

文章编号: 1004-4353(2014)03-0240-05

# 一个二维含有理分式离散混沌映射的分析与控制

彭建奎<sup>1</sup>, 俞建宁<sup>2</sup>, 张莉<sup>3</sup>

( 1. 兰州文理学院 师范学院, 甘肃 兰州 730010; 2. 兰州交通大学 数理学院, 甘肃 兰州 730070;  
3. 兰州工业学院 基础部, 甘肃 兰州 730050 )

**摘要:** 借助非线性特征研究工具构造了二维含有理分式离散映射, 然后运用最大 Lyapunov 指数谱和分岔图研究该二维有理分式离散映射的动力学行为, 最后利用改进形式的小波函数构造压缩映射, 对二维有理分式混沌映射进行了有效的混沌控制. 通过理论分析和数值模拟, 验证了该混沌控制方法的实用性和有效性.  
**关键词:** 有理分式; 离散混沌映射; 小波变换; 压缩映射; 混沌控制  
**中图分类号:** O322      **文献标识码:** A

## Dynamics analysis and chaos control of a two-dimensions discrete map with rational fractionation

PENG Jiankui<sup>1</sup>, YU Jianning<sup>2</sup>, ZHANG Li<sup>3</sup>

( 1. Normal College, Lanzhou University of Arts and Science, Lanzhou 730010, China;  
2. Mathematics and Physics College, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;  
3. The Basic Courses Department, Lanzhou Institute of Technology, Lanzhou 730050, China )

**Abstract:** A two-dimensions discrete chaotic map with rational fractionation is constructed by nonlinear characteristics tools. Then, its dynamic behaviors is studied with the largest Lyapunov exponents spectrum and global bifurcation diagram. Finally, the chaotic attractor can be controlled effectively and fleetly by nonlinear contraction maps, which are composed of improved wavelet functions form. The utility and validity of this new method is validated with theory analysis and numerical simulation.  
**Key words:** rational fractionation; discrete chaotic maps; wavelet transformation; contraction maps; chaos control

混沌研究是数学和物理学等学科的研究热点之一, 由于混沌系统具有极其复杂性和对初始值的敏感性, 因此混沌在通信保密等领域得到了很好的应用<sup>[1-3]</sup>. 研究者在对混沌产生机理进行研究时发现, 有些混沌运动会对系统本身产生严重危害, 甚至会导致灾难性后果<sup>[4]</sup>, 因此混沌控制成为混沌研究领域的一个重要研究方向. 文献[4-6]提出了许多混沌控制方法, 但这些混沌控制方法并没形成较系统的控制理论.

对于实际系统而言, 如何设计一种既简单又快速达到混沌控制目的的控制器是研究混沌控制的重要方向. 快速衰减性是小波函数的特点之一, 文献[7]表明采用小波函数构造的非线性压缩映射具有更有效的控制能力, 使混沌系统能够得到快速而有效的控制. 含有理分式离散映射比一般离散映射具有更丰富的动力学行为<sup>[8]</sup>, 该映射在参数取适当值时处于混沌状态, 映射具有 3 个凹凸区域并含一个峰值. 本文作者在分析含有理分式的一维映射动力学<sup>[9]</sup>时发现, 该映射产生混沌道路是倍周期分岔通向混沌

的过程. 本文在此研究基础上构造了一个二维含有理分式离散系统,并对其动力学行为和控制结果进行了分析和验证.

### 1 一维含有理分式离散映射模型

一个含有理分式离散映射的数学模型<sup>[8]</sup>描述为

$$x(n+1)=f(x(n),p)=\frac{1}{x(n)^2+0.1}-px(n),\tag{1}$$

其中参数  $p \in [-0.990, 0.990]$ ,  $x \in [-10.002\,5, 10.002\,5]$ . 当参数  $p$  在  $[-0.999\,0, 0.999\,0]$  时发生变化,其系统对应的 Lyapunov 指数谱与分岔图如图 1 和图 2 所示,由此可知,当  $p \in [0.07, 0.15] \cup [0.25, 0.35] \cup [0.38, 0.51] \cup [0.57, 0.62] \cup [0.64, 0.67]$  时, Lyapunov 指数  $\lambda > 0$ , 即离散系统(1)处于混沌状态.

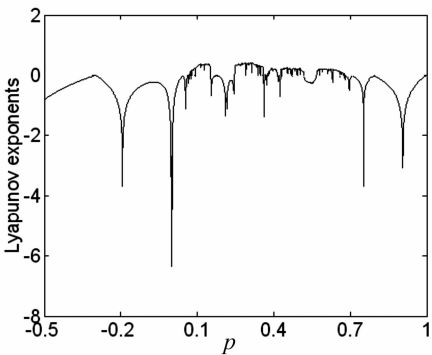


图 1 一维离散映射 Lyapunov 指数谱

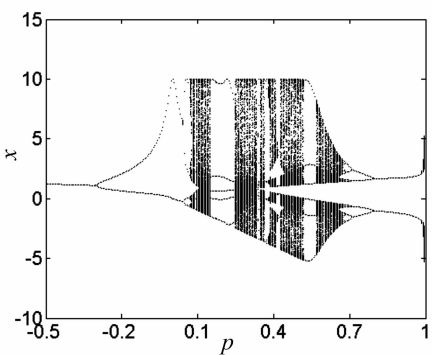


图 2 一维离散映射全局分岔图

### 2 二维含有理分式离散系统模型的动力学分析

#### 2.1 基于修正的 Marotto 定理的混沌分析

2005 年,陈关荣<sup>[10]</sup>指出了 Marotto 定理中的错误,并给出了 Marotto 定理的修正定理:

**定理 1** 设  $z \in R$  为映射  $f: R^n \rightarrow R^n$  的一个不动点. 假设: (i)  $f$  在  $z$  的某领域内连续可微且  $Df(z)$  的所有特征值的绝对值大于 1, 从而存在一个正常数  $q$  和  $R^n$  的一个范数  $\|\cdot\|$ , 使得  $f$  在  $\|\cdot\|$  之下在  $\bar{B}_q(z)$  上扩张, 其中  $\bar{B}_q(z)$  是空间  $(R^n, \|\cdot\|)$  的以  $z$  为中心的闭球; (ii)  $z$  是  $f$  的返回扩张不动点, 即存在点  $x_0 \in B_q(z)$  及正整数  $m$ , 使得  $f^m(x_0)=z$ , 其中  $B_q(z)$  是空间  $(R^n, \|\cdot\|)$  以  $z$  为中心的开球, 且  $f$  在  $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}$  的某领域内连续可微且满足  $\det Df(x_i) \neq 0$  ( $0 \leq i \leq m-1$ ), 其中  $x_i = f(x_{i-1})$ ,  $0 \leq i \leq m-1$ . 则映射  $f$  在 Li-Yorke 意义下是混沌的.

现根据含有理分式的一维离散映射的研究,给出二维含有理分式的离散映射:

$$\begin{cases} x_{n+1}=\frac{1}{x_n^2+0.1}-p_1x_n+g_1(x_n,y_n), \\ y_{n+1}=\frac{1}{y_n^2+0.1}-p_2y_n+g_2(x_n,y_n), \end{cases}\tag{2}$$

其中  $g_1(x_n, y_n), g_2(x_n, y_n)$  为耦合项. 选取对称二次耦合项  $g_1(x_n, y_n)=g_2(x_n, y_n)=rx_ny_n$ , 即得具有对称二次耦合项的二维有理分式的离散系统模型

$$\begin{cases} x_{n+1}=\frac{1}{x_n^2+0.1}-p_1x_n+rx_ny_n, \\ y_{n+1}=\frac{1}{y_n^2+0.1}-p_2y_n+rx_ny_n. \end{cases}\tag{3}$$

系统右端连续形式为映射  $f: f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{x^2+0.1}-p_1x+rx y, \\ \frac{1}{y^2+0.1}-p_2y+rx y, \end{cases}$  该系统的动力学行为由参数  $p_1, p_2, r$  决定.

**定理 2** 在系统(3)中,选择参数  $p_1=p_2=0.5, r=0.11$ , 则系统(3)的不动点是映射  $f$  的返回扩张不动点,即系统(3)在 Li-Yorke 意义下是混沌的.

**证明** 运用 Matlab 软件容易得到系统(3)的不动点,其中一个不动点为  $O_1(13.6328,13.6328)$ , 其雅可比矩阵为

$$Df(O_1)=\begin{bmatrix} -\frac{2x}{(x_0^2+0.1)^2}-p+ry_0 & rx_0 \\ ry_0 & -\frac{2y_0}{(y_0^2+0.1)^2}-p+rx_0 \end{bmatrix}.$$

将不动点  $O_1(13.6328,13.6328)$  代入雅可比矩阵并求得其特征值为  $\lambda_1=5.3762, \lambda_2=-3.6663$ , 显然其绝对值大于 1, 根据定理 1 可得: 存在一个正常数  $q$  和  $R^2$  上的一个范数  $\|\cdot\|$ , 使得  $f$  在  $\|\cdot\|$  之下在  $\bar{B}_q(O_1)$  上扩张, 其中  $\bar{B}_q(O_1)$  是空间  $(R^n, \|\cdot\|)$  的以  $O_1$  为中心的闭球.

再证明映射  $f$  在  $\bar{B}_q(O_1)$  内有返回的不扩张点. 假设存在正整数  $N=2$  及一点  $x_0=(x,y)^T$  使得  $f(x_0)=x_1 \neq O_1, f^2(x_0)=O_1(x_0 \neq O_1)$ , 则通过建立方程并求解可得方程的解为  $x_0=(-9.0846, -9.0846) \neq O_1(13.6328,13.6328)$ .

根据定理 1, 若  $x_0 \in B_q(O_1)$  使  $f$  在  $x_0$  某领域内连续可微并满足  $\det Df(x_0) \neq 0, \det Df(x_1) \neq 0$ , 则不动点  $O_1$  为  $f$  的返回扩张不动点, 并且可直接验证  $\det Df(x_0)=0.6252 \neq 0, \det Df(x_1)=-19.7103 \neq 0$ .

通过以上证明可知映射系统(3)在 Li-Yorke 意义下是混沌的.

2.2 二维含有理分式离散系统混沌道路的数值仿真

Lyapunov 指数是衡量系统动力学特性的一个重要定量指标. 当  $p_1=p_2=0.5, r \in [-0.1,0.15]$  和  $r \in [0.3,0.5]$  时, 运用全局分岔图和最大 Lyapunov 指数谱, 研究

该二维有理分式离散映射动力学行为演化过程表明, 随着  $r$  的增大, 该二维含有理分式离散映射通过倒倍周期分岔通向混沌道路, 并具有比一维含有理分式离散映射更加丰富的动力学行为(图 3).

当  $r=0.11, p_1=p_2=p, p \in [-0.5,0.8]$  时, 运用全局分岔图和最大 Lyapunov 指数谱, 研究该二维有理分式离散系统动力学行为演化过程表明, 随着  $p$  的增大, 该二维含有理分式离散映射通过倍周期分岔通向混沌道路(图 4).

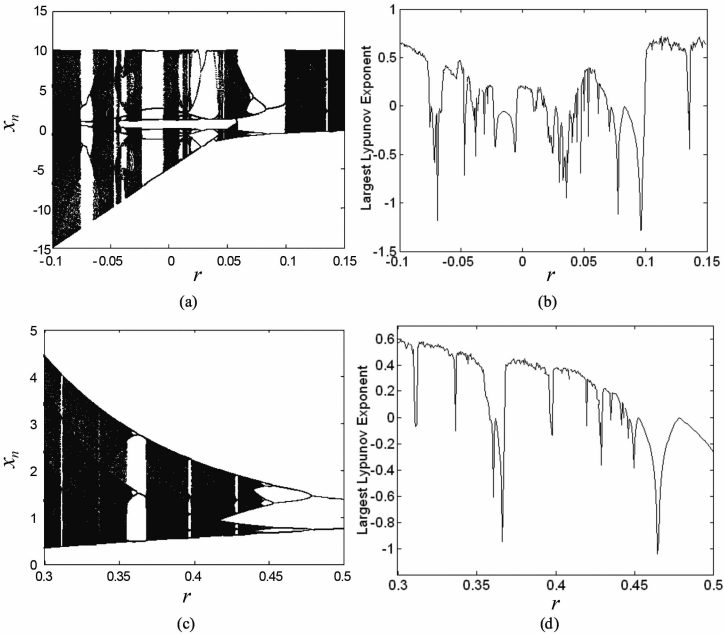


图 3 系统映射随参数  $r$  变化的全局分岔图和最大 Lyapunov 指数谱

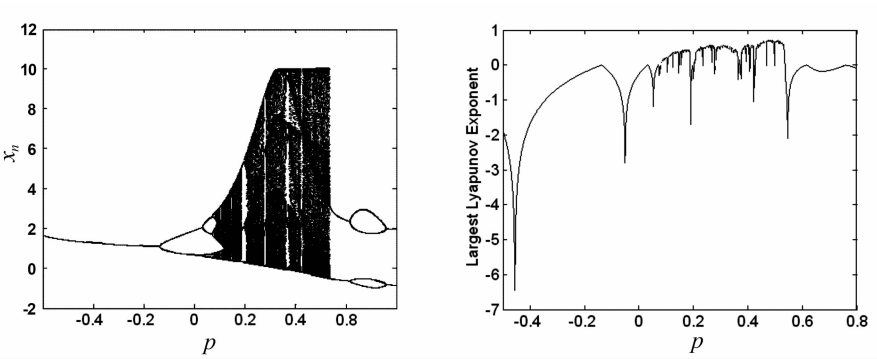


图 4 系统映射随参数  $p$  变化的全局分岔图和最大 Lyapunov 指数谱

3 二维含有多有理分式离散系统的混沌控制

3.1 小波函数变换控制法思想

文献[7]指出小波变换可以控制系统的混沌,小波函数所构造的非线性映射法简单,只需设置一个控制开关,并且该构造方法可对所构造的压缩映射进行改进,将压缩映射施加于多个变量,使混沌系统得到更有效的控制.

设  $n$  维离散动力系统为  $X_k = F(\mu, X_{k-1})$ , 其中  $X_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})^T$ ,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$  为映射参数,当参数  $\mu$  取适当的值时映射(3)处于混沌状态. 选择小波变换构造映射  $T$ , 由于小波变换本身具有快速衰减的特性,因此可使映射  $T$  成为压缩映射. 根据距离空间和压缩映射理论<sup>[4]</sup> 有: 对于任意  $x, y \in (x_m^k, d)$ , 都有  $d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y)$ , 其中  $\theta$  为压缩系数( $0 \leq \theta < 1$ ).

混沌序列所构成的  $(x_m^k, d)$  为不完备距离空间,经过小波变换构造映射  $T$ ,使得映射  $F \circ T$  成为压缩映射,系统(3)通过变换  $T$  后得到输出序列  $\{y_m^k\}$ ,  $k=1,2,\dots$ . 根据完备距离空间不动点定理得: ① 如果  $(y_m^k, d)$  是完备空间,则  $F \circ T$  必存在唯一不动点; ② 如果  $(y_m^k, d)$  子空间  $(y_{mi}^k, d)$  是完备空间,则  $F \circ T$  在  $(y_{mi}^k, d)$  中也必存在唯一不动点. 那么,若存在映射  $T$ , 使得

$$(y_m^k, d) = (y_{m1}^k, d) \oplus (y_{m2}^k, d) \oplus \dots \oplus (y_{mn}^k, d), \tag{4}$$

其中  $(y_{mi}^k, d)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 是完备的,则输出序列  $\{y_m^k\}$  是倍周期序列. 由计算最大 Lyapunov 指数理论<sup>[6]</sup>

可知,随着映射系统迭代次数不断增加,系统(3)通过映射  $T$  作用,  $F \circ T$  是压缩映射,则  $\ln \frac{d_1}{d_0} < 0$ , 故最

大 Lyapunov 指数  $\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{d_0}}{n\tau} < 0$  ( $\tau$  为滞后步数), 由此可知系统(3) 的混沌运动得到有效控制. 根据以上结果可得如下定理:

**定理 3** 设  $n$  维离散动力系统为  $X_k = F(\mu, X_{k-1})$ , 其中  $X_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})^T$ , 取映射参数  $\mu = \mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*)$ , 此时系统映射(3) 处于混沌状态,选取小波变换  $kT$  施加于系统变量  $X_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})^T$ , 则通过调节参数  $k$  可将系统控制到周期轨道(包含高周期轨道).

3.2 混沌控制的数值仿真

在离散系统映射(3) 中选取参数  $p_1 = p_2 = 0.5$ ,  $r = 0.11$  时,离散映射(3) 处于混沌状态. 运用小波变换构造压缩映射,运用 Shannon 函数  $\varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$  构造压缩映射  $T: X_n \rightarrow k \frac{\sin(\pi X_n)}{\pi X_n}$ ,  $k$  为调节参数. 如果将压缩映射  $T$  施加于系统变量  $x(n)$ , 且当  $n = 2\,000$  后施加压缩映射  $T$  于变量  $x(n)$ , 可将系统控制到高周期轨道. 当  $k = 0.3$  时,二维离散混沌映射的混沌运动被控制到 2 周期轨道,如图 5 a 所示; 当  $k = 0.9$  时,二维离散混沌映射的混沌运动被控制到 3 周期轨道,如图 5 b 所示.

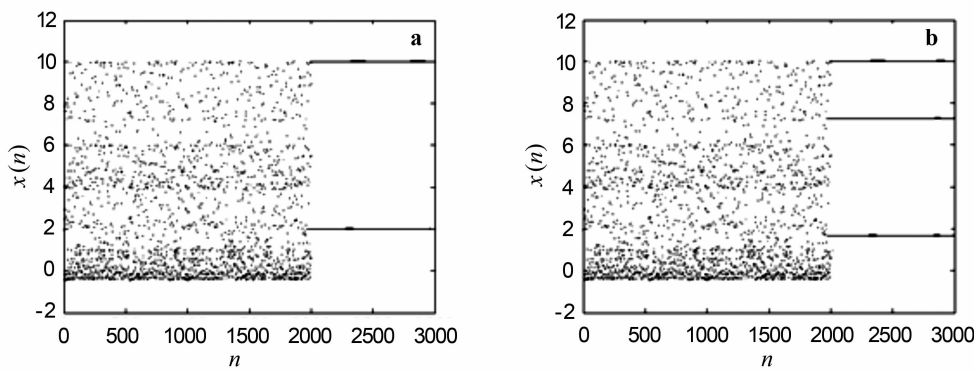


图 5 二维离散混沌映射控制结果

4 结论

本文对含有理分式的一维离散映射的动力学行为进行了研究,运用全局分岔图和 Lyapunov 指数谱工具讨论了该离散映射的运动状态,并得到了该映射混沌态的形成过程.同时,在此基础上构造了二维含有理分式离散映射,运用最大 Lyapunov 指数谱和全局分岔图研究了该二维有理分式离散映射的非线性耦合参数对该映射的影响,结果显示该离散映射具有更加丰富的动力学行为,最后从理论和数值仿真两个方面实现了小波变换映射压缩法对该混沌映射的有效控制.

参考文献:

[1] Wu Z M, Xie J Y, Fang Y Y. Controlling chaos with periodic parametric perturbations in Lorenz system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007,32:104-112.

[2] 彭建华,刘秉正.非线性动力学[M].北京:高等教育出版社,2004:485-498.

[3] 曹书豪,徐红梅. Logistic 映射及其混沌序列特性分析[J]. 延边大学学报:自然科学版,2014,40(2):134-137.

[4] 胡岗,萧井华,郑志刚.混沌控制[M].上海:上海科技教育出版社,2000:120-186.

[5] Yagasaki K. Extension of a chaos control method to unstable trajectories on infinite-or finite-time intervals: experimental verification[J]. Phys Lett A, 2007,36(8):222-226.

[6] 李险峰,张建刚,褚衍东,等. Lozi 混沌映射的线性反馈控制[J]. 河北师范大学学报,2007,31(4):479-483.

[7] 张永祥,俞建宁. Jeffcott 碰摩转子系统混沌控制研究[J]. 山东大学学报:工学版,2006,10(5):117-119.

[8] Lu Jun'an, Wu Xiaoqun, Lü Jinhu, et al. A new discrete chaotic system with rational fractionation and its dynamical behaviors[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2004,22:311-319.

[9] 彭战松,俞建宁,彭建奎. 一个新离散系统的混沌控制与反控制[J]. 天津师范大学学报,2008,28(4):54-56.

[10] Shi Y, Chen G. Discrete chaos in Banach spaces[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2005,48(2):222-238.