文章编号： 1004-4353(2014)03-0199-04

一类抽象随机发展方程的随机吸引子

韩英豪， 张晴， 王宏全
(辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连 116029)

摘要： 在可分希尔伯特空间 H 上研究了抽象随机发展方程 $\mathrm{d}X_t = A(X_t)\mathrm{d}t - vX_t\mathrm{d}t + \sigma X_t\mathrm{d}N_t$ 的长时间动力行为，其中算子 A 满足标准单调性条件和强迫性条件，$\sigma > 0$，N_t 是标准实值 Wiener 过程. 利用近似逼近方法证明了上述方程的随机吸引子的存在性，此结果可应用于随机非线性反应扩散方程、随机 p-拉普拉斯方程和随机多孔介质方程等各类型的 SPDE 上.

关键词： 乘积噪声；随机吸引子；抽象随机抛物型方程
中图分类号： O211.63；O175.29　　**文献标识码：** A

Random attrators for a class of abstract stochastic evolution equations

HAN Yinghao， ZHANG Qing， WANG Hongquan
(*School of Mathematics*, *Liaoning Normal University*, *Dalian* 116029, *China*)

Abstract: We consider the longtime dynamic behavior of the abstract stochastic evolution equations $\mathrm{d}X_t = A(X_t)\mathrm{d}t - vX_t\mathrm{d}t + \sigma X_t\mathrm{d}N_t$ in a separable Hilbert space H, where A is an operator satisfying the standard monotonicity and coercivity conditions, $\sigma > 0$, N_t is a standard real valued Wiener process. The existence of random attractor for the above equations is proved by using the approximation scheme. The result can be applicable to the various types of SPDE, such as the stochastic nonlinear reaction-diffusion equations, the stochastic p-Laplace equations and the stochastic porous media equations.

Key words: multiplicative noise; random attractor; abstract stochastic parabolic type equation

1　预备知识

1997 年，H. Crauel 等在文献[1]中建立了随机偏微分方程吸引子理论的基本框架，并给出了在某些非线性偏微分方程中的应用. 之后，很多学者开始研究随机偏微分方程吸引子的存在性并取得了一些成果，然而这些结果仅适用于个别特殊的可加噪声或乘积噪声驱动的随机偏微分方程上，对于更一般的随机过程驱动的大多数非线性随机偏微分方程而言，吸引子存在性理论还有待进一步研究. B. Gess 等在文献[2]中证明了一些一般的可加噪声驱动的随机偏微分方程吸引子的存在性. 本文在文献[2]的基础上，证明了被乘积噪声驱动的抽象随机发展方程的随机吸引子的存在性.

对任意有限区间 $[s,T] \subseteq \mathbf{R}$，本文所研究的抽象随机发展方程具有如下形式：

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = A(X_t)\mathrm{d}t - vX_t\mathrm{d}t + \sigma X_t\mathrm{d}N_t,\ \forall\, t \in (s,T); \\ X_s = x \in H. \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期： 2014-05-20
作者简介： 韩英豪(1963—)，男，理学博士，副教授，研究方向为无穷维动力系统.

其中 H 是一个可分希尔伯特空间,其内积用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ 表示,H 的对偶空间用 H^* 来表示,在 Riesz 同构 $i: H\to H^*$ 下这两个空间可视为相同($H\equiv H^*$).同时,V 是一个自反巴拿赫空间,可连续、稠密地嵌入到 H 中:$V\subseteq H\equiv H^*\subseteq V^*$,其中 V^* 表示 V 的对偶空间,并用 ${}_{V^*}\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ 表示 V 与 V^* 之间的对偶运算. $A: V\to V^*$ 是满足下述条件的可测算子,即存在常数 $\alpha>1$ 和 $\delta,c_1,c_2,c_3,K>0$,对于 $\forall v,v_1,v_2\in V$,满足:

(H1)(半连续性)映射 $s\mapsto{}_{V^*}\langle A(v_1+sv_2),v\rangle_V$ 为连续映射;

(H2)(单调性)$2\,{}_{V^*}\langle A(v_1)-A(v_2),v_1-v_2\rangle_V\leqslant c_1\|v_1-v_2\|_H^2$;

(H3)(强迫性)$2\,{}_{V^*}\langle A(v),v\rangle_V+\delta\|v\|_V^\alpha\leqslant c_2+K\|v\|_H^2$;

(H4)(增长性)$\|A(v)\|_{V^*}\leqslant c_3(1+\|v\|_V^{\alpha-1})$.

$(\Omega,\mathfrak{I},\mathfrak{I}_t,P)$ 表示一个滤子化的概率空间,$(N_t)_{t\in\mathbf{R}}$ 是一个标准实值 Wiener 过程. 令 $((\Omega,\mathfrak{I},P),(\theta_t)_{t\in\mathbf{R}})$ 是一个度量动力系统,即 $(t,\omega)\mapsto\theta_t(\omega)$ 是 $B(\mathbf{R})\otimes\mathfrak{I}/\mathfrak{I}$ 可测,$\theta_0=id$,$\theta_{t+s}=\theta_t\circ\theta_s$,且 θ_t 保持 P 测度不变,$(N_t)_{t\in\mathbf{R}}$ 满足如下条件:

(S1)(严格平稳增长性)对 $\forall t,s\in\mathbf{R}$,$\omega\in\Omega$,有 $N_t(\omega)-N_s(\omega)=N_{t-s}(\theta_s(\omega))-N_0(\theta_s(\omega))$;

(S2)(正规性)任意 $\omega\in\Omega$,$N(\omega)\in L_{loc}^\alpha(\mathbf{R};\mathbf{R})$,其中 α 是(H3)中的常数;

(S3)(可测性)$N:\mathbf{R}\times\Omega\mapsto\mathbf{R}$ 是关于 σ-代数 $B(\mathbf{R})\otimes\mathfrak{I}/B(\mathbf{R})$ 可测的;

(S4)对 P-a.s.,$\omega\in\Omega$,当 $|t|\to\infty$ 时,$N_t(\omega)$ 是次线性增长,即 $|N_t(\omega)|=o(t)$.

2　结果及其证明

首先,给出方程(1)的温和解、随机动力系统和随机流等基本概念,有关随机动力系统的内容可参见文献[1]和文献[3].

定义 1　$\mathfrak{I}_t$ 适应的 V 值过程 $\{X_t\}_{t\in[s,T]}$,如果对(H3)中的 α 和几乎所有的 $\omega\in\Omega$,有 $X(\omega)\in L^\alpha([s,T];V)\cap L^2([s,T];H)$,且对 $\forall t\in[s,T]$ 满足 $X_t(\omega)=x+\int_s^t[A(X_r(\omega))-vX_r]\mathrm{d}r+\int_s^t\sigma X_r(\omega)\mathrm{d}N_r(\omega)$,则称 $\{X_t\}_{t\in[s,T]}$ 为方程(1)的一个温和解.

定义 2　设 (H,d) 是一个完备可分度量空间.(i)一个关于度量动力系统 θ_t 的随机动力系统(RDS)是一个可测映射 φ:($\varphi:\mathbf{R}_+\times H\times\Omega\to H$;$(t,x,\omega)\mapsto\varphi(t,\omega)x$),使得 $\varphi(0,\omega)=id_H$,并且 $\varphi(t+s,\omega)=\varphi(t,\theta_s\omega)\circ\varphi(s,\omega)$,其中 $t,s\in\mathbf{R}^+$,$\omega\in\Omega$. 若对 $\forall t\in\mathbf{R}^+$,$\omega\in\Omega$,$x\mapsto\varphi(t,\omega)x$ 是连续的,则称 φ 为连续随机动力系统.(ii)如果对任意 $-\infty<s\leqslant t<\infty$ 和几乎所有的 $\omega\in\Omega_t$,一个映射族 $S(t,s;\omega): H\to H$;$(t,s,\omega,x)\mapsto S(t,s;\omega)x$ 关于 σ-代数 $B(\mathbf{R})\otimes B(\mathbf{R})\otimes\mathfrak{I}\otimes B(H)/B(H)$ 可测,并满足 $S(t,r;\omega)S(r,s;\omega)x=S(t,s;\omega)x$ 和 $S(t,s;\omega)x=S(t-s,0;\theta_s\omega)x$,则称 S 为关于度量动力系统 θ 的一个随机流. 若对任意 $-\infty<s\leqslant t<\infty$,$\omega\in\Omega$,$x\mapsto S(t,s;\omega)x$ 是连续的,则称 S 为连续随机流.

为了给出与方程(1)相关联的随机动力系统,本文引进随机过程 $M(t)=\mathrm{e}^{-\sigma N(t)}$. 利用 Itô 公式可以证明,$M(t)$ 满足微分方程 $\mathrm{d}M(t)=(\frac{1}{2}\sigma^2)M(t)\mathrm{d}t-\sigma M(t)\mathrm{d}N(t)$. 令 $Z_t=X_tM(t)$,则 Z_t 满足微分方程

$$\mathrm{d}Z_t=M(t)A(M(t)^{-1}Z_t)\mathrm{d}t+(\frac{1}{2}\sigma^2-v)Z_t\mathrm{d}t.\tag{2}$$

利用方程(2)的解定义随机流 φ 与随机动力系统

$$S(t,s;\omega)Z(s)=Z(t),\tag{3}$$

则由平稳增长性可以得出 $S(t,s;\omega)x=S(t-s,0;\theta_0(\omega))x$. 如果定义 $\varphi:\mathbf{R}^+\times H\times\Omega\to H$ 为

$$\varphi(t,\omega)x=S(t,0;\omega)x,\tag{4}$$

则由文献[4] 中的定理 4.2.4 可推得方程(1) 存在唯一 $\mathfrak{I}_t$ 适应的解，因而得到如下定理.

定理 1　假设条件(H1)—(H4) 成立，并且任意一个随机过程 N_t 满足条件(S1)—(S3)，则(3) 式中定义的映射族 $S(t,s;\omega)$ 是与方程(1) 相关联的连续随机流，因而由(4) 式定义的映射族 φ 是与方程(1) 相关联的连续随机动力系统.

定义 3　(i) 一个(闭) 集值映射 $K:\Omega\to 2^H$，如果对 $\forall x\in H$，映射 $\omega\mapsto d(x,K(\omega))$ 是可测的，则称 K 是可测的，其中对非空集 $A,B\in 2^H$，规定 $d(A,B)=\sup\limits_{x\in A}\inf\limits_{y\in B}d(x,y)$，$d(x,B)=d(\{x\},B)$. 一个(闭) 可测的集值映射 K 也叫做一个(闭) 随机集.

(ii) 令 A,B 为 H 的两个随机集. 如果 P-a. s. 存在一个吸收时间 $t_B(\omega)>0$，对任意 $t\geqslant t_B(\omega)$ 有 $\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B(\theta_{-t}\omega)\subseteq A(\omega)$，则称随机集 A 吸收随机集 B；称 A 吸收 B，如果 $d(\varphi(t,\theta_{-t}\omega)B(\theta_{-t}\omega),A(\omega))\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$，$P$-a. s. .

(iii) 一个随机集合 A 的 Ω 极限集定义为 $\Omega_A(\omega)=\Omega(A,\omega)=\bigcap\limits_{T\geqslant 0}\overline{\bigcup\limits_{t\geqslant T}\varphi(t,\theta_{-t}(\omega))A(\theta_{-t}(\omega))}$.

定义 4　如果 H 的一个随机集 A 在 P 测度意义下对几乎所有的 $\omega\in\Omega$ 满足下述条件，则称 A 为随机动力系统 φ 的随机吸引子：

(i) A 是 φ 不变集，即 $\varphi(t,\omega)A(\omega)=A(\theta_t\omega)$，$\forall t>0$；

(ii) A 吸引所有确定型有界集 $B\subseteq H$.

下面给出一个随机动力系统存在随机吸引子的判别方法.

定理 2[3]　令 φ 是 H 的一个随机动力系统. 假设存在一个紧随机集 K，吸收每一个确定型有界集合 $B\subseteq H$，则随机动力系统 φ 存在唯一的一个随机吸引子 $A(\omega)=\overline{\bigcup\limits_{B\subseteq H,B\text{有界}}\Omega_B(\omega)}$.

运用上述定理拟证明一个随机动力系统的随机吸引子的存在性，需要证明存在一个紧吸收集，为此需要如下附加条件：

(H5) 假设存在 H 的子空间$(Y,\|\cdot\|_Y)$，使得嵌入 $V\subseteq Y$ 是连续的，$Y\subseteq H$ 是紧的，并存在 H 的正定自伴算子序列$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得$\langle x,y\rangle_n=\langle x,T_ny\rangle_H$，$x,y\in H$ 在 H 上定义一个新的内积序列，它们诱导出的范数$\|\cdot\|_n$ 等价于$\|\cdot\|_H$，对 $\forall x\in Y$ 有 $\|x\|_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\|x\|_Y$. 另外，还假设 $T_n:V\to V$ 是连续的，并且存在一个常数 $c_4>0$，使得

$$2\langle A(v),T_nv\rangle\leqslant c_4(\|v\|_n^2+1),\ \forall v\in V.\tag{5}$$

定理 3　假设条件(H1)—(H5) 成立，N_t 为实值标准 Wiener 过程，并且 $v>\dfrac{1}{2}(K+\sigma^2)$，则与微分方程(1) 相关联的随机动力系统 φ 存在唯一的一个紧随机吸引子.

证明　根据定理 2，只需证明存在整体随机紧吸收集 K 即可. 本文中选取 $K(\omega)=\overline{B_Y(0,r(\omega))}^H$，这里 $B_Y(0,r(\omega))$ 表示球心为 0、半径为 r(依赖于 ω) 的在 Y 中的开球. 由于 $Y\subseteq H$ 是一个紧嵌入，K 在 H 中是一个紧的随机集，再由 $\varphi(t,\omega)=S(t,0;\omega)=S(0,-t;\theta_{-t}(\omega))$ 可知，对任意有界集 $B\subset H$ 和 $\omega\in\Omega$，仅需证明 $S(0,-t;\omega)B$ 在 Y 中的有界性即可. 为了在 H 上能够运用 Itô 公式，我们将考虑范数$\|\cdot\|_n$. 首先证明当 $t=-1$ 时，随机动力系统 φ 在 H 上存在一个随机吸收集.

引理 1　假设定理 3 的条件成立，则存在随机半径 $r_1(\omega)>0$，对所有 $\rho>0$，存在 $\bar{s}\leqslant -1$. 对 P-a. s. ，$\omega\in\Omega$，$\forall x\in H$，当 $\|x\|_H\leqslant\rho$ 时，$\|Z(-1,s;\omega)x\|_H^2\leqslant r_1^2(\omega)$，$\forall s\leqslant\bar{s}$.

证明　对方程(2) 两端用 z_t 在 H 中做内积，再由算子 A 的强迫性得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|Z_t\|_H^2=2M(t)^2\,{}_{V^*}\langle A(M(t)^{-1}Z_t),M(t)^{-1}Z_t\rangle_V+(\sigma^2-2v)\|Z_t\|_H^2\leqslant$$
$$2M(t)^2c_2+(K+\sigma^2-2v)\|Z_t\|_H^2-\delta(M(t)^{2-\alpha}\|Z_t\|_V^\alpha).\tag{6}$$

根据 Gronwall 引理，当 $s\leqslant -1$ 时有

$$\| Z_{-1} \|_H^2 \leqslant \mathrm{e}^{\lambda(1+s)} \| Z_s \|_H^2 + \int_s^{-1} 2M(r)^2 c_2 \mathrm{e}^{\lambda(1+r)} \mathrm{d}r, \tag{7}$$

其中 $\lambda = 2v - K - \sigma^2$. 结合(S4)和假设条件 $2v - K - \sigma^2 > 0$,当 $t \to -\infty$ 时,(7)式右端第二项有界. 对 $\omega \in \Omega$ 定义 $r_1^2(\omega) = 2 + \int_{-\infty}^{-1} 2c_2 M(r)^2 \mathrm{e}^{\lambda(1+r)} \mathrm{d}r$,则由 N 的可测性(S3)可知,如果选取 $\bar{s} < -1$,使得 $\mathrm{e}^{-\lambda(-1-s)} \rho^2 \leqslant 1$,则引理 1 结果成立.

引理 2 在定理 3 的假设条件下,不等式 $\int_{-1}^0 \delta(M(r)^{2-\alpha} \| Z_r \|_V^\alpha \mathrm{e}^{\lambda r}) \mathrm{d}r \leqslant \| Z_{-1} \|_H^2 \mathrm{e}^{-\lambda} + \int_{-1}^0 2c_2 M(r)^2 \mathrm{e}^{\lambda r} \mathrm{d}r$ 成立.

证明 对不等式(6)两端同乘 $\mathrm{e}^{\lambda t}$,并在$[-1,0]$区间上求积分,则引理 2 结论得证.

引理 3[5] 若 H(4) 中的算子 $T_n : V \to V$ 是连续的,则映射 $i_n \circ i^{-1} : H^* \to H_n^*$ 也是关于范数$\|\cdot\|_{V^*}$连续的;因而存在唯一 $i_n \circ i^{-1}$ 在 V^* 上的扩张 I_n,使得${}_{V^*}\langle I_n u, v \rangle_V = {}_{V^*}\langle u, T_n v \rangle_V$, $\forall u \in V^*$, $v \in V$.

引理 4 若定理 3 的假设条件成立,则存在一个随机半径 $r_2(\omega) > 0$,使得对所有 $\rho > 0$,存在 $\bar{s} \leqslant -1$,对 P-a.s., $\omega \in \Omega$ 和 $\forall x \in H$,当 $\| x \|_H \leqslant \rho$ 时,有 $\| Z(0,s;\omega)x \|_Y^2 \leqslant r_2^2(\omega)$, $\forall s \leqslant \bar{s}$.

证明 利用算子 $I_n : V^* \to H_n^*$,在 H_n^* 中构造如下微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z_t = I_n M(t) A(M(t)^{-1} Z_t) + (\frac{1}{2}\sigma^2 - v) Z_t. \tag{8}$$

考虑到 Gelfand 三元组 $V \subseteq H_n \equiv H_n^* \subseteq V^*$,并由文献[4]中的定理 4.2.4 可知,方程(8)是适定的. 利用引理 3、(5)式和条件(H4),再由方程(8)可以得到$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| Z_t \|_n^2 = 2\,{}_{V^*}\langle I_n M(t) A(M(t)^{-1} Z_t) + (\sigma^2 - 2v) Z_t, Z_t \rangle_V \leqslant (c_4 + \sigma^2 - 2v) \| Z_t \|_n^2 + c_4 M(t)$. 利用 Growall 引理,从上式得到 $\| Z_0 \|_n^2 \leqslant \mathrm{e}^{\bar{\lambda} s} \| Z_s \|_n^2 + c_4 \int_s^0 M(t)^2 \mathrm{e}^{\bar{\lambda} r} \mathrm{d}r$, $\forall s \leqslant 0$,其中 $\bar{\lambda} = 2v - \sigma^2 - c_4$. 对上式在$[-1,0]$上关于 s 求积分,得到 $\| Z_0 \|_n^2 \leqslant \int_{-1}^0 \mathrm{e}^{\bar{\lambda} s} \| Z_s \|_n^2 \mathrm{d}s + c_4 \int_{-1}^0 M(t)^2 \mathrm{e}^{\bar{\lambda} s} \mathrm{d}s$. 对上式两端取极限,并考虑到 $V \subseteq Y$ 是连续的,因此存在正常数 c_5,使得$\|\cdot\|_Y \leqslant c_5 \|\cdot\|_V$. 另外,在$[-1,0]$上有 $\bar{\lambda} s \leqslant |\bar{\lambda}| + \lambda + \lambda s$,从而得到

$$\| Z_0 \|_Y^2 \leqslant c_5 \mathrm{e}^{|\bar{\lambda}| + \lambda} \int_{-1}^0 \mathrm{e}^{\lambda s} \| Z_s \|_V^2 \mathrm{d}s + c_4 \mathrm{e}^{|\bar{\lambda}| + \lambda} \int_{-1}^0 M(t)^2 \mathrm{e}^{\lambda s} \mathrm{d}s. \tag{9}$$

存在正常数 c_6,使得$\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{\lambda s} \| Z_s \|_V^2 \mathrm{d}s \leqslant c_6 \int_{-1}^0 M(s)^{2-\alpha} \mathrm{e}^{\lambda s} \| Z_s \|_V^\alpha \mathrm{d}s + c_6 \int_{-\infty}^0 M(s)^{\alpha-2} \mathrm{e}^{\lambda s} \mathrm{d}s$. 利用此不等式和引理 2,可从不等式(9)得到存在正常数 $c_7 > 0$,使得 $\| Z_0 \|_Y^2 \leqslant c_7 \| Z_{-1} \|_H^2 + c_7$. 从而,利用引理 1 可得到引理 4 的证明.

由引理 4 和定理 2 的结果可知,与方程(1)相关联的随机动力系统 φ 存在唯一的一个紧随机吸引子.

注 此结论同样可适用于拟线性抛物型偏微分方程、广义多孔介质方程等.

参考文献:

[1] Crauel H, Debussche A, Flandoli F. Random attractors[J]. J Dyn Dif Equ, 1997,9(2):307-341.

[2] Gess B, Liu Wei, Roeckner M. Random attractors for a class of stochastic partial differential equations drivern by general additive noise[J]. J Differential Equation, 2011,251(2):1225-1253.

[3] Crauel H, Flandoli F. Attractors for random dynamical systems[J]. Probab Theory Related Fields, 1994,100(3): 365-393.

[4] Prévôt C, Röckner M. A Cincise Course on Stochastic Partial Differential Equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

[5] Liu W. Invariance of subspaces under the solution flow of SPDE[J]. Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top, 2010,13(1):87-98.