

文章编号: 1004-4353(2014)03-0211-04

锥壳中严格集压缩映射的若干新不动点定理

陈树佳, 许绍元

(韩山师范学院 数学与统计学系, 广东 潮州 521041)

摘要: 利用锥壳中严格集压缩映射的 Leray-Schauder 不动点定理, 在适当的边界条件下, 得到了锥壳中严格集压缩映射的若干新不动点定理, 改进了文献[4]中的一些结果.

关键词: 锥壳; 严格集压缩映射; 不动点; Banach 空间

中图分类号: O177.91 文献标识码: A

New fixed point theorems for k -set contractions ($k < 1$) in conical shells

CHEN Shujia, XU Shaoyuan

(Department of Mathematics, Hanshan Normal University, Chaozhou 521041, China)

Abstract: Based on a basic result on k -set contractions ($k < 1$) in conical shells, that is, the so-called Leray-Schauder fixed point theorem, some new fixed point theorems for k -set contractions ($k < 1$) in conical shells are obtained under appropriate conditions, which improve a number of recent results in [4].

Key words: conical shell; k -set contraction ($k < 1$); fixed point; Banach space

锥壳中严格集压缩映射是一类十分重要的非线性算子, 广泛存在于非线性微分方程之中, 其中严格集压缩映射不动点定理在研究非线性微分方程解的存在性方面具有十分重要的作用^[1-3]. 近年来, 人们在锥壳中严格集压缩映射的研究方面已取得了一些成果, 如: 文献[4]利用锥壳中严格集压缩映射的一个基本不动点定理, 在适当的边界条件下得到了锥壳中严格集压缩映射的新不动点定理; 文献[5-10]得到了锥壳中严格集压缩映射的 Altman 定理、Roth 定理和 Petryshyn 定理及其各种推广形式. 本文利用锥壳中严格集压缩映射的 Leray-Schauder 不动点定理, 在适当的边界条件下, 得到了锥壳中严格集压缩映射的新不动点定理, 进一步改进了文献[4]中的一些结果.

设 E 是实 Banach 空间, $D \subset E$, $A : D \rightarrow E$ 是连续算子. 称 $A : D \rightarrow E$ 是 k -集压缩映射, 如果存在常数 $k \geq 0$, 使得对任何有界集 $S \subset D$, 都有 $\alpha(A(S)) \leq k\alpha(S)$, 其中 $\alpha(S)$ 表示 Kuratowski 非紧性测度, $\alpha(S) = \inf \{ \delta > 0 \mid S \text{ 是有限个直径小于等于 } \delta \text{ 的集合之并} \}$.

定义 1^[1] 映射 $A : D \rightarrow E$ 称为严格集压缩映射, 如果存在常数 $0 \leq k < 1$, 使得 $A : D \rightarrow E$ 为 k -集压缩映射.

1 主要结果

首先给出凸壳中严格集压缩映射的一个基本不动点定理. 设 E 是 Banach 空间, $C \subset E$ 为 E 的一个

收稿日期: 2014-07-15 基金项目: 韩山师范学院理科团队项目(LT201202)

作者简介: 陈树佳(1992—), 女, 在读研究生, 研究方向为非线性分析与分形几何研究;
许绍元(1964—), 男, 教授, 研究方向为非线性分析与分形几何研究.

闭凸子集且满足条件: 对任意 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 以及 $u, v \in C$ 有 $\alpha u + \beta v \in C$. 设 $\rho > 0$, 记

$$B_\rho = \{x: x \in C, \|x\| < \rho\},$$

$$S_\rho = \{x: x \in C, \|x\| = \rho\}.$$

引理 1^[1] (Leray-Schauder) 设 E 和 C 同上, r, R 为常数且满足 $0 < r < R$. 设 $A: \overline{B_R} \rightarrow C$ 为连续的严格集压缩映射且存在向量 $w \in C \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq Ax + \delta w, \forall x \in S_r, \forall \delta > 0$ 成立. 若以下条件:

$$x \neq \lambda Ax, \forall x \in S_R, \forall 0 < \lambda < 1 \tag{1}$$

成立, 则 A 在 $\overline{\Omega} = \{x: x \in C, r \leq \|x\| \leq R\}$ 上至少有一个不动点.

由引理 1 可以得到凸壳中严格集压缩映射的若干新不动点定理.

定理 1 设 E, C, r, R 同上. 设 $A: \overline{B_R} \rightarrow C$ 为连续的严格集压缩映射且存在向量 $w \in C \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq Ax + \delta w, \forall x \in S_r, \forall \delta > 0$ 成立. 若存在 $1 \leq \alpha \leq \beta$ 使得

$$\|Ax - x\|^\alpha \|x\|^\beta \geq \|Ax\|^\alpha \|Ax + x\|^\beta - \|Ax\|^\alpha \|x\|^\beta, \forall x \in S_R, \tag{2}$$

则 A 在 $\overline{\Omega} = \{x: x \in C, r \leq \|x\| \leq R\}$ 上至少有一个不动点.

证明 若算子 A 在 S_R 上没有不动点, 下证 A 满足引理 1 中条件(1). 用反证法. 若不然, 则存在 $x_0 \in S_R$ 以及 $\mu_0 \geq 1$ 使得 $Ax_0 = \mu_0 x_0$. 容易看出 $\mu_0 > 1$. 考察函数

$$f(t) = (t-1)^\alpha - t^\alpha (t+1)^\beta + t^\alpha, \forall t \geq 1,$$

由于 $f'(t) = \alpha(t-1)^{\alpha-1} - \alpha t^{\alpha-1} (t+1)^\beta + \alpha t^{\alpha-1} - \beta t^\alpha (t+1)^{\beta-1} \leq (<) 0, f(t)$ 在 $[1, \infty)$ 上严格单调递减, 又当 $t > 1$ 时有 $f(t) < f(1) = 1 - 2^\beta < 0$, 即 $(t-1)^\alpha < t^\alpha (t+1)^\beta - t^\alpha$ 对任意 $t > 1$ 成立. 注意 $\|x_0\| \neq 0, \mu_0 > 1$, 于是有

$$\begin{aligned} \|Ax_0 - x_0\|^\alpha \|x_0\|^\beta &= \|\mu_0 x_0 - x_0\|^\alpha \|x_0\|^\beta = (\mu_0 - 1)^\alpha \|x_0\|^{\alpha+\beta} < \\ [\mu_0^\alpha (\mu_0 + 1)^\beta - \mu_0^\alpha] \|x_0\|^{\alpha+\beta} &= \|Ax_0\|^\alpha \|Ax_0 + x_0\|^\beta - \|Ax_0\|^\alpha \|x_0\|^\beta, \end{aligned}$$

这与(2)式矛盾, 故由引理 1 可知定理 1 结论成立, 证毕.

在定理 1 的条件中, 若分别取 $\alpha = 1, \beta = 1$ 以及 $\alpha = 1$, 即可以得到以下的两个推论.

推论 1 设 E, C, r, R 同上. 设 $A: \overline{B_R} \rightarrow C$ 为连续的严格集压缩映射且存在向量 $w \in C \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq Ax + \delta w, \forall x \in S_r, \forall \delta > 0$ 成立. 若满足

$$\|Ax - x\| \|x\| \geq \|Ax\| \|Ax + x\| - \|Ax\| \|x\|, \forall x \in S_R,$$

则 A 在 $\overline{\Omega} = \{x: x \in C, r \leq \|x\| \leq R\}$ 上至少有一个不动点.

推论 2 设 E, C, r, R 同上. 设 $A: \overline{B_R} \rightarrow C$ 为连续的严格集压缩映射且存在向量 $w \in C \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq Ax + \delta w, \forall x \in S_r, \forall \delta > 0$ 成立. 若存在 $\beta \geq 1$, 使得

$$\|Ax - x\| \|x\|^\beta \geq \|Ax\| \|Ax + x\|^\beta - \|Ax\| \|x\|^\beta, \forall x \in S_R,$$

则 A 在 $\overline{\Omega} = \{x: x \in C, r \leq \|x\| \leq R\}$ 上至少有一个不动点.

注 1 显然, 文献[4]中推论 11(viii)式 $\|Ax - x\| \|x\| \geq \|Ax\| \|Ax + x\|, \forall x \in S_R$ 蕴含本文推论 1 的条件: $\|Ax - x\| \|x\| \geq \|Ax\| \|Ax + x\| - \|Ax\| \|x\|, \forall x \in S_R$. 这说明本文推论 1 推广了文献[4]中的相关结果, 而推论 2 是推论 1 的进一步推广, 故推论 2 是文献[4]的相关结果的有益补充.

定理 2 设 E, C, r, R 同上. 设 $A: \overline{B_R} \rightarrow C$ 为连续的严格集压缩映射且存在向量 $w \in C \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq Ax + \delta w, \forall x \in S_r, \forall \delta > 0$ 成立. 若存在 $\alpha > 1, \beta \geq 0$, 使得

$$\|Ax + x\|^{\alpha+\beta} \leq \|Ax\|^\beta \|Ax - x\|^\alpha + \|x\|^{\alpha+\beta}, \forall x \in S_R, \tag{3}$$

则 A 在 $\overline{\Omega} = \{x: x \in C, r \leq \|x\| \leq R\}$ 上至少有一个不动点.

证明 若算子 A 在 S_R 上没有不动点, 下证 A 满足引理 1 中条件(1). 用反证法. 若不然, 则存在 $x_0 \in S_R$ 以及 $\mu_0 \geq 1$, 使得 $Ax_0 = \mu_0 x_0$. 容易看出 $\mu_0 > 1$. 考察函数

$$f(t) = (t+1)^{\alpha+\beta} - t^\beta (t-1)^\alpha - 1, \forall t \geq 1.$$

由于 $f'(t) = \alpha[(t+1)^{\alpha+\beta-1} - t^\beta (t-1)^{\alpha-1}] + \beta[(t+1)^{\alpha+\beta-1} - t^{\beta-1} (t-1)^\alpha] > 0$, $f(t)$ 在 $[1, \infty)$ 上严格单调递增, 又当 $t > 1$ 时有 $f(t) > f(1)$, 即 $(t+1)^{\alpha+\beta} > t^\beta (t-1)^\alpha + 1$ 对任意 $t > 1$ 成立. 注意到 $\|x_0\| \neq 0$, $\mu_0 > 1$, 于是有

$$\begin{aligned} \|Ax_0 + x_0\|^{\alpha+\beta} &= \|\mu_0 x_0 + x_0\|^{\alpha+\beta} = (\mu_0 + 1)^{\alpha+\beta} \|x_0\|^{\alpha+\beta} > [\mu_0^\beta (\mu_0 - 1)^\alpha + 1] \|x_0\|^{\alpha+\beta} = \\ &= \|\mu_0 x_0\|^\beta \|\mu_0 x_0 - x_0\|^\alpha + \|x_0\|^{\alpha+\beta} = \|Ax_0\|^\beta \|Ax_0 - x_0\|^\alpha + \|x_0\|^{\alpha+\beta}, \end{aligned}$$

此与(3)式矛盾, 故由引理 1 可知定理 1 结论成立, 证毕.

在定理 2 的条件中若分别取 $\beta=0; \alpha=2, \beta=0$ 以及 $\alpha=\frac{3}{2}, \beta=\frac{1}{2}$, 则可得以下 3 个推论.

推论 3 设 E, C, r, R 同上. 设 $A: \overline{B_R} \rightarrow C$ 为连续的严格集压缩映射且存在向量 $w \in C \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq Ax + \delta w, \forall x \in S_r, \forall \delta > 0$ 成立. 若满足

$$\|Ax + x\|^2 \leq \|Ax - x\|^2 + \|x\|^2, \forall x \in S_R,$$

则 A 在 $\overline{\Omega} = \{x: x \in C, r \leq \|x\| \leq R\}$ 上至少有一个不动点.

推论 4 设 E, C, r, R 同上. 设 $A: \overline{B_R} \rightarrow C$ 为连续的严格集压缩映射且存在向量 $w \in C \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq Ax + \delta w, \forall x \in S_r, \forall \delta > 0$ 成立. 若存在 $\alpha > 1$, 使得

$$\|Ax + x\|^\alpha \leq \|Ax - x\|^\alpha + \|x\|^\alpha, \forall x \in S_R,$$

则 A 在 $\overline{\Omega} = \{x: x \in C, r \leq \|x\| \leq R\}$ 上至少有一个不动点.

注 2 推论 3 类似于著名的 Altman 定理. 因此, 推论 3 是 Altman 定理的有益补充. 由于推论 4 是推论 3 的进一步推广, 因而推论 4 是 Altman 定理的进一步补充.

推论 5 设 E, C, r, R 同上. 设 $A: \overline{B_R} \rightarrow C$ 为连续的严格集压缩映射且存在向量 $w \in C \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq Ax + \delta w, \forall x \in S_r, \forall \delta > 0$ 成立. 若满足

$$\|Ax + x\|^2 \leq \sqrt{\|Ax\| \|Ax - x\|^3} + \|x\|^2, \forall x \in S_R,$$

则 A 在 $\overline{\Omega} = \{x: x \in C, r \leq \|x\| \leq R\}$ 上至少有一个不动点.

定理 3 设 E, C, r, R 同上. 设 $A: \overline{B_R} \rightarrow C$ 为连续的严格集压缩映射且存在向量 $w \in C \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq Ax + \delta w, \forall x \in S_r, \forall \delta > 0$ 成立. 若存在 $\alpha \geq 1, \beta \geq 0$, 使得

$$\|Ax\|^\alpha \|Ax + x\|^\beta \leq \|Ax\|^\beta \|Ax - x\|^\alpha, \forall x \in S_R, \quad (4)$$

则 A 在 $\overline{\Omega} = \{x: x \in C, r \leq \|x\| \leq R\}$ 上至少有一个不动点.

证明 若算子 A 在 S_R 上没有不动点, 下证 A 满足引理 1 中条件(1). 用反证法. 若不然, 则存在 $x_0 \in S_R$ 以及 $\mu_0 \geq 1$ 使得 $Ax_0 = \mu_0 x_0$. 容易看出 $\mu_0 > 1$. 考察函数

$$f(t) = t^\alpha (t+1)^\beta - t^\beta (t-1)^\alpha.$$

由于 $f'(t) = \alpha[t^{\alpha-1} (t+1)^\beta - (t-1)^{\alpha-1} t^\beta] + \beta[t^\alpha (t+1)^{\beta-1} - t^{\beta-1} (t-1)^\alpha] > 0$, $f(t)$ 在 $[1, \infty)$ 上严格单调递增, 又当 $t > 1$ 时有 $f(t) > f(1) = 2^\beta > 0$, 即 $t^\alpha (t+1)^\beta > t^\beta (t-1)^\alpha$ 对任意 $t > 1$ 成立. 注意到 $\|x_0\| \neq 0, \mu_0 > 1$, 于是有

$$\begin{aligned} \|Ax_0\|^\alpha \|Ax_0 + x_0\|^\beta &= \|\mu_0 x_0\|^\alpha \|\mu_0 x_0 + x_0\|^\beta = \mu_0^\alpha (\mu_0 + 1)^\beta \|x_0\|^{\alpha+\beta} > \\ &= \mu_0^\beta (\mu_0 - 1)^\alpha \|x_0\|^{\alpha+\beta} = \|\mu_0 x_0\|^\beta \|\mu_0 x_0 - x_0\|^\alpha = \|Ax_0\|^\beta \|Ax_0 - x_0\|^\alpha, \end{aligned}$$

此与(4)式矛盾, 故由引理 1 可知定理 3 成立, 证毕.

在定理 3 的条件中若分别取 $\alpha=1, \beta=0$, 则有如下推论.

推论 6 设 E, C, r, R 同上. 设 $A: \overline{B_R} \rightarrow C$ 为连续的严格集压缩映射且存在向量 $w \in C \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq Ax + \delta w, \forall x \in S_r, \forall \delta > 0$ 成立. 若满足

$$\|Ax\| \leq \|Ax - x\|, \forall x \in S_R,$$

则 A 在 $\bar{\Omega} = \{x: x \in C, r \leq \|x\| \leq R\}$ 上至少有一个不动点.

注 3 推论 6 即著名的 Petryshyn 定理^[4], 因此本文定理 3 是对 Petryshyn 定理的进一步推广.

定理 4 设 E, C, r, R 同上. 设 $A: \bar{B}_R \rightarrow C$ 为连续的严格集压缩映射且存在向量 $w \in C \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq Ax + \delta w, \forall x \in S_r, \forall \delta > 0$ 成立. 若存在 $\alpha \geq 1, \beta \geq 0$, 使得

$$\|Ax - x\|^\alpha \|x\|^{\alpha+\beta} \geq \|Ax\|^\alpha \|Ax + x\|^{\alpha+\beta} - \|x\|^{2\alpha+\beta}, \forall x \in S_R, \quad (5)$$

则 A 在 $\bar{\Omega} = \{x: x \in C, r \leq \|x\| \leq R\}$ 上至少有一个不动点.

证明 若算子 A 在 S_R 上没有不动点, 下面证明 A 满足引理 1 中条件(1). 用反证法. 若不然, 则存在 $x_0 \in S_R$ 以及 $\mu_0 \geq 1$, 使得 $Ax_0 = \mu_0 x_0$. 容易看出 $\mu_0 > 1$. 考察函数

$$f(t) = (t-1)^\alpha - t^\alpha (t+1)^{\alpha+\beta} + 1.$$

由于 $f'(t) = \alpha[(t-1)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}(t+1)^{\alpha+\beta} - t^\alpha(t+1)^{\alpha+\beta-1}] - \beta[t^\alpha(t+1)^{\alpha+\beta-1}] < 0$, $f(t)$ 在 $[1, \infty)$ 上严格单调递减, 又当 $t > 1$ 时有 $f(t) < f(1) = 1 - 2^{\alpha+\beta} < 0$, 即 $(t-1)^\alpha < t^\alpha(t+1)^{\alpha+\beta} - 1$ 对任意 $t > 1$ 成立. 注意到 $\|x_0\| \neq 0, \mu_0 > 1$, 于是有

$$\begin{aligned} \|Ax_0 - x_0\|^\alpha \|x_0\|^{\alpha+\beta} &= \|x_0\|^{\alpha+\beta} \|\mu_0 x_0 - x_0\|^\alpha = (\mu_0 - 1)^\alpha \|x_0\|^{2\alpha+\beta} < \\ &[\mu_0^\alpha (\mu_0 + 1)^{\alpha+\beta} - 1] \|x_0\|^{2\alpha+\beta} = \|u_0 x_0\|^\alpha \|\mu_0 x_0 + x_0\|^{\alpha+\beta} - \|x_0\|^{\alpha+\beta} = \\ &\|Ax_0\|^\alpha \|Ax_0 + x_0\|^{\alpha+\beta} - \|x_0\|^{2\alpha+\beta}, \end{aligned}$$

这与(5)式矛盾, 故由引理 1 可知定理 4 成立, 证毕.

在定理 4 的条件中, 若取 $\beta = 0$, 则可得到如下推论.

推论 7 设 E, C, r, R 同上. 设 $A: \bar{B}_R \rightarrow C$ 为连续的严格集压缩映射且存在向量 $w \in C \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq Ax + \delta w, \forall x \in S_r, \forall \delta > 0$ 成立. 若存在 $\alpha \geq 1$, 使得

$$\|Ax - x\|^\alpha \|x\|^\alpha \geq \|Ax\|^\alpha \|Ax + x\|^\alpha - \|x\|^{2\alpha}, \forall x \in S_R,$$

则 A 在 $\bar{\Omega} = \{x: x \in C, r \leq \|x\| \leq R\}$ 上至少有一个不动点.

参考文献:

- [1] Agarwal R P, Meehan M, O' Regan D. Fixed Point Theory and Application[M]. Cambridge: Cambridge University Press and Beijing World Publishing Corporation, 2001.
- [2] Agarwal R P, O' Regan D. A note on the existence of multiple fixed point for multivalued maps with applications[J]. J Diff Eqns, 2000, 160: 389-403.
- [3] Simon A, Volkman P. Existence of ground states with exponential decay for semi-linear elliptic equations in R^n [J]. J Diff Eqns, 1988, 76: 374-390.
- [4] 许绍元, 谢显华. 锥壳中严格集压缩映射的新不动点定理[J]. 信阳师范学院学报: 自然科学版, 2011, 24(4): 440-443.
- [5] 许绍元. Altman 定理的推广与改进[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 1995, 19(2): 149-152.
- [6] 许绍元. Banach 空间中压缩映射的新不动点定理[J]. 赣南师范学院学报, 2007, 28(6): 1-4.
- [7] 郭大钧, 孙经先. 拓扑度的计算及其应用[J]. 数学研究与评论, 1988, 8(3): 469-480.
- [8] 陈继乾. P_1 -紧与半紧 1-集压缩映射的 Altman 定理[J]. 工程数学学报, 1994, 11(2): 118-122.
- [9] 许绍元. P_1 -紧映象的 Altman 定理的一个推广[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 1996, 20(1): 89-91.
- [10] 贾庆菊. Altman 定理的一个注记[J]. 山西大学学报: 自然科学版, 1994, 17(3): 266-268.