+q}^{((i-1)r+s)}=\cdots=u_{m+ip,n+iq}^{(s)}=\varphi_{r(m+ip)+sp,r(n+iq)+sq}=\varphi_{rm+tp,rn+tq}.$$

相反,若存在函数 $\varphi:\omega\to\mathbf{R}$,使得 $u_{m,n}^{(t)}=\varphi_{rm+tp,rn+tq}$,那么 $u_{m,n}^{(t+r)}=\varphi_{rm+(t+r)p,rn+(t+r)q}=\varphi_{r(m+p)+tp,r(n+q)+tq}=u_{m+p,n+q}^{(t)}$, $(m,n)\in\Omega$, $t\in\mathbf{N}$.证毕.

由引理 3,如果序列 $\{u_{m,n}^{(t)}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,t\in\mathbf{N}}$ 是一个速度为 $(-p/r,-q/r)$ 的传播波,那么存在实数序列 $\{\varphi(k,l)\}_{(k,l)\in\Omega}$ 使得 $u_{m,n}^{(t)}=\varphi_{rm+tp,rn+tq}$, $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$, $t\in\mathbf{Z}^+$. $\{\varphi(k,l)\}_{(k,l)\in\Omega}$ 称为 $\{u_{m,n}^{(t)}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,t\in\mathbf{N}}$ 的剖面序列.

此外,若存在函数 $\varphi:\mathbf{Z}^2\to\mathbf{R}$,使得 $u_{m,n}^{(t)}=\varphi_{rm+tp,rn+tq}$,则 $u_{m,n}^{(t+r)}=\varphi_{rm+(t+r)p,rn+(t+r)q}=\varphi_{r(m+p)+tp,r(n+q)+tq}=u_{m+p,n+q}^{(t)}$, $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$, $t\in\mathbf{N}$, $\{u_{m,n}^{(t)}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,t\in\mathbf{N}}$ 是一个速度为 $(-p/r,-q/r)$ 的传播波.

考虑带有 Logistic 控制项的反应扩散方程:

$$u_{m,n}^{(t+1)}=u_{m-1,n}^{(t)}+u_{m+1,n}^{(t)}+u_{m,n-1}^{(t)}+u_{m,n+1}^{(t)}-4u_{m,n}^{(t)}+\beta u_{m,n}^{(t)}(1-u_{m,n}^{(t)}),\ m,n\in\mathbf{Z}^2,\ t\in\mathbf{N},\tag{3}$$

其中 $\beta u_{m,n}^{(t)}(1-u_{m,n}^{(t)})$ 是一个 Logistic 控制项.

引理 4 假设 (p,q,r) 相容,如果 $\{u_{m,n}^{(t)}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,t\in\mathbf{Z}^+}$ 是(3)式的一个速度为 $(-p/r,-q/r)$ 的周期波

解，则

$$\varphi_{rm+tp,rn+tq}=u_{m,n}^{(t)},\ (m,n)\in\mathbf{Z}^2,\ t\in\mathbf{N} \tag{4}$$

是偏差分方程

$$\begin{aligned}\varphi(m+p,n+q)=&\varphi(m-r,n)+\varphi(m+r,n)+\varphi(m,n-r)+\varphi(m,n+r)-\\&4\varphi(m,n)+\beta\varphi(m,n)(1-\varphi(m,n)),\ (m,n)\in\mathbf{Z}^2\end{aligned} \tag{5}$$

的解. 相反，如果 $\varphi=\varphi_{m,n}$ 是(5)式的一个解，那么由(4)式确定的序列 $\{u_{m,n}^{(t)}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,t\in\mathbf{N}}$ 是(3)式的一个速度为 $(-p/r,-q/r)$ 的波解.

2　Logistic 反应扩散方程的周期波解

考虑 Logistic 反应扩散方程：

$$u_{m,n}^{(t+1)}=u_{m-1,n}^{(t)}+u_{m+1,n}^{(t)}+u_{m,n-1}^{(t)}+u_{m,n+1}^{(t)}-4u_{m,n}^{(t)}+\beta u_{m,n}^{(t)}(1-u_{m,n}^{(t)}),\ m,n\in\mathbf{Z}^2,\ t\in\mathbf{N}, \tag{6}$$

其中 $\beta\neq 0$ 为参数.

根据引理 4 和方程(5)，只要找到 $\{\varphi(k,l)\}_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2}$，即可找到速度为 $(-p/r,-q/r)$ 的波解和剖面序列 $\{\varphi(k,l)\}_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2}$. 定义 $u_{m,n}^{(t)}=\varphi(rm+rt,tn+st)$，$(m,n)\in\mathbf{Z}^2$，$t\in\mathbf{N}$，则 $\{u_{m,n}^{(\tau)}\}$ 就是一个时间周期和空间周期的波解.

假设 $\varphi(m,n)$ 是(2,2)-周期波解，$\varphi(m,n)$ 的形式为

$$\varphi(m,n)=a_0+a_1(-1)^m+a_2(-1)^n+a_3(-1)^m(-1)^n,\ (m,n)\in\mathbf{Z}^2, \tag{7}$$

其中 $a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbf{R}$ 且 $a_3\neq 0$. 由于方程(4)中 $t\in\mathbf{Z}^+$，$(p,q)\in\mathbf{Z}^2$ 是未知的，因此须考虑如下 7 种不同情况：(i) p,r,q 都是奇数；(ii) p,q 是偶数，r 是奇数；(iii) q,r 是偶数，p 是奇数；(iv) p,r 是偶数，q 是奇数；(v) p,q 是奇数，r 是偶数；(vi) q,r 是奇数，p 是偶数；(vii) p,r 是奇数，q 是偶数.

情况(i). 由(5)式有

$$\varphi(m+1,n+1)-2\varphi(m+1,n)-2\varphi(m,n+1)+(4-\beta)\varphi(m,n)+\beta\varphi^2(m,n)=0,\ (m,n)\in\mathbf{Z}^2,$$

将(7)式代入上式得

$$\begin{aligned}&a_0-a_1(-1)^m-a_2(-1)^n+a_3(-1)^m(-1)^n-2[a_0-a_1(-1)^m+a_2(-1)^n-\\&a_3(-1)^m(-1)^n]-2[a_0+a_1(-1)^m-a_2(-1)^n-a_3(-1)^m(-1)^n]+(4-\beta)[a_0+\\&a_1(-1)^m+a_2(-1)^n+a_3(-1)^m(-1)^n]+\beta[a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+2a_0a_1(-1)^m+\\&2a_0a_2(-1)^n+2a_0a_3(-1)^m(-1)^n+2a_1a_2(-1)^m(-1)^n+2a_1a_3(-1)^n+2a_2a_3(-1)^m]=0.\end{aligned}$$

即如能找到下面非线性系统的一组实数解 (a_0,a_1,a_2,a_3)：

$$\begin{cases}(1-\beta)a_0+\beta(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)=0,\\(3-\beta)a_1+2\beta a_0a_1+2\beta a_2a_3=0,\\(3-\beta)a_2+2\beta a_0a_2+2\beta a_1a_3=0,\\(9-\beta)a_3+2\beta a_0a_3+2\beta a_1a_2=0,\end{cases} \tag{8}$$

其中 $a_3\neq 0$，那么 $\varphi(m,n)$ 是由(7)式定义的方程(6)的一个(2,2)-周期解.

由方程(8)中第 2 和第 3 式，有 $(a_1+a_2)(3-\beta+2\beta a_0+2\beta a_3)=0$，则 $a_1+a_2=0$ 或者 $3-\beta+2\beta a_0+2\beta a_3=0$. 若 $a_1+a_2=0$，由第 2 式得 $a_1(3-\beta+2\beta a_0-2\beta a_3)=0$；若 $a_2=0$，由第 4 式得 $a_3(9-\beta+2\beta a_0)=0$. 由于 $a_3\neq 0$，有 $a_0=\dfrac{\beta-9}{2\beta}$，代入第 1 式得 $a_3=\pm\dfrac{\sqrt{(\beta-9)(\beta+7)}}{2\beta}$. 为使 a_3 为非零实数，须使 $(\beta-9)(\beta+7)>0$，即 $\beta<-7$ 或 $\beta>9$. 若 $a_1\neq 0$，则 $3-\beta+2\beta a_0-2\beta a_3=0$，即 $a_3=\dfrac{3-\beta+2\beta a_0}{2\beta}$. 另一方面，由方程(8)中第 1 和第 4 式得：

$$(1-\beta)a_0+\beta(a_0^2+2a_1^2+a_3^2)=0, \tag{9}$$

$$(9-\beta)a_3+2\beta a_0a_3-2\beta a_1^2=0. \tag{10}$$

进一步为$(1-\beta)a_0+\beta(a_0^2+a_3^2)+(9-\beta)a_3+2\beta a_0a_3=0$. 将 a_3 代入上式得 $4\beta a_0^2+(16-4\beta)a_0+\dfrac{63-30\beta+3\beta^2}{4\beta}=0$, 由于 $\beta\neq 0$, 解得 $a_0=\dfrac{(2\beta-8)\pm\sqrt{(\beta-1)^2}}{4\beta}$, 进而 $a_3=\dfrac{3-\beta+2\beta a_0}{2\beta}=\dfrac{-2\pm\sqrt{(\beta-1)^2}}{4\beta}$. 将 a_0, a_3 代入方程(10)得: ① 当 $\beta>1$ 时, 取 $a_0=\dfrac{(2\beta-8)+\sqrt{(\beta-1)^2}}{4\beta}$, 则由方程(10)知 $a_1=\dfrac{\pm\sqrt{(\beta-3)(\beta+9)}}{4\beta}$. 因为 $a_1\in\mathbf{R}$, 所以$(\beta-3)(\beta+9)\geqslant 0$, 即 $\beta\leqslant -9$ 或 $\beta\geqslant 3$, 再由 $\beta>1$ 得 $\beta\geqslant 3$. 取 $a_0=\dfrac{(2\beta-8)-\sqrt{(\beta-1)^2}}{4\beta}$, 则由方程(10)知 $a_1=\dfrac{\pm\sqrt{(\beta+1)(\beta-11)}}{4\beta}$. 因为 $a_1\in\mathbf{R}$, 所以$(\beta+1)(\beta-11)\geqslant 0$, 即 $\beta\leqslant -1$ 或 $\beta\geqslant 11$, 再由 $\beta>1$ 得 $\beta\geqslant 11$. ② 当 $\beta\leqslant 1$ 且 $\beta\neq 0$ 时, 取 $a_0=\dfrac{(2\beta-8)+\sqrt{(\beta-1)^2}}{4\beta}$, 由方程(10)知 $a_1=\dfrac{\pm\sqrt{(\beta+1)(\beta-11)}}{4\beta}$. 因为 $a_1\in\mathbf{R}$, 所以$(\beta+1)(\beta-11)\geqslant 0$, 即 $\beta\leqslant -1$ 或 $\beta\geqslant 11$, 再由 $\beta\leqslant 1$ 且 $\beta\neq 0$ 得 $\beta\leqslant -1$. 取 $a_0=\dfrac{(2\beta-8)-\sqrt{(\beta-1)^2}}{4\beta}$, 则由方程(10)可得 $a_1=\dfrac{\pm\sqrt{(\beta-3)(\beta+9)}}{4\beta}$. 因为 $a_1\in\mathbf{R}$, 所以$(\beta-3)(\beta+9)\geqslant 0$, 即 $\beta\leqslant -9$ 或 $\beta\geqslant 3$, 再由 $\beta\leqslant 1$ 且 $\beta\neq 0$ 得 $\beta\leqslant -9$.

假如 $3-\beta+2\beta a_0+2\beta a_3=0$, 即 $a_3=\dfrac{\beta-3-2\beta a_0}{2\beta}$, 则由方程(8)中第 2 式得 $a_1(3-\beta+2\beta a_0)+2\beta a_2a_3=0$, $2\beta a_3(a_2-a_1)=0$. 因为 $a_3\neq 0$, 所以 $a_1=a_2$. 再由第 1 和第 4 式得:

$$(1-\beta)a_0+\beta(a_0^2+2a_1^2+a_3^2)=0, \tag{11}$$

$$(9-\beta)a_3+2\beta a_0a_3+2\beta a_1^2=0. \tag{12}$$

进一步有$(1-\beta)a_0+\beta(a_0^2+a_3^2)-(9-\beta)a_3-2\beta a_0a_3=0$. 将 $a_3=\dfrac{\beta-3-2\beta a_0}{2\beta}$ 代入上式得 $4\beta a_0^2+(16-4\beta)a_0+\dfrac{63-30\beta+3\beta^2}{4\beta}=0$, 由于 $\beta\neq 0$, 解得 $a_0=\dfrac{(2\beta-8)\pm\sqrt{(\beta-1)^2}}{4\beta}$, $a_3=\dfrac{\beta-3-2\beta a_0}{2\beta}=\dfrac{2\pm\sqrt{(\beta-1)^2}}{4\beta}$. 将 a_0, a_3 代入方程(12)得: ① 当 $\beta>1$ 时, 取 $a_0=\dfrac{(2\beta-8)+\sqrt{(\beta-1)^2}}{4\beta}$, 则由方程(12)知$(\beta-3)(\beta+9)=16\beta^2a_1^2$, 即 $a_1=\dfrac{\pm\sqrt{(\beta-3)(\beta+9)}}{4\beta}$. 因为 $a_1\in\mathbf{R}$, 所以$(\beta-3)(\beta+9)\geqslant 0$, 即 $\beta\leqslant -9$ 或 $\beta\geqslant 3$, 再由 $\beta>1$ 得 $\beta\geqslant 3$. 取 $a_0=\dfrac{(2\beta-8)-\sqrt{(\beta-1)^2}}{4\beta}$, 则由方程(12)知 $a_1=\dfrac{\pm\sqrt{(\beta+1)(\beta-11)}}{4\beta}$. 因为 $a_1\in\mathbf{R}$, 所以$(\beta+1)(\beta-11)\geqslant 0$, 即 $\beta\leqslant -1$ 或 $\beta\geqslant 11$, 再由 $\beta>1$ 得 $\beta\geqslant 11$. ② 当 $\beta\leqslant 1$ 且 $\beta\neq 0$ 时, 取 $a_0=\dfrac{(2\beta-8)-\sqrt{(\beta-1)^2}}{4\beta}$, 则由方程(12)知 $a_1=\dfrac{\pm\sqrt{(\beta+1)(\beta-11)}}{4\beta}$. 当 $\beta\leqslant -1$ 时, 取 $a_0=\dfrac{(2\beta-8)+\sqrt{(\beta-1)^2}}{4\beta}$, 则由方程(12)知 $a_1=\dfrac{\pm\sqrt{(\beta-3)(\beta+9)}}{4\beta}$. 因为 $a_1\in\mathbf{R}$, 所以$(\beta-3)(\beta+9)\geqslant 0$, 即 $\beta\leqslant -9$ 或 $\beta\geqslant 3$, 再由 $\beta\leqslant -1$ 得 $\beta\leqslant -9$.

综上所述, 当 p, r, q 都是奇数, $\gcd(p,q,r)=1$ 时, 方程(6)的周期波解有如下形式:

$$u_{i,j}^{(r)}=\frac{\beta-9}{2\beta}\pm\frac{\sqrt{(\beta-9)(\beta+7)}}{2\beta}(-1)^{ri+np}(-1)^{rj+nq},\ \beta<-7 \text{ 或 } \beta>9;$$

$$u_{i,j}^{(r)}=\frac{3\beta-9}{4\beta}\pm\frac{\sqrt{(\beta-3)(\beta+9)}}{4\beta}(-1)^{ri+np}\mp\frac{\sqrt{(\beta-3)(\beta+9)}}{4\beta}(-1)^{rj+nq}+\frac{\beta-3}{4\beta}(-1)^{ri+np}(-1)^{rj+nq},\ \beta\geqslant 3 \text{ 或 } \beta\leqslant -9;$$

$$u_{i,j}^{(r)}=\frac{\beta-7}{4\beta}\pm\frac{\sqrt{(\beta+1)(\beta-11)}}{4\beta}(-1)^{ri+np}\mp\frac{\sqrt{(\beta+1)(\beta-11)}}{4\beta}(-1)^{rj+nq}-\frac{1+\beta}{4\beta}(-1)^{ri+np}(-1)^{rj+nq},\ \beta\geqslant 11 \text{ 或 } \beta\leqslant -1;$$

$$u_{i,j}^{(r)}=\frac{3\beta-9}{4\beta}\pm\frac{\sqrt{(\beta-3)(\beta+9)}}{4\beta}(-1)^{ri+np}\pm\frac{\sqrt{(\beta-3)(\beta+9)}}{4\beta}(-1)^{rj+nq}+\frac{3-\beta}{4\beta}(-1)^{ri+np}(-1)^{rj+nq},\ \beta\geqslant 3 \text{ 或 } \beta\leqslant -9;$$

$$u_{i,j}^{(r)}=\frac{\beta-7}{4\beta}\pm\frac{\sqrt{(\beta+1)(\beta-11)}}{4\beta}(-1)^{ri+np}\pm\frac{\sqrt{(\beta+1)(\beta-11)}}{4\beta}(-1)^{rj+nq}+\frac{1+\beta}{4\beta}(-1)^{ri+np}(-1)^{rj+nq},\ \beta\geqslant 11 \text{ 或 } \beta\leqslant -1.$$

情况(ii)．由(5)式有

$$(5-\beta)\varphi(m,n)-2\varphi(m+1,n)-2\varphi(m,n+1)+\beta\varphi^2(m,n)=0,\ (m,n)\in\mathbf{Z}^2. \tag{13}$$

将(7)式代入方程(13)得

$$(5-\beta)[a_0+a_1(-1)^m+a_2(-1)^n+a_3(-1)^m(-1)^n]-2[a_0-a_1(-1)^m+a_2(-1)^n-a_3(-1)^m(-1)^n]-2[a_0+a_1(-1)^m-a_2(-1)^n-a_3(-1)^m(-1)^n]+\beta[a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+2a_0a_1(-1)^m+2a_0a_2(-1)^n+2a_0a_3(-1)^m(-1)^n+2a_1a_2(-1)^m(-1)^n+2a_1a_3(-1)^n+2a_2a_3(-1)^m]=0.$$

类似情况(i)可考虑如下非线性系统：

$$\begin{cases}(1-\beta)a_0+\beta(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)=0,\\(5-\beta)a_1+2\beta a_0a_1+2\beta a_2a_3=0,\\(5-\beta)a_2+2\beta a_0a_2+2\beta a_1a_3=0,\\(9-\beta)a_3+2\beta a_0a_3+2\beta a_1a_2=0.\end{cases} \tag{14}$$

由方程(14)中第 2 和第 3 式有$(a_1+a_2)(5-\beta+2\beta a_0+2\beta a_3)=0$，则 $a_1+a_2=0$ 或者 $5-\beta+2\beta a_0+2\beta a_3=0$．如果 $a_1+a_2=0$，则由第 2 式得 $a_1(5-\beta+2\beta a_0-2\beta a_3)=0$．若 $a_1=0$，则 $a_2=0$，由第 4 式得 $a_3(9-\beta+2\beta a_0)=0$，由 $a_3\neq 0$ 得 $a_0=\frac{\beta-9}{2\beta}$．将 a_0 代入第 1 式得 $a_3=\pm\frac{\sqrt{(\beta-9)(\beta+7)}}{2\beta}$．为使 a_3 为非零实数，应有$(\beta-9)(\beta+7)>0$，即 $\beta<-7$ 或 $\beta>9$．若 $a_1\neq 0$，则 $5-\beta+2\beta a_0-2\beta a_3=0$，即$a_3=\frac{5-\beta+2\beta a_0}{2\beta}$．另一方面，由方程(14)中第 1 和第 4 式得：

$$(1-\beta)a_0+\beta(a_0^2+2a_1^2+a_3^2)=0, \tag{15}$$

$$(9-\beta)a_3+2\beta a_0a_3-2\beta a_1^2=0, \tag{16}$$

即$(1-\beta)a_0+\beta(a_0^2+a_3^2)+(9-\beta)a_3+2\beta a_0a_3=0$．将 a_3 代入上式得 $4\beta a_0^2+(20-4\beta)a_0+\frac{115-38\beta+3\beta^2}{4\beta}=0$．由于 $\beta\neq 0$，解得 $a_0=\frac{(2\beta-10)\pm\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}$，进而得 $a_3=\frac{5-\beta+2\beta a_0}{2\beta}=$

$\frac{\pm\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}$, $\beta<-3$ 或 $\beta>5$. 将 a_0, a_3 代入(16)式得: ① 取 $a_0=\frac{(2\beta-10)+\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}$, 则(16)式可化为 $\beta^2-2\beta-15+8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}=16\beta^2a_1^2$, 解得 $a_1=\frac{\pm\sqrt{\beta^2-2\beta-15+8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}}{4\beta}$. 因为 $a_1\in\mathbf{R}$, 所以 $\beta^2-2\beta-15+8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}\geqslant 0$, 即 $\beta\leqslant-3$ 或 $\beta\geqslant 5$, 又因为 $a_3\neq 0$, 所以 $\beta<-3$ 或 $\beta>5$. ② 取 $a_0=\frac{(2\beta-10)-\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}$, 则(16)式可化为 $\beta^2-2\beta-15-8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}=16\beta^2a_1^2$, 解得 $a_1=\frac{\pm\sqrt{\beta^2-2\beta-15-8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}}{4\beta}$. 因为 $a_1\in\mathbf{R}$, 所以 $\beta^2-2\beta-15-8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}\geqslant 0$, 即 $\beta\leqslant 1-4\sqrt{5}$ 或 $\beta\geqslant 1+4\sqrt{5}$.

如果 $5-\beta+2\beta a_0+2\beta a_3=0$, 即 $a_3=\frac{\beta-5-2\beta a_0}{2\beta}$, 则由方程(14)中第 2 式得 $a_1(5-\beta+2\beta a_0)+2\beta a_2a_3=0$, $2\beta a_3(a_2-a_1)=0$. 因为 $a_3\neq 0$, 所以 $a_1=a_2$. 再由第 1 和第 4 式得:

$$(1-\beta)a_0+\beta(a_0^2+2a_1^2+a_3^2)=0,\tag{17}$$

$$(9-\beta)a_3+2\beta a_0a_3+2\beta a_1^2=0.\tag{18}$$

进一步有 $(1-\beta)a_0+\beta(a_0^2+a_3^2)-(9-\beta)a_3-2\beta a_0a_3=0$. 将 $a_3=\frac{\beta-5-2\beta a_0}{2\beta}$ 代入上式得 $4\beta a_0^2+(20-4\beta)a_0+\frac{115-38\beta+3\beta^2}{4\beta}=0$. 由于 $\beta\neq 0$, 解得 $a_0=\frac{(2\beta-10)\pm\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}$, 进而得 $a_3=\frac{5-\beta+2\beta a_0}{2\beta}=\frac{\mp\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}$, $\beta<-3$ 或 $\beta>5$. 将 a_0 和 a_3 代入方程(18)得: ① 取 $a_0=\frac{(2\beta-10)+\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}$, 则方程(18)可化为 $\beta^2-2\beta-15+8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}=16\beta^2a_1^2$, 即 $a_1=\frac{\pm\sqrt{\beta^2-2\beta-15+8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}}{4\beta}$. 因为 $a_1\in\mathbf{R}$, 所以 $\beta^2-2\beta-15+8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}\geqslant 0$, 即 $\beta\leqslant-3$ 或 $\beta\geqslant 5$, 又 $a_3\neq 0$, 故 $\beta<-3$ 或 $\beta>5$. ② 取 $a_0=\frac{(2\beta-10)-\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}$, 则(18)式可化为 $\beta^2-2\beta-15-8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}=16\beta^2a_1^2$, 解得 $a_1=\frac{\pm\sqrt{\beta^2-2\beta-15-8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}}{4\beta}$. 因为 $a_1\in\mathbf{R}$, 所以 $\beta^2-2\beta-15-8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}\geqslant 0$, 即 $\beta\leqslant 1-4\sqrt{5}$ 或 $\beta\geqslant 1+4\sqrt{5}$.

综上所述, 当 p, q 是偶数, r 是奇数, $\gcd(p,q,r)=1$ 时, 方程(6)的周期波解有如下形式:

$$u_{i,j}^{(r)}=\frac{\beta-9}{2\beta}\pm\frac{\sqrt{(\beta-9)(\beta+7)}}{2\beta}(-1)^{ri+np}(-1)^{rj+nq},\ \beta<-7 \text{ 或 } \beta>9;$$

$$u_{i,j}^{(r)}=\frac{(2\beta-10)+\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}\pm\frac{\sqrt{\beta^2-2\beta-15+8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}}{4\beta}(-1)^{ri+np}\mp$$
$$\frac{\sqrt{\beta^2-2\beta-15+8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}}{4\beta}(-1)^{rj+nq}+\frac{\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}(-1)^{ri+np}(-1)^{rj+nq},$$
$$\beta<-3 \text{ 或 } \beta>5;$$

$$u_{i,j}^{(r)}=\frac{(2\beta-10)-\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}\pm\frac{\sqrt{\beta^2-2\beta-15-8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}}{4\beta}(-1)^{ri+np}\mp$$

$$\frac{\sqrt{\beta^2-2\beta-15-8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}}{4\beta}(-1)^{rj+nq}-\frac{\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}(-1)^{ri+np}(-1)^{rj+nq},$$

$\beta\leqslant 1-4\sqrt{5}$ 或 $\beta\geqslant 1+4\sqrt{5}$;

$$u_{i,j}^{(r)}=\frac{(2\beta-10)+\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}\pm\frac{\sqrt{\beta^2-2\beta-15+8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}}{4\beta}(-1)^{ri+np}\pm$$

$$\frac{\sqrt{\beta^2-2\beta-15+8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}}{4\beta}(-1)^{rj+nq}-\frac{\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}(-1)^{ri+np}(-1)^{rj+nq},$$

$\beta<-3$ 或 $\beta>5$;

$$u_{i,j}^{(r)}=\frac{(2\beta-10)-\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}\pm\frac{\sqrt{\beta^2-2\beta-15-8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}}{4\beta}(-1)^{ri+np}\pm$$

$$\frac{\sqrt{\beta^2-2\beta-15-8\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}}{4\beta}(-1)^{rj+nq}+\frac{\sqrt{\beta^2-2\beta-15}}{4\beta}(-1)^{ri+np}(-1)^{rj+nq},$$

$\beta\leqslant 1-4\sqrt{5}$ 或 $\beta\geqslant 1+4\sqrt{5}$.

由于篇幅所限本文只讨论了前两种情况,剩余情况做类似的讨论即可,故省略.

参考文献:

[1] Bell J, Cosner C. Threshold behavior and propagation for nonlinear differential-difference systems motivated by modeling myelinated axons[J]. Quart Appl Math, 1984,42:1-14.

[2] Britton N F. Traveling wave front solutions of a differential-difference equation arising in the modeling of myelinated nerve axon[J]. Ordinary and Partial Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics, 2006,1151(1985):77-89.

[3] Chi H, Bell J, Hassard B. Numerical solutions of a nonlinear advanced-delay differential equation from nerve condition theory[J]. J Math Biol, 1986,24:583-601.

[4] Shao Yuanhuang, Sui Suncheng. Existence of periodic traveling wave solutions of non-autonomous reaction-diffusion equations with lambda-omega type[J]. J Math Anal Appl, 2014,409:607-613.

[5] Zinner B. Existence of traveling wavefront solutions for the discrete Nagumo equation[J]. J Differ Eq, 1992,96:1-27.

[6] Fu S C, Guo J S, Shieh S Y. Traveling wave solutions for some discrete quasilinear parabolic equations[J]. Nonlinear Anal, 2002,48:1137-1149.

[7] Wu J, Zou X. Asymptotic and periodic boundary value problems of mixed FDEs and wave solutions of lattice differential equations[J]. J Differ Eq, 1997,135:315-357.

[8] He Yansheng, Hou Chengmin. Traveling wave for 2-1 dimension lattice difference equations[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2013,28(2):214-223.