

文章编号: 1004-4353(2014)03-0207-04

带干扰的相依双险种再保险模型的破产概率

蒋兰青

(闽江师范高等专科学校, 福建 福州 350108)

摘要: 研究了一类带干扰的理赔相依双险种再保险模型, 其中两险种分别采取成数再保险和超额损失再保险, 在期望保费计算原理下, 得到了改进模型的 Lundberg 不等式与最终破产概率的上界.

关键词: 相依风险; 成数再保险; 超额损失再保险; 干扰; 破产概率

中图分类号: O29 **文献标识码:** A

The ruin probability of double insurance risk model with interference and dependence

JIANG Lanqing

(Minjiang Teachers College, Fuzhou 350108, China)

Abstract: We consider a double-reinsurances risk model with interference and dependence, where one claim with quota-share reinsurance and the other with excess of loss reinsurance, under the expected value premium principles, we get the last probability of ruin and Lundberg upper bound.

Key words: dependent risks; quota-share reinsurance; excess of loss reinsurance; interference; ruin probability

对单一的成数或超额赔款再保险模型的破产概率的研究已取得很多成果, 然而随着人们保险意识的增强和保险业的不断发展, 险种逐渐呈现多元化, 且同一险种引起的索赔也可能不再是单一的. 文献[1]研究了一类理赔具有某种相依关系的超额赔款再保险; 文献[2]建立了成数与超额赔款混合双险种风险模型, 得到了两险种的最优自留水平. 本文在文献[2]给出的模型基础上, 将文献[1]中的相依关系引入该模型中, 建立了一类更为一般的再保险模型, 在按期望值原理计算保费下, 得到了改进模型的 Lundberg 不等式和最终破产概率.

1 预备知识与模型建立

定义 1^[3] 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的齐次 Poisson 过程, 如果:

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) 过程有独立增量;
- (3) 对任意的 $s, t \geq 0$, $P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

定理 1^[4] (齐次 Poisson 过程的可加性) 设 $M = \{M_t, t \geq 0\}$ 和 $N = \{N_t, t \geq 0\}$ 是强度分别为 λ_1 和 λ_2 的齐次 Poisson 过程, 并且两个过程相互独立. 对于每一个 $\omega \in \Omega$ 和任意的 $t \geq 0$, 令

$$K_t(\omega) = M_t(\omega) + N_t(\omega),$$

则上式定义的过程 $K = \{K_t, t \geq 0\}$ 称为过程 $M = \{M_t, t \geq 0\}$ 和 $N = \{N_t, t \geq 0\}$ 的叠加, 且为服从强度为 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 的齐次 Poisson 过程.

定义 2^[3] 称随机过程 $\{S(t), t \geq 0\}$ 为复合 Poisson 过程, 如果对于 $t \geq 0$, $S(t)$ 可以表示为 $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, 其中 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个 Poisson 过程, $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 并且与 $\{N(t), t \geq 0\}$ 相互独立.

定理 2^[4] 设 $\{S(t), t \geq 0\}$ 是一个复合 Poisson 过程, Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的强度为 λ , 则:

- (1) $S(t)$ 有独立增量;
- (2) 若 $E(X_i) < +\infty$, 则 $E(S(t)) = \lambda t E(X_1)$, $\text{Var}(S(t)) = \lambda t E(X_1^2)$.

下面将讨论模型的建立过程. 定义完备概率空间 (Ω, F, P) , 本文考虑的所有随机变量都是定义在该概率空间上的. 首先建立如下的未考虑再保险的相依双险种风险模型, 盈余过程 $\{U(t), t \geq 0\}$ 满足:

$$U(t) = u + Pt - \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i - \sum_{j=1}^{N_2(t)} Y_j + \sigma W(t), \quad t \geq 0. \tag{1}$$

其中:

- (1) $u \geq 0$ 为保险公司的初始资金, P 为单位时间的保费率;
- (2) $\{X_i, i \geq 1\}$ 和 $\{Y_j, j \geq 1\}$ 是取值于 $[0, \infty)$ 上的非负独立同分布的随机变量序列, 分别表示险种 1 在第 i 次的理赔额和险种 2 在第 j 次的理赔额, 设其分布函数分别为 $F(x)$ 和 $G(y)$, 均值分别为 μ_1 和 μ_2 , 且对 $x \leq 0$ 和 $y \leq 0$ 分别有 $F(x) = 0, G(y) = 0$;
- (3) $N_1(t), N_2(t)$ 分别表示两类险种在 t 时间内的理赔次数, 且 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 之间相互独立. 显然可以找到相互独立的参数分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ 的 Poisson 分布 $K_1(t), K_2(t), K(t)$, 使得 $N_1(t) = K_1(t) + K(t), N_2(t) = K_2(t) + K(t)$ 成立. 这样两险种的各自理赔总额 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 便通过 $K(t)$ 联系起来. 由定理 1 易知 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 是分别服从强度为 $\lambda_1 + \lambda, \lambda_2 + \lambda$ 的齐次 Poisson 过程.
- (4) $\{W(t), t \geq 0\}$ 为标准维纳过程, 表示保险公司不确定的收益和支出, $\sigma > 0$ 为干扰因子, 且假设 $\{X_i, i \geq 1\}, \{Y_j, j \geq 1\}, \{N_1(t), t \geq 0\}, \{N_2(t), t \geq 0\}, \{W(t), t \geq 0\}$ 之间相互独立.

现假设保险公司对两类险种采取不同的再保险策略, 即对险种 1 的理赔选择自留比例为 a 的成数再保险, 对险种 2 的理赔选择自留额为 M 的超额赔款再保险, 则保险公司的盈余过程与盈利过程分别为:

$$U(t, a, M) = u + (P - P_a - P_M)t - \sum_{i=1}^{N_1(t)} aX_i - \sum_{j=1}^{N_2(t)} h(Y_j) + \sigma W(t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

$$S(t, a, M) = U(t, a, M) - u, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

其中 $h(Y_j) = \min\{Y_j, M\}$ 表示险种 2 在第 j 次的理赔额, P_a 和 P_M 分别为成数再保险和超额赔款再保险的单位时间再保费率. 假设原保险公司与再保险公司都是按期望值原理收取保费, 且原保险、成数再保险和超额赔款再保险的安全负载分别为 $\theta, \theta_1, \theta_2 (\theta \leq \theta_1, \theta \leq \theta_2)$, 则 $P = (1 + \theta)[(\lambda_1 + \lambda)\mu_1 + (\lambda_2 + \lambda)\mu_2]$, $P_a = (1 + \theta_1)(1 - a)(\lambda_1 + \lambda)\mu_1$, $P_M = (1 + \theta_2)(\lambda_2 + \lambda)E[(Y_j - M)_+]$.

定义 3 记 $T_{a,M} = \inf\{t \mid U(t, a, M) < 0\}$ 为保险公司的破产时刻, 若对所有 t 均有 $U(t, a, M) > 0$, 则 $T_{a,M} = \infty$; 记 $\phi(u, a, M) = P(T_{a,M} < \infty \mid U(0) = u), \forall u \geq 0$ 表示最终破产概率.

引理 1^[1] 盈利过程 $\{S(t, a, M), t \geq 0\}$ 是一个右连续的随机过程, 具有如下性质:

- (1) $E[S(t, a, M)] = [P - P_a - P_M - (\lambda_1 + \lambda)E(aX) - (\lambda_2 + \lambda)E(h(Y))]t > 0$;
- (2) 具有平稳独立增量性;
- (3) 存在正数 r , 使得 $E[e^{-rS(t, a, M)}] < +\infty$.

引理 2 对于盈利过程 $\{S(t, a, M), t \geq 0\}$, 存在函数 $g_{a,M}(r)$ 使得 $E[e^{-rS(t, a, M)}] = e^{tg_{a,M}(r)}$, 其中

$$g_{a,M}(r) = (P_a + P_M - P)r + (\lambda_1 + \lambda)(M_X(ar) - 1) + (\lambda_2 + \lambda)(M_{h(Y)}(r) - 1) + \lambda(M_X(ar) - 1)(M_{h(Y)}(r) - 1) + \frac{r^2\sigma^2}{2}, \quad (4)$$

上式中 $M_X(r)$, $M_{h(Y)}(r)$ 分别是 $X, h(Y)$ 的矩母函数.

证明 总的自留理赔额的矩母函数为

$$\begin{aligned} E\{\exp[r(\sum_{i=1}^{N_1(t)} aX_i + \sum_{j=1}^{N_2(t)} h(Y_j))]\} &= E\{E[\exp[r(\sum_{i=1}^{N_1(t)} aX_i + \sum_{j=1}^{N_2(t)} h(Y_j))] \mid N_1, N_2]\} = \\ E\{[M_X(ar)]^{N_1} [M_{h(Y)}(r)]^{N_2}\} &= E\{[M_X(ar)]^{K_1} [M_{h(Y)}(r)]^{K_2} [M_X(ar)M_{h(Y)}(r)]^K\} = \\ E[M_X(ar)]^{K_1} \cdot E[M_{h(Y)}(r)]^{K_2} \cdot E[M_X(ar)M_{h(Y)}(r)]^K &= \\ \exp\{t[(\lambda_1 + \lambda)(M_X(ar) - 1) + (\lambda_2 + \lambda)(M_{h(Y)}(r) - 1) + \lambda(M_X(ar) - 1)(M_{h(Y)}(r) - 1)]\}, \end{aligned}$$

于是得 $E[e^{-rS(t,a,M)}] = E\{\exp[r(P_a + P_M - P)t + r(\sum_{i=1}^{N_1(t)} aX_i + \sum_{j=1}^{N_2(t)} h(Y_j)) - r\sigma W(t)]\} = \exp\{t[(P_a + P_M - P)r + (\lambda_1 + \lambda)(M_X(ar) - 1) + (\lambda_2 + \lambda)(M_{h(Y)}(r) - 1) + \lambda(M_X(ar) - 1)(M_{h(Y)}(r) - 1) + \frac{r^2\sigma^2}{2}]\}$, 即证得 $g_{a,M}(r) = (P_a + P_M - P)r + (\lambda_1 + \lambda)(M_X(ar) - 1) + (\lambda_2 + \lambda)(M_{h(Y)}(r) - 1) + \lambda(M_X(ar) - 1)(M_{h(Y)}(r) - 1) + \frac{r^2\sigma^2}{2}$. 证毕.

令 $E[S(a, M)]$ 为再保险后, 保险人每单位时间的期望净利润, 即 $E[S(a, M)] = P - P_a - P_M - (\lambda_1 + \lambda)E(aX) - (\lambda_2 + \lambda)E(h(Y))$; 又令 $L = \{(a, M) : 0 \leq a \leq 1, M \geq 0 \text{ 且 } E[S(a, M)] > 0\}$.

引理 3 对任意的 $(a, M) \in L$, 方程 $g_{a,M}(r) = 0$ 在 $r > 0$ 内有唯一的正解 $R = R_{a,M}$, 并称此解为调节系数.

证明 由引理 2 知 $g_{a,M}(r) = (P_a + P_M - P)r + (\lambda_1 + \lambda)(M_X(ar) - 1) + (\lambda_2 + \lambda)(M_{h(Y)}(r) - 1) + \lambda(M_X(ar) - 1)(M_{h(Y)}(r) - 1) + \frac{r^2\sigma^2}{2}$, 当 $r = 0$ 时, $g_{a,M}(0) = 0$. 对任意 $r > 0$ 有

$$\begin{aligned} g'_{a,M}(r) &= (P_a + P_M - P) + (\lambda_1 + \lambda)E(aXe^{raX}) + (\lambda_2 + \lambda)E(h(Y)e^{rh(Y)}) + \\ &\quad \lambda E(aXe^{raX})(M_{h(Y)}(r) - 1) + \lambda E(h(Y)e^{rh(Y)})(M_X(ar) - 1) + r\sigma^2, \\ g'_{a,M}(0) &= (P_a + P_M - P) + (\lambda_1 + \lambda)E(aX) + (\lambda_2 + \lambda)E(h(Y)). \end{aligned}$$

由引理 1 知 $g'_{a,M}(0) < 0$, 且当 $r \rightarrow \infty$ 时, $g'_{a,M}(r) \rightarrow \infty$. 又显然有 $g''_{a,M}(r) > 0$, 因此 $g'_{a,M}(r)$ 为 $(0, \infty)$ 上的单调递增函数, 且 $g_{a,M}(r)$ 为 $(0, \infty)$ 上的一个下凸函数, 所以 $g_{a,M}(r) = 0$ 有唯一正根 R 记为 $R_{a,M}$. 证毕.

定义 4 对于盈利过程 $\{S(t, a, M), t \geq 0\}$, 定义事件流 $F_t^S = \sigma\{S(v, a, M), v \leq t\}$.

引理 4^[5] 破产时刻 $T_{a,M}$ 是 F_{t-}^S 停时.

引理 5 $\{M(t, a, M), F_t^S; t \geq 0\}$ 是鞅, 其中 $M(t, a, M) = \exp\{-R_{a,M}U(t, a, M)\}$, $R_{a,M}$ 为调节系数.

证明 由引理 1 易知 $\{U(t, a, M), t \geq 0\}$ 有独立平稳增量, 又由文献[5]知当 $\{U(t, a, M), t \geq 0\}$ 有独立平稳增量时, $M(t, a, M)$ 为鞅的充要条件是 $E[e^{-R_{a,M}U(t, a, M)}] = e^{-R_{a,M}t}$. 由引理 2 和引理 3 知, 存在函数 $g_{a,M}(r)$ 使得 $E[e^{-R_{a,M}S(t, a, M)}] = e^{tg_{a,M}(R_{a,M})} = 1$, 故有 $E[e^{-R_{a,M}U(t, a, M)}] = E[e^{-R_{a,M}t}]E[e^{-R_{a,M}S(t, a, M)}] = e^{-R_{a,M}t}$. 证毕.

2 Lundberg 不等式与最终破产概率

定理 3 对盈余过程 $\{U(t, a, M), t \geq 0\}$, 最终破产概率满足下面的 Lundberg 不等式

$$\psi(u, a, M) \leq e^{-R_{a,M}u}, \quad (5)$$

其中 $R_{a,M}$ 为调节系数.

证明 根据 Doob's 不等式^[6] 及引理 1—3 有

$$\begin{aligned} P\{ \sup_{0 \leq s \leq t} [(P_a + P_M - P)s + \sum_{i=1}^{N_1(s)} aX_i + \sum_{j=1}^{N_2(s)} h(Y_j) - \sigma W(s)] \geq u \} = \\ P\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \exp[(P_a + P_M - P)s + \sum_{i=1}^{N_1(s)} aX_i + \sum_{j=1}^{N_2(s)} h(Y_j) - \sigma W(s)] R_{a,M} \geq e^{R_{a,M} u} \} \leq \\ e^{-R_{a,M} u} \cdot E\{ \exp R_{a,M} [(P_a + P_M - P)t + \sum_{i=1}^{N_1(t)} aX_i + \sum_{j=1}^{N_2(t)} h(Y_j) - \sigma W(t)] \} = \\ e^{-R_{a,M} u} \cdot E[e^{-R_{a,M} S(t,a,M)}] = e^{-R_{a,M} u}. \end{aligned}$$

令 $t \rightarrow \infty$, 则有

$$\begin{aligned} \phi(u,a,M) &= P\{ \inf_{t \geq 0} U(t,a,M) \leq 0 \} = P\{ \sup_{t \geq 0} [-S(t,a,M)] \geq u \} = \\ &P\{ \sup_{t \geq 0} [(P_a + P_M - P)t + \sum_{i=1}^{N_1(t)} aX_i + \sum_{j=1}^{N_2(t)} h(Y_j) - \sigma W(t)] \geq u \} \leq e^{-R_{a,M} u}. \end{aligned}$$

证毕.

定理 4 对于本文建立的模型(1), 其最终破产概率为

$$\phi(u,a,M) = \frac{e^{-R_{a,M} u}}{E[e^{-R_{a,M} U(T_{a,M},a,M)} \mid T_{a,M} < \infty]}, \tag{6}$$

其中 $R_{a,M}$ 为调节系数.

证明 记 $t_0(a,M) =: t_0$, 对任意固定的时刻 $0 < t_0 < \infty$, $t_0 \wedge T$ 是 F_t^S 有界停时, 根据引理 5 及有界停时定理^[3] 知 $e^{-R_{a,M} u} = M(0) = E[M(t_0 \wedge T_{a,M})]$. 利用全期望公式得

$$\begin{aligned} e^{-R_{a,M} u} &= E[M(t_0 \wedge T_{a,M}) \mid T_{a,M} \leq t_0] P(T_{a,M} \leq t_0) + E[M(t_0 \wedge T_{a,M}) \mid T_{a,M} > t_0] P(T_{a,M} > t_0) = \\ &E[M(T_{a,M}) \mid T_{a,M} \leq t_0] P(T_{a,M} \leq t_0) + E[M(t_0) \mid T_{a,M} > t_0] P(T_{a,M} > t_0). \end{aligned} \tag{7}$$

对于(7)式的第 2 项 $E[M(t_0) \mid T_{a,M} > t_0] P(T_{a,M} > t_0) = E[e^{-R_{a,M} U(t_0,a,M)} \mid T_{a,M} > t_0] P(T_{a,M} > t_0)$, 若以 $I(A)$ 表示 A 的示性函数, 则有 $0 \leq E[e^{-R_{a,M} U(t_0,a,M)} \mid T_{a,M} > t_0] P(T_{a,M} > t_0) = E[e^{-R_{a,M} U(t_0,a,M)} I(T_{a,M} > t_0)] \leq E[e^{-R_{a,M} U(t_0,a,M)} I(U(t_0,a,M) > 0)]$. 由于 $0 \leq e^{-R_{a,M} U(t_0,a,M)} I(U(t_0,a,M) > 0) \leq 1$, 且由强大数定律可知 $\lim_{t_0 \rightarrow \infty} U(t_0,a,M) = +\infty$ a. s., 因此由控制收敛定理可得

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} E[e^{-R_{a,M} U(t_0,a,M)} \mid T_{a,M} > t_0] P(T_{a,M} > t_0) = 0 \text{ a. s. .}$$

于是当 $t_0 \rightarrow \infty$ 时, (7) 式转化为 $e^{-R_{a,M} u} = E[e^{-R_{a,M} U(T_{a,M},a,M)} \mid T_{a,M} < \infty] P(T_{a,M} < \infty)$, 即证得破产概率 $\phi(u,a,M) = \frac{e^{-R_{a,M} u}}{E[e^{-R_{a,M} U(T_{a,M},a,M)} \mid T_{a,M} < \infty]}$. 证毕.

由于对破产时刻 $T_{a,M}$ 有 $U(T_{a,M},a,M) < 0$, 于是 $e^{-R_{a,M} U(T_{a,M},a,M)} > 1$, 从而由(6)式得风险模型(1)的破产概率 $\phi(u,a,M) \leq e^{-R_{a,M} u}$, 亦可得定理 3 中(5)式的结果.

参考文献:

[1] CentenoM L. Dependent risks and excess of loss reinsurance[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005, 37:229-238.
[2] 蔡平霞. 双险种最优再保险策略[J]. 数学理论与应用, 2010, 30(2):101-104.
[3] Grandell J. Aspects of Risk Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
[4] 殷小琴. 复合泊松过程及其在保险风险中若干应用[J]. 数学理论与应用, 2009, 29(4):122-124.
[5] Gerber H U, Shiu E. On the time value of ruin[J]. North Amer Actuar J, 1998, 2:48-78.
[6] Øksendal B. Stochastic Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 2000.