

文章编号: 1004-4353(2014)03-0215-05

$C^3 \otimes C^8$ 中不可拓展的最大纠缠基和互不偏基

苑普光, 张秀丽, 杨潇, 栾秀萍, 张军*

(延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 在 $C^3 \otimes C^8$ 中证明了一组不完备的十八元不可拓展的最大纠缠基, 并在此基础上加入 6 个直积态, 得到了 $C^3 \otimes C^8$ 中的一组完备的不可拓展的最大纠缠基, 然后通过构造 C^8 的一个标准正交基给出了另一组完备的不可拓展的最大纠缠基, 并证明了这两组基是互不偏的.

关键词: 最大纠缠基; 互不偏基; 不可拓展; Schmidt 分解

中图分类号: O413.1

文献标识码: A

Unextendible maximally entangled bases and mutually unbiased bases in $C^3 \otimes C^8$

YUAN Puguang, ZHANG Xiuli, YANG Xiao, LUAN Xiuping, ZHANG Jun*

(Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: One uncomplete unextendible maximally entangled basis in $C^3 \otimes C^8$ is proved. Based on this adding six product state, one complete unextendible maximally entangled basis in $C^3 \otimes C^8$ is proved. By constructing an orthonormal basis in C^8 , another complete unextendible maximally entangled basis is constructed, which is mutually unbiased with the first one.

Key words: maximally entangled bases; mutually unbiased bases; unextendible; Schmidt decomposition

0 引言

量子信息学是一门涉及量子力学、密码学、信息学等多门学科的交叉学科, 它以量子纠缠态为信息载体, 研究信息的储存和传输, 以期达到经典信息所不能达到的计算速度和安全性. 自 C. H. Bennett 等^[1]提出多体量子系统中不可拓展的直积基(UPB)概念以来, 已获得了大量具有实际应用价值的理论成果, 例如: 文献[2]研究表明, 包含 UPB 的态是不能被局部测量和经典计算所区分的, 并且在与一组 UPB 互补的子空间上的混合态是一个束缚纠缠态. 文献[3]将 UPB 推广到不可拓展的最大纠缠基(UMEB), 即 UMEB 是一个 $C^d \otimes C^d$ 上由标准正交的最大纠缠态构成的集合, 这个集合含有向量不超过 d^2 个, 除此之外不再存在与它们都正交的最大纠缠态. 当 $d=2$ 时, UMEB 并不存在; 当 $d=3$ 和 $d=4$ 时, 分别找到了含有 6 个向量和 12 个向量的 UMEB 的具体例子.

1989 年, W. K. Wootters 等^[4]提出了互不偏基(MUBS)的概念, 即给定 m 个 C^d 空间上的标准正交

基 $B_K = \{ |\psi_i^k\rangle \}_{i=1}^d, k=1, 2, \dots, m$, 如果 md 个基向量中任意 2 个都满足 $|\langle \psi_i^k | \psi_i^{k'} \rangle| = \begin{cases} \delta_{ii'}, & k=k', \\ 1/\sqrt{d}, & k \neq k', \end{cases}$

其中 $k, k'=1, 2, \dots, m$, 则称 $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 是互不偏基. 目前, 互不偏基已被用于解决量子态层析和加

密协议等问题中^[4-8]. MUBS 的个数 $N(d)$ 最多不超过 $d + 1$. 文献[4] 研究表明, 当 d 是一个素数幂时, $N(d) = d + 1$; 但当 d 是一个非素数幂的和数时, $N(d)$ 尚未可知; 甚至当 $d = 6$ 时, 是否存在 4 个 MUBS 都是未知的^[9]. 因此, 有关 $N(d)$ 以及在 C^6 上如何构造 MUBS 的问题引起了众多研究者的重视. 文献[2] 在 $C^2 \otimes C^3$ 中给出了既是 UMEBS 又是 MUBS 的实际例子, 为此类问题的进一步研究奠定了基础. 本文根据文献[2] 在 $C^2 \otimes C^3$ 中关于 4 元 UMEB 的证明, 对两体空间的维数加以推广: 首先证明两体空间 $C^3 \otimes C^8$ 上的一组不完备的 18 元 UMEB, 然后通过构造 C^8 的一个标准正交基给出两组完备的 UMEBS, 最后证明这两组基是 MUBS.

1 $C^3 \otimes C^8$ 中的 UMEBS

定义 1^[3] 一组态 $\{|\varphi_i\rangle \in C^d \otimes C^{d'}, i = 1, 2, \dots, n, n \leq dd'\}$ 称为 n 元 UMEB, 当且仅当: (I) $|\varphi_i\rangle, i = 1, 2, \dots, n$, 均是最大纠缠态; (II) $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$; (III) 如果 $\langle\varphi_i|\psi\rangle = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则 $|\psi\rangle$ 不能是最大纠缠的.

定义 2^[2] 一个态 $|\psi\rangle$ 称为 $C^d \otimes C^{d'}$ 的最大纠缠态, 当且仅当对任意给定的子系统 A 的完备标准正交基 $\{|i_A\rangle\}$ 存在子系统 B 的一个标准正交基 $\{|i_B\rangle\}$, 使得 $|\psi\rangle$ 能表示为 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle$.

现考虑 $d = 3, d' = 8$ 时, 有

$$|\varphi'_{nm}\rangle = (U_{nm} \otimes I_8) |\varphi'\rangle, n, m = 0, 1, 2, t = 0, 1, \tag{1}$$

其中 $|\varphi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{p=0}^2 |p\rangle |(p+3t)'\rangle, t = 0, 1, U_{nm} = \sum_{k=0}^2 \zeta_3^{nk} |k \oplus m\rangle \langle k|, n, m = 0, 1, 2, \zeta_3 = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}, k \oplus m$ 表示 $k + m$ 除以 3 的余数^[2]. 显然(1) 式符合定义 2, 即 $|\varphi'_{nm}\rangle, n, m = 0, 1, 2, t = 0, 1$ 都是最大纠缠态, 同时又满足 $\langle\varphi'_{nm}|\varphi'_{n'm'}\rangle = \begin{cases} 1, n=n', m=m', t=t', \\ 0, \text{ else,} \end{cases}$ 其中 $n, m, n', m' = 0, 1, 2, t, t' = 0, 1$.

现证明(1) 式中的 18 个态满足定义 1 的条件(III), 即如果存在一个态 $|\psi\rangle$, 使得 $\langle\varphi'_{nm}|\psi\rangle = 0, n, m = 0, 1, 2, t = 0, 1$, 则 $|\psi\rangle$ 一定不是最大纠缠态. 事实上, 假设 $|\psi\rangle$ 是纠缠态, 则 $|\psi\rangle$ 的 Schmidt 分解为 $|\psi\rangle = (U \otimes V) (\sqrt{\lambda_0} |00'\rangle + \sqrt{\lambda_1} |11'\rangle + \sqrt{\lambda_2} |22'\rangle)$, 其中 $\lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_0 +$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1; U = (u_{ij})_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}, V = (v_{ij})_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{18} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{81} & \cdots & v_{88} \end{bmatrix}, U, V \text{ 均为酉矩阵. 于是由}$$

$$\begin{aligned} \langle\varphi_{00}^0|\psi\rangle &= 0 \text{ 得} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (<00'| + <11'| + <22'|) (U \otimes V) (\sqrt{\lambda_0} |00'\rangle + \sqrt{\lambda_1} |11'\rangle + \sqrt{\lambda_2} |22'\rangle) = \\ &\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{3}} \langle 0|U|0\rangle \langle 0'|V|0'\rangle + \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{3}} \langle 0|U|1\rangle \langle 0'|V|1'\rangle + \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{3}} \langle 0|U|2\rangle \langle 0'|V|2'\rangle + \\ &\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{3}} \langle 1|U|0\rangle \langle 1'|V|0'\rangle + \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{3}} \langle 1|U|1\rangle \langle 1'|V|1'\rangle + \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{3}} \langle 1|U|2\rangle \langle 1'|V|2'\rangle + \\ &\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{3}} \langle 2|U|0\rangle \langle 2'|V|0'\rangle + \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{3}} \langle 2|U|1\rangle \langle 2'|V|1'\rangle + \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{3}} \langle 2|U|2\rangle \langle 2'|V|2'\rangle = 0, \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} &\sqrt{\lambda_0} u_{11} v_{11} + \sqrt{\lambda_1} u_{12} v_{12} + \sqrt{\lambda_2} u_{13} v_{13} + \sqrt{\lambda_0} u_{21} v_{21} + \sqrt{\lambda_1} u_{22} v_{22} + \sqrt{\lambda_2} u_{23} v_{23} + \\ &\sqrt{\lambda_0} u_{31} v_{31} + \sqrt{\lambda_1} u_{32} v_{32} + \sqrt{\lambda_2} u_{33} v_{33} = 0. \end{aligned}$$

同理由 $\langle\varphi_{nm}^0|\psi\rangle = 0, n, m = 0, 1, 2 (n, m \text{ 不同时为 } 0)$, 可得:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\lambda_0} u_{21} v_{11} + \sqrt{\lambda_1} u_{22} v_{12} + \sqrt{\lambda_2} u_{23} v_{13} + \sqrt{\lambda_0} u_{31} v_{21} + \sqrt{\lambda_1} u_{32} v_{22} + \sqrt{\lambda_2} u_{33} v_{23} + \sqrt{\lambda_0} u_{11} v_{31} + \\
& \sqrt{\lambda_1} u_{12} v_{32} + \sqrt{\lambda_2} u_{13} v_{33} = 0, \\
& \sqrt{\lambda_0} u_{31} v_{11} + \sqrt{\lambda_1} u_{32} v_{12} + \sqrt{\lambda_2} u_{33} v_{13} + \sqrt{\lambda_0} u_{11} v_{21} + \sqrt{\lambda_1} u_{12} v_{22} + \sqrt{\lambda_2} u_{13} v_{23} + \sqrt{\lambda_0} u_{21} v_{31} + \\
& \sqrt{\lambda_1} u_{22} v_{32} + \sqrt{\lambda_2} u_{23} v_{33} = 0, \\
& \sqrt{\lambda_0} u_{11} v_{11} + \sqrt{\lambda_1} u_{12} v_{12} + \sqrt{\lambda_2} u_{13} v_{13} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_0} u_{21} v_{21} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_1} u_{22} v_{22} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_2} u_{23} v_{23} + \\
& \omega \sqrt{\lambda_0} u_{31} v_{31} + \omega \sqrt{\lambda_1} u_{32} v_{32} + \omega \sqrt{\lambda_2} u_{33} v_{33} = 0, \\
& \sqrt{\lambda_0} u_{21} v_{11} + \sqrt{\lambda_1} u_{22} v_{12} + \sqrt{\lambda_2} u_{23} v_{13} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_0} u_{31} v_{21} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_1} u_{32} v_{22} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_2} u_{33} v_{23} + \\
& \omega \sqrt{\lambda_0} u_{11} v_{31} + \omega \sqrt{\lambda_1} u_{12} v_{32} + \omega \sqrt{\lambda_2} u_{13} v_{33} = 0, \\
& \sqrt{\lambda_0} u_{31} v_{11} + \sqrt{\lambda_1} u_{32} v_{12} + \sqrt{\lambda_2} u_{33} v_{13} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_0} u_{11} v_{21} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_1} u_{12} v_{22} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_2} u_{13} v_{23} + \\
& \omega \sqrt{\lambda_0} u_{21} v_{31} + \omega \sqrt{\lambda_1} u_{22} v_{32} + \omega \sqrt{\lambda_2} u_{23} v_{33} = 0, \\
& \sqrt{\lambda_0} u_{11} v_{11} + \sqrt{\lambda_1} u_{12} v_{12} + \sqrt{\lambda_2} u_{13} v_{13} + \omega \sqrt{\lambda_0} u_{21} v_{21} + \omega \sqrt{\lambda_1} u_{22} v_{22} + \omega \sqrt{\lambda_2} u_{23} v_{23} + \\
& \bar{\omega} \sqrt{\lambda_0} u_{31} v_{31} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_1} u_{32} v_{32} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_2} u_{33} v_{33} = 0, \\
& \sqrt{\lambda_0} u_{21} v_{11} + \sqrt{\lambda_1} u_{22} v_{12} + \sqrt{\lambda_2} u_{23} v_{13} + \omega \sqrt{\lambda_0} u_{31} v_{21} + \omega \sqrt{\lambda_1} u_{32} v_{22} + \omega \sqrt{\lambda_2} u_{33} v_{23} + \\
& \bar{\omega} \sqrt{\lambda_0} u_{11} v_{31} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_1} u_{12} v_{32} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_2} u_{13} v_{33} = 0, \\
& \sqrt{\lambda_0} u_{31} v_{11} + \sqrt{\lambda_1} u_{32} v_{12} + \sqrt{\lambda_2} u_{33} v_{13} + \omega \sqrt{\lambda_0} u_{11} v_{21} + \omega \sqrt{\lambda_1} u_{12} v_{22} + \omega \sqrt{\lambda_2} u_{13} v_{23} + \\
& \bar{\omega} \sqrt{\lambda_0} u_{21} v_{31} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_1} u_{22} v_{32} + \bar{\omega} \sqrt{\lambda_2} u_{23} v_{33} = 0,
\end{aligned}$$

其中 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\bar{\omega}$ 为 ω 的共轭. 上述 9 个方程用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix}
\sqrt{\lambda_0} u_{11} & \sqrt{\lambda_1} u_{12} & \sqrt{\lambda_2} u_{13} & \sqrt{\lambda_0} u_{21} & \sqrt{\lambda_1} u_{22} & \sqrt{\lambda_2} u_{23} & \sqrt{\lambda_0} u_{31} & \sqrt{\lambda_1} u_{32} & \sqrt{\lambda_2} u_{33} \\
\sqrt{\lambda_0} u_{21} & \sqrt{\lambda_1} u_{22} & \sqrt{\lambda_2} u_{23} & \sqrt{\lambda_0} u_{31} & \sqrt{\lambda_1} u_{32} & \sqrt{\lambda_2} u_{33} & \sqrt{\lambda_0} u_{11} & \sqrt{\lambda_1} u_{12} & \sqrt{\lambda_2} u_{13} \\
\sqrt{\lambda_0} u_{31} & \sqrt{\lambda_1} u_{32} & \sqrt{\lambda_2} u_{33} & \sqrt{\lambda_0} u_{11} & \sqrt{\lambda_1} u_{12} & \sqrt{\lambda_2} u_{13} & \sqrt{\lambda_0} u_{21} & \sqrt{\lambda_1} u_{22} & \sqrt{\lambda_2} u_{23} \\
\sqrt{\lambda_0} u_{11} & \sqrt{\lambda_1} u_{12} & \sqrt{\lambda_2} u_{13} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_0} u_{21} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_1} u_{22} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_2} u_{23} & \omega \sqrt{\lambda_0} u_{31} & \omega \sqrt{\lambda_1} u_{32} & \omega \sqrt{\lambda_2} u_{33} \\
\sqrt{\lambda_0} u_{21} & \sqrt{\lambda_1} u_{22} & \sqrt{\lambda_2} u_{23} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_0} u_{31} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_1} u_{32} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_2} u_{33} & \omega \sqrt{\lambda_0} u_{11} & \omega \sqrt{\lambda_1} u_{12} & \omega \sqrt{\lambda_2} u_{13} \\
\sqrt{\lambda_0} u_{31} & \sqrt{\lambda_1} u_{32} & \sqrt{\lambda_2} u_{33} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_0} u_{11} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_1} u_{12} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_2} u_{13} & \omega \sqrt{\lambda_0} u_{21} & \omega \sqrt{\lambda_1} u_{22} & \omega \sqrt{\lambda_2} u_{23} \\
\sqrt{\lambda_0} u_{11} & \sqrt{\lambda_1} u_{12} & \sqrt{\lambda_2} u_{13} & \omega \sqrt{\lambda_0} u_{21} & \omega \sqrt{\lambda_1} u_{22} & \omega \sqrt{\lambda_2} u_{23} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_0} u_{31} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_1} u_{32} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_2} u_{33} \\
\sqrt{\lambda_0} u_{21} & \sqrt{\lambda_1} u_{22} & \sqrt{\lambda_2} u_{23} & \omega \sqrt{\lambda_0} u_{31} & \omega \sqrt{\lambda_1} u_{32} & \omega \sqrt{\lambda_2} u_{33} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_0} u_{11} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_1} u_{12} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_2} u_{13} \\
\sqrt{\lambda_0} u_{31} & \sqrt{\lambda_1} u_{32} & \sqrt{\lambda_2} u_{33} & \omega \sqrt{\lambda_0} u_{11} & \omega \sqrt{\lambda_1} u_{12} & \omega \sqrt{\lambda_2} u_{13} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_0} u_{21} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_1} u_{22} & \bar{\omega} \sqrt{\lambda_2} u_{23}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \\ v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

简记为 $\mathbf{A}\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 其中: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{U} & \boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{U} & \boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{U} \\ \mathbf{U} & \omega\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{U} & \bar{\omega}\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{U} \\ \mathbf{U} & \bar{\omega}\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{U} & \omega\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{U} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{W} \end{pmatrix}$; $\mathbf{W}=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_0} & & \\ & \sqrt{\lambda_1} & \\ & & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\sigma}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$\boldsymbol{\sigma}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}=(v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{31}, v_{32}, v_{33})^T$, T 表示矩阵转置. 因为 $|\mathbf{A}\mathbf{v}|=$

$\begin{vmatrix} \mathbf{U} & \boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{U} & \boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{U} \\ \mathbf{U} & \omega\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{U} & \bar{\omega}\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{U} \\ \mathbf{U} & \bar{\omega}\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{U} & \omega\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{U} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{W} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{U} & \boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{U} & \boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{U} \\ \mathbf{U} & \omega\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{U} & \bar{\omega}\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{U} \\ \mathbf{U} & \bar{\omega}\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{U} & \omega\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{U} \end{vmatrix} |\mathbf{W}|^3 \neq \mathbf{0}$, 所以 $\mathbf{A}\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 只有零解, 即 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 从而

有 $\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 同理, 由 $\langle \varphi_{nm}^1 | \psi \rangle = 0$, $n, m=0, 1, 2$, 可得 $\begin{pmatrix} v_{41} & v_{42} & v_{43} \\ v_{51} & v_{52} & v_{53} \\ v_{61} & v_{62} & v_{63} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 于是

$$|\mathbf{V}| = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} & v_{16} & v_{17} & v_{18} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_{25} & v_{26} & v_{27} & v_{28} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & v_{35} & v_{36} & v_{37} & v_{38} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & v_{45} & v_{46} & v_{47} & v_{48} \\ v_{51} & v_{52} & v_{53} & v_{54} & v_{55} & v_{56} & v_{57} & v_{58} \\ v_{61} & v_{62} & v_{63} & v_{64} & v_{65} & v_{66} & v_{67} & v_{68} \\ v_{71} & v_{72} & v_{73} & v_{74} & v_{75} & v_{76} & v_{77} & v_{78} \\ v_{81} & v_{82} & v_{83} & v_{84} & v_{85} & v_{86} & v_{87} & v_{88} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & v_{14} & v_{15} & v_{16} & v_{17} & v_{18} \\ 0 & 0 & 0 & v_{24} & v_{25} & v_{26} & v_{27} & v_{28} \\ 0 & 0 & 0 & v_{34} & v_{35} & v_{36} & v_{37} & v_{38} \\ 0 & 0 & 0 & v_{44} & v_{45} & v_{46} & v_{47} & v_{48} \\ 0 & 0 & 0 & v_{54} & v_{55} & v_{56} & v_{57} & v_{58} \\ 0 & 0 & 0 & v_{64} & v_{65} & v_{66} & v_{67} & v_{68} \\ v_{71} & v_{72} & v_{73} & v_{74} & v_{75} & v_{76} & v_{77} & v_{78} \\ v_{81} & v_{82} & v_{83} & v_{84} & v_{85} & v_{86} & v_{87} & v_{88} \end{vmatrix} = 0,$$

故 \mathbf{V} 不可能是酉矩阵,与假设矛盾,所以 $|\psi\rangle$ 一定不是最大纠缠态. 综上所述,(1) 式是 $C^3 \otimes C^8$ 的一组不完备的 18 元 UMEB.

2 用 $C^3 \otimes C^8$ 的 UMEBS 构造 MUBS

在(1) 式中加入 6 个直积态:

$$\begin{cases} |\varphi'_{30}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0(6+t)'\rangle + |1(6+t)'\rangle + |2(6+t)'\rangle), \\ |\varphi'_{31}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0(6+t)'\rangle + \omega |1(6+t)'\rangle + \bar{\omega} |2(6+t)'\rangle), \\ |\varphi'_{32}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0(6+t)'\rangle + \bar{\omega} |1(6+t)'\rangle + \omega |2(6+t)'\rangle), \quad t=0,1, \end{cases}$$

即得 $C^3 \otimes C^8$ 的一组完备的 UMEB:

$$\begin{cases} |\varphi'_{nm}\rangle = (U_{nm} \otimes I_8) |\varphi'\rangle, \quad n,m=0,1,2, \\ |\varphi'_{30}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0(6+t)'\rangle + |1(6+t)'\rangle + |2(6+t)'\rangle), \\ |\varphi'_{31}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0(6+t)'\rangle + \omega |1(6+t)'\rangle + \bar{\omega} |2(6+t)'\rangle), \\ |\varphi'_{32}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0(6+t)'\rangle + \bar{\omega} |1(6+t)'\rangle + \omega |2(6+t)'\rangle), \quad t=0,1, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $|\varphi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{p=0}^2 |p\rangle | (p+3t)'\rangle, t=0,1, \zeta_3 = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}, k \oplus m$ 表示 $k+m$ 除以 3 的余数.

现构造 C^8 的一个标准正交基,用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix} |\epsilon'_0\rangle \\ |\epsilon'_1\rangle \\ |\epsilon'_2\rangle \\ |\epsilon'_3\rangle \\ |\epsilon'_4\rangle \\ |\epsilon'_5\rangle \\ |\epsilon'_6\rangle \\ |\epsilon'_7\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & -\omega & \omega & 1 & -\omega & \omega & \omega & \omega \\ \bar{\omega} & \bar{\omega} & -1 & \bar{\omega} & \bar{\omega} & -1 & \bar{\omega} & \bar{\omega} \\ -\omega & \omega & \bar{\omega} & -\omega & \omega & \bar{\omega} & \omega & \omega \\ 1 & -\omega & \omega & -1 & \omega & -\omega & \omega & -\omega \\ \bar{\omega} & \bar{\omega} & -1 & -\bar{\omega} & -\bar{\omega} & 1 & \bar{\omega} & -\bar{\omega} \\ -\omega & \omega & \bar{\omega} & \omega & -\omega & -\bar{\omega} & \omega & -\omega \\ \bar{\omega} & 1 & 1 & \bar{\omega} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \bar{\omega} & 1 & 1 & -\bar{\omega} & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0'\rangle \\ |1'\rangle \\ |2'\rangle \\ |3'\rangle \\ |4'\rangle \\ |5'\rangle \\ |6'\rangle \\ |7'\rangle \end{pmatrix},$$

由此基出发,重复使用上述方法可得 $C^3 \otimes C^8$ 的另一组完备的 UMEB:

$$\begin{cases} |\psi'_{nm}\rangle = (U_{nm} \otimes I_8) |\psi'\rangle, \quad n,m=0,1,2, \\ |\psi'_{30}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\epsilon'_{6+t}\rangle + \omega |1\epsilon'_{6+t}\rangle + \omega |2\epsilon'_{6+t}\rangle), \\ |\psi'_{31}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\omega |0\epsilon'_{6+t}\rangle + |1\epsilon'_{6+t}\rangle + \omega |2\epsilon'_{6+t}\rangle), \\ |\psi'_{32}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\omega |0\epsilon'_{6+t}\rangle + \omega |1\epsilon'_{6+t}\rangle + |2\epsilon'_{6+t}\rangle), \quad t=1,2, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $|\varphi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{p=0}^2 |p\rangle |\epsilon'_{p+3t}\rangle$, $t=0,1$, $U_{nm} = \sum_{k=0}^2 \zeta_3^{nk} |k \oplus m\rangle \langle k|$, $n, m=0,1,2$, $\zeta_3 = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$, $k \oplus m$

表示 $k+m$ 除以 3 的余数. 事实上(2) 式与(3) 式是无偏的, 可从这两组 UMEB 中分别任取一个态做内积, 例如:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{00}^0 | \psi_{20}^1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\langle 00' | + \langle 11' | + \langle 22' |) \frac{1}{\sqrt{3}} (| 0\epsilon'_3 \rangle + \bar{\omega} | 1\epsilon'_4 \rangle + \omega | 2\epsilon'_5 \rangle) = \\ &= \frac{1}{3} (\langle 0' | \epsilon'_3 \rangle + \bar{\omega} \langle 1' | \epsilon'_4 \rangle + \omega \langle 2' | \epsilon'_5 \rangle) = \frac{1}{\sqrt{24}} \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \\ \langle \varphi_{01}^0 | \psi_{00}^0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\langle 10' | + \langle 21' | + \langle 02' |) \frac{1}{\sqrt{3}} (| 0\epsilon'_0 \rangle + | 1\epsilon'_1 \rangle + | 2\epsilon'_2 \rangle) = \\ &= \frac{1}{3} (\langle 0' | \epsilon'_1 \rangle + \langle 1' | \epsilon'_2 \rangle + \langle 2' | \epsilon'_0 \rangle) = \frac{1}{\sqrt{24}} \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \\ \langle \varphi_{02}^0 | \psi_{10}^1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\langle 20' | + \langle 01' | + \langle 12' |) \frac{1}{\sqrt{3}} (| 0\epsilon'_3 \rangle + \omega | 1\epsilon'_4 \rangle + \bar{\omega} | 2\epsilon'_5 \rangle) = \\ &= \frac{1}{3} (\bar{\omega} \langle 0' | \epsilon'_5 \rangle + \langle 1' | \epsilon'_3 \rangle + \omega \langle 2' | \epsilon'_4 \rangle) = \frac{-i}{\sqrt{24}}, \\ \langle \varphi_{12}^0 | \psi_{12}^0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\langle 20' | + \bar{\omega} \langle 01' | + \omega \langle 12' |) \frac{1}{\sqrt{3}} (| 2\epsilon'_0 \rangle + \omega | 0\epsilon'_1 \rangle + \bar{\omega} | 1\epsilon'_2 \rangle) = \\ &= \frac{1}{3} (\langle 0' | \epsilon'_0 \rangle + \bar{\omega} \omega \langle 1' | \epsilon'_1 \rangle + \omega \bar{\omega} \langle 2' | \epsilon'_2 \rangle) = \frac{-i}{\sqrt{24}}, \end{aligned}$$

分别取模得 $|\langle \varphi_{00}^0 | \psi_{20}^1 \rangle| = |\langle \varphi_{01}^0 | \psi_{00}^0 \rangle| = |\langle \varphi_{02}^0 | \psi_{10}^1 \rangle| = |\langle \varphi_{12}^0 | \psi_{12}^0 \rangle| = \frac{1}{\sqrt{24}}$. 总之, 通过计算可得

$$|\langle \varphi'_{nm} | \psi'_{n'm'} \rangle| = \frac{1}{\sqrt{24}}, \quad n, n', = 0, 1, 2, 3, \quad m, m' = 0, 1, 2, \quad t, t' = 0, 1,$$

故两个完备的 UMEBS(2) 和(3) 是 MUBS.

参考文献:

- [1] Bennett C H, Divincenzo D P, Mor P W, et al. Unextendible product bases and bound entanglement[J]. Phys Rev Lett, 1999, 82(26):5385(4).
- [2] CHEN Bin, FEI Shaoming. Unextendible maximally entangled bases and mutually unbiased bases[J]. Phys Rev A, 2013, 88(3):034301(4).
- [3] Bravyi S, Smolin J A. Unextendible maximally entangled bases[J]. Phys Rev A, 2011, 84(4):042306(3).
- [4] Wootters W K, Fields B D. Optimal state-determination by mutually unbiased measurements[J]. Ann Phys (NY), 1989, 191:363-381.
- [5] Adamson R B A, Steinberg A M. Improving quantum state estimation with mutually unbiased bases[J]. Phys Rev Lett, 2010, 105(3):030406(4).
- [6] Fernández-Pérez A, Klimov A B, Saavedra C. Quantum process reconstruction based on mutually unbiased basis [J]. Phys Rev A, 2011, 83(5):052332(6).
- [7] Cerf N J, Bourennane M, Karlsson A, et al. Security of quantum key distribution using d -level systems[J]. Phys Rev Lett, 2002, 88(12):127902(4).
- [8] YU I C, Lin F L, Huang C Y. Quantum secret sharing with multilevel mutually (un)biased bases[J]. Phys Rev A, 2008, 78(1):012344(5).
- [9] Brierley S, Weigert S. Maximal sets of mutually unbiased quantum state in dimension 6[J]. Phys Rev A, 2008, 78(4):042312(8).