

文章编号: 1004-4353(2014)03-0194-05

基于三次 B 样条有限元法的 BBMB 方程数值解

徐莹莹, 周丽萍, 樊强, 朴光日*
(延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 对空间和时间坐标分别采用三次 B 样条有限法和 Crank-Nicolson 差分法求得非线性 BBMB 方程的数值解,应用 Von-Neumann 稳定性理论证明了此方法的无条件稳定性,并且通过两个例子验证了该方法的有效性与可行性.
关键词: 三次 B 样条; 有限元法; Crank-Nicolson 差分法; BBMB 方程
中图分类号: O242. 21 **文献标识码:** A

A numerical solution of the BBMB equation based on cubic B-spline finite element method

XU Yingying, ZHOU Liping, FAN Qiang, PIAO Guangri*
(*Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China*)

Abstract: A cubic B-spline finite element method for the spatial variable combined with a Crank-Nicolson scheme for the time variable is proposed to approximate a solution of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) equation. Von-Neumann scheme is proposed to analyze the unconditionary stability of the present method. Finally, through two examples we demanstrate the effectiveness and feasibility of this method.
Key words: cubic B-spline; finite element method; Crank-Nicolson difference method; BBMB equation

Benjamin-Bona-Mahony-Burgers(BBMB)方程

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \beta u_x + uu_x = f, & x \in [0, L], t \in [0, T], \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \end{cases} \tag{1}$$

表示的是小振幅长波在非线性色散介质中的传播^[1],其中 $\alpha > 0$, β 是任意常数, f 是一个外力. 在物理学中,系统(1)的色散效应与方程 Benjamin-Bona-Mahony(BBM)相似,其损耗效应与 Burgers 方程相似,并且 BBMB 方程是 Korteweg-de Vries-Burgers(KdVB)方程的另一种形式^[2]. 文献[3-6]、[7-9] 和 [10-11] 分别采用有限元、有限差分和 Adomain 分解方法研究了该方程的数值解;文献[12-13] 应用二次 B 样条有限元法求解了 Burgers 方程的数值解;文献[14] 采用三次 B 样条配置法求解了 BBMB 方程的数值解. 本文应用三次 B 样条有限元法先把 BBMB 方程转化为非线性常微分方程,然后利用 Crank-Nicolson 差分法进行时间离散化,从而得到了全离散化的代数方程.

1 数值格式

在整个空间域中,标准的拉格朗日有限元基函数只能提供简单的 C^0 -连续,因而不适合应用于高阶

微分方程的离散化,比如三阶或四阶微分方程;但由于 B-样条基函数至少满足 C^1 -连续,因此可用于求解高阶微分方程的近似解.

根据变分方法可将系统(1) 转化为弱形式:

$$\begin{cases} \int_0^L u_t v \, dx + \int_0^L u_{xt} v' \, dx + \alpha \int_0^L u_x v' \, dx + \beta \int_0^L u_x v \, dx + \int_0^L u u_x v \, dx = \int_0^L f v \, dx, & v \in H_0^1(0, L), \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, L], \end{cases} \tag{2}$$

其中 $H_0^1 = \{\varphi \in H^1(0, L) : \varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=L} = 0\}$, $H^1(0, L) = \left\{ \varphi \in L^2(0, L) : \frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^2(0, L) \right\}$. 将区间 $[0, L]$ 等分为 N 个子区间,区间步长 $h = x_{i+1} - x_i$, 其中 $x_i (i = 0, 1, \dots, N)$ 为结点,即 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = L$. 设 $u^h \in V^h$ (协调有限元子空间,且 $V^h \subset H^1(0, L)$), 则 u 的近似解可写成

$$u^h(x, t) = \sum_{i=-3}^{N-1} \alpha_i(t) B_i(x), \tag{3}$$

其中 $\alpha_i(t)$ 是待定系数, $B_i(x)$ 是三次 B 样条有限元基函数. 在区间 $[0, L]$ 上定义 $B_i(x)$ 为

$$B_i(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (x - x_i)^3, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i+1})^2 + 3h(x - x_{i+1}) - 3(x - x_{i+1}), & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}), \\ h^3 + 3h^2(x_{i+3} - x)^2 + 3h(x_{i+3} - x) - 3(x_{i+3} - x), & x \in [x_{i+2}, x_{i+3}), \\ (x_{i+4} - x)^3, & x \in [x_{i+3}, x_{i+4}), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $i = -1, 0, 1, \dots, N$. 表 1 为各结点处 B_i, B_i', B_i'' 的值.

表 1 基函数及其一阶、二阶导数在各结点的值

x	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}	x_{i+3}	x_{i+4}
$B_i(x)$	0	1/6	4/6	1/6	0
$B_i'(x)$	0	1/2h	0	-1/2h	0
$B_i''(x)$	0	1/h ²	-2/h ²	1/h ²	0

将(3) 式代入(2) 式得:当 $V^h \subset H^1(0, L)$, $V_0^h \subset V^h \cap H_0^1(0, L)$ 时,满足系统

$$\begin{cases} \int_0^L u_i^h v^h \, dx + \int_0^L u_{ixt}^h (v^h)' \, dx + \alpha \int_0^L u_x^h (v^h)' \, dx + \beta \int_0^L u_x^h v^h \, dx + \int_0^L u^h u_x^h v^h \, dx = \\ \int_0^L f v^h \, dx, & v^h \in V_0^h(0, L), \\ u^h(0, x) = u_0^h(x), & x \in [0, L] \end{cases} \tag{4}$$

的 $u^h(t, \cdot) \in V_0^h$, 其中 $u_0^h(x) \in V_0^h$. 若简记 $u_i = u^h(x_i, t)$, 由(3) 式和表 1 可得到在结点的 $u^h(x_i, t)$ 和其一阶、二阶导数与 α_i 的如下关系:

$$\begin{cases} u_i = \alpha_{i-1} + 4\alpha_i + \alpha_{i+1}, \\ u_i' = 3(\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1})/h, \\ u_i'' = 6(\alpha_{i-1} - 2\alpha_i + \alpha_{i+1})/h^2, \end{cases} \tag{5}$$

根据(1) 式中的边界条件和(5) 式可得 $\begin{cases} \alpha_{-1} = \alpha_1, \alpha_0 = -\alpha_1/2, \\ \alpha_{N+1} = \alpha_{N-1}, \alpha_N = -\alpha_{N-1}/2, \end{cases}$ 将该式代入(3) 式得

$$u^h(x, t) = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i(t) \tilde{B}_i(x), \tag{6}$$

其中
$$\begin{cases} \tilde{B}_1(x) = [2B_{-1}(x) - B_0(x) + 2B_1(x)]/2, \\ \tilde{B}_i(x) = B_i(x), \\ \tilde{B}_{N-1}(x) = [2B_{N-1}(x) - B_N(x) + 2B_{N+1}(x)]/2, \quad i = 2, \cdots, N-2. \end{cases}$$

根据 Galerkin 方法,在(4)式中取加权函数 $v_i^h(x) = \tilde{B}_i(x)$, $i = 1, 2, \cdots, N-1$, 然后将(6)式代入得

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N-1} (\int_0^L \tilde{B}_i \tilde{B}_j dx) \frac{d\alpha_i(t)}{dt} + \sum_{i=1}^{N-1} (\int_0^L \tilde{B}_i \tilde{B}_j dx) \frac{d\alpha_i(t)}{dt} + v \sum_{i=1}^{N-1} (\int_0^L \tilde{B}_i \tilde{B}_j dx) \alpha_i(t) + \\ \gamma \sum_{i=1}^{N-1} (\int_0^L \tilde{B}_i \tilde{B}_j dx) \alpha_i(t) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} (\int_0^L \tilde{B}_i \tilde{B}_k \tilde{B}_j dx) \alpha_i(t) \alpha_k(t) = \int_0^L f \tilde{B}_j dx, \\ \sum_{i=1}^{N-1} (\int_0^L \tilde{B}_i \tilde{B}_j dx) \alpha_i(0) = \int_0^L u_0(x) \tilde{B}_j dx, \quad j = 1, 2, \cdots, N-1. \end{cases} \quad (7)$$

将(7)式转化为矩阵形式后得

$$\begin{cases} (M + S) \frac{d\alpha}{dt} + (vS + \gamma C) \alpha + \alpha^T P \alpha = f, \\ M \alpha^0 = u^0, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{N-1})^T$, $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \cdots, \alpha_{N-1}^0)^T$, M, S, C 是 $(N-1) \times (N-1)$ 阶矩阵, P 是 $(N-1) \times (N-1) \times (N-1)$ 阶张量矩阵, f, u^0 是向量, 具体形式为 $M_{ij} = \int_0^L \tilde{B}_i \tilde{B}_j dx$, $S_{ij} = \int_0^L \tilde{B}_i \tilde{B}_j dx$, $C_{ijk} = \int_0^L \tilde{B}_i \tilde{B}_j \tilde{B}_k dx$, $P_{ijk} = \int_0^L \tilde{B}_i \tilde{B}_k \tilde{B}_j dx$, $f_j = \int_0^L f \tilde{B}_j dx$, $u_j^0 = \int_0^L u_0(x) \tilde{B}_j dx$, $i, j, k = 1, 2, \cdots, N-1$. (8) 式是由具有 $N-1$ 个未知量的 $N-1$ 个非线性常微分方程构成的系统. 为了叙述方便, 定义 $(N-1) \times (N-1)$

阶矩阵 $G_{ijk} = \sum_{k=1}^{N-1} P_{ijk} \alpha_k$, 则每个矩阵 M, S, C, G 的第 i 行具有如下数值形式:

$$\begin{cases} M: (h/140)(1, 120, 1\ 191, 2\ 416, 1\ 191, 120, 1), \\ S: (-1/10h)(3, 72, 45, -240, 45, 72, 3), \\ C: (1/100)(5, 280, 1\ 225, 0, -1\ 225, -280, -5), \\ G: (1/840)(-(5, 108, 129, 10, 0, 0, 0)\alpha, -(21, 1\ 944, 8\ 130, 3\ 888, 129, 0, 0)\alpha, \\ \quad -(-21, 0, 17\ 841, 35\ 682, 8\ 130, 108, 0)\alpha, (5, 1\ 944, 17\ 841, 0, -17\ 841, -1\ 944, -5)\alpha, \\ \quad (0, 108, 8\ 130, 35\ 682, 17\ 841, 0, -21)\alpha, (0, 0, 129, 3\ 888, 8\ 130, 1\ 944, 21)\alpha, \\ \quad (0, 0, 0, 10, 129, 108, 5)\alpha), \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\alpha = (\alpha_{i-3}, \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+3})^T$. 矩阵 M, S 是对称阵, 矩阵 C 是斜对称阵, 矩阵 G 具有更复杂结构. 将(9)式应用于稳定性分析, 根据 Crank-Nicolson 差分法, 令 $t = (n+1/2)\Delta t$, 且写成 $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha^n + \alpha^{n+1})$, $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\Delta t}(\alpha^{n+1} - \alpha^n)$, 其中 α^n 是时刻 $n\Delta t$ 的参变量, Δt 是时间步长, 则(8)式可写为

$$[M + (I + \frac{v\Delta t}{2})S + \frac{\gamma\Delta t}{2}C + \frac{\Delta t}{2}G]\alpha^{n+1} = [M + (I - \frac{v\Delta t}{2})S - \frac{\gamma\Delta t}{2}C - \frac{\Delta t}{2}G]\alpha^n. \quad (10)$$

M, S, C 是常数矩阵, 由于矩阵 G 依赖于时间, 因此其每一步骤都需要重新计算. 向量 α^n 的时间演化确定近似解 $u^h(x, t)$ 的时间演化, 当已知初始向量 α^0 的情况下, 此演化过程是通过反复计算系统(10)来完成的, 其具体过程如下:

1) 时间 $t=0$ 时, 首先, 根据已知初始向量 α^0 得到近似的 G , 并由(10)式计算近似的 α^1 . 然后, 通过 $\alpha = (1/2)(\alpha^0 + \alpha^1)$ 重新计算 G , 接着由(10)式再计算 α^1 . 反复进行 20 次左右的这种迭代可以得到比较精确的 α^1 .

2) 时间 $t > 0$ 时,首先,通过 $\alpha = \alpha^n + (1/2)(\alpha^n - \alpha^{n-1})$ 求得 G ,并由(10) 式计算得到 α^{n+1} 的近似值. 然后,利用 $\alpha = (1/2)(\alpha^n + \alpha^{n+1})$ 重新计算 G ,接着由(10) 式再计算 α^{n+1} . 通过反复迭代 10 次可以得到精确的 α^{n+1} .

2 稳定性分析

根据典型的傅里叶模式的增长因子的 Von-Neumann 理论,定义

$$\alpha_j^n = \widehat{\alpha}^n e^{ijkh},$$

(11)

其中 k 是模型数, h 是区间步长. 数值格式(10) 的稳定性取决于其线性化. 在非线性项 uu_x 中,假设 u 是局部常数,则其等价于假设对应的值 α_j 也是常数并等于 d ; 因此,格式(10) 相应的线性递推关系式可由下式给出:

$$\begin{aligned} &k_1 \alpha_{j-3}^{n+1} + k_2 \alpha_{j-2}^{n+1} + k_3 \alpha_{j-1}^{n+1} + k_4 \alpha_j^{n+1} + k_5 \alpha_{j+1}^{n+1} + k_6 \alpha_{j+2}^{n+1} + k_7 \alpha_{j+3}^{n+1} = \\ &l_1 \alpha_{j-3}^n + l_2 \alpha_{j-2}^n + l_3 \alpha_{j-1}^n + l_4 \alpha_j^n + l_5 \alpha_{j+1}^n + l_6 \alpha_{j+2}^n + l_7 \alpha_{j+3}^n, \end{aligned}$$

(12)

其中: $k_1 = r_1 - 3r_2 - 3r_3 + r_4 - 3r_5$, $k_2 = 120r_1 - 72r_2 - 72r_3 + 56r_4 - 168r_5$, $k_3 = 1\,191r_1 - 45r_2 - 45r_3 + 245r_3 - 735r_5$, $k_4 = 2\,416r_1 + 240r_2 + 240r_3$, $k_5 = 1\,191r_1 - 45r_2 - 45r_3 - 245r_3 + 735r_5$, $k_6 = 120r_1 - 72r_2 - 72r_3 - 56r_4 + 168r_5$, $k_7 = r_1 - 3r_2 - 3r_3 - r_4 + 3r_5$; $l_1 = r_1 - 3r_2 + 3r_3 - r_4 + 3r_5$, $l_2 = 120r_1 - 72r_2 + 72r_3 - 56r_4 + 168r_5$, $l_3 = 1\,191r_1 - 45r_2 + 45r_3 - 245r_3 + 735r_5$, $l_4 = 2\,416r_1 + 240r_2 - 240r_3$, $l_5 = 1\,191r_1 - 45r_2 + 45r_3 + 245r_3 - 735r_5$, $l_6 = 120r_1 - 72r_2 + 72r_3 + 56r_4 - 168r_5$, $l_7 = r_1 - 3r_2 + 3r_3 + r_4 - 3r_5$; $r_1 = \frac{h}{140}$, $r_2 = \frac{1}{10h}$, $r_3 = \frac{v\Delta t}{20h}$, $r_4 = \frac{\gamma\Delta t}{40}$, $r_5 = \frac{\Delta tc}{20}$. 将(11) 式代入(12) 式得

$$(a + b + ic)\widehat{\alpha}^{n+1} = (a - b - ic)\widehat{\alpha}^n,$$

(13)

其中: $a = (r_1 - 3r_2)\cos 3kh + (120r_1 - 72r_2)\cos 2kh + (1\,191r_1 - 45r_2)\cos kh + 1\,208r_1 + 120r_2$, $b = -3r_3\cos 3kh - 72r_3\cos 2kh - 45r_3\cos kh + 120r_3$, $c = (3r_5 - r_4)\sin 3kh + (168r_5 - 56r_4)\sin 2kh + (735r_5 - 245r_4)\sin kh$. 令 $\alpha^{n+1} = g\alpha^n$, 将其代入(13) 式得 $g = \frac{a - b - ic}{a + b + ic}$, 这里 g 是傅里叶模型的增长因子,其大小为 $|g| = \sqrt{gg} = \sqrt{\frac{(a-b)^2 + c^2}{(a+b)^2 + c^2}} < 1$. 因此,线性化的数值格式(10) 是无条件稳定的.

3 数值验证

为了验证本文算法的有效性和精确性,考虑如下两种情况.

例 1 给定参数 $\alpha = 1$, $\beta = 1$, 初始条件为 $u_0(x) = 4x(1 - x)\sin \pi x$, $\Delta t = 0.05$, 在不同时间段、结点和区间步长的条件下,观察 BBMB 方程的数值解.

解 例 1 结果见表 2.

表 2 不同时刻、区间步长条件下各结点的近似值

x	近似值					
	$t = 2$	$t = 2$	$t = 2$	$t = 5$	$t = 5$	$t = 5$
	$h = 1/16$	$h = 1/32$	$h = 1/64$	$h = 1/16$	$h = 1/32$	$h = 1/64$
0.125	0.019 601	0.019 482	0.019 433	0.000 191	0.000 150	0.000 132
0.25	0.072 619	0.072 624	0.072 631	0.002 525	0.002 499	0.002 487
0.375	0.128 004	0.128 129	0.128 190	0.005 876	0.005 866	0.005 861
0.5	0.156 282	0.156 524	0.156 646	0.008 517	0.008 526	0.008 531
0.625	0.144 618	0.144 988	0.145 171	0.009 170	0.009 203	0.009 219
0.75	0.099 261	0.099 787	0.100 036	0.007 441	0.007 506	0.007 536
0.875	0.040 490	0.041 261	0.041 601	0.003 821	0.003 935	0.003 983

例 2 初始条件为 $u_0(x) = \frac{4x(1-x)}{1 + \exp(1 + 0.25x^2)}$, $\Delta t = 0.01$, $h = 1/64$, 观察不同的 α, β 值所对应的 BBMB 方程的近似解.

解 图 1 和图 2 分别表示近似解在不同参数下的演化过程.

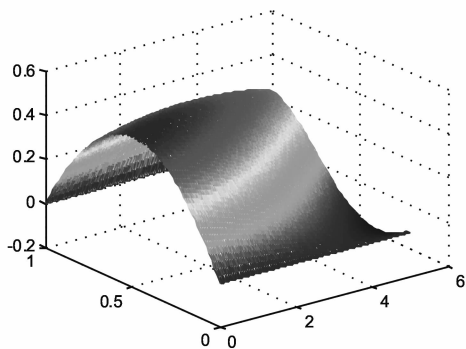


图 1 $\alpha=0.0001$, $\beta=2.5$ 时 BBMB 方程的近似解

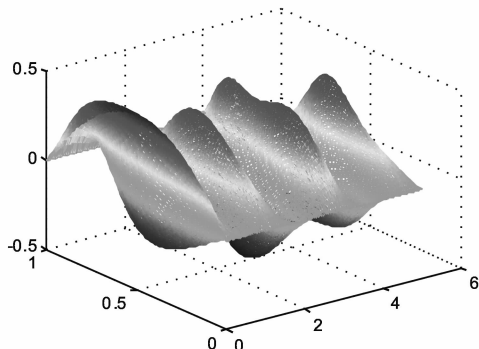


图 2 $\alpha=0.01$, $\beta=25$ 时 BBMB 方程的近似解

通过例 1 和例 2 可知, 本文提出的方法不仅适合求解 BBMB 方程的近似解, 而且也适合于求解其他方程的近似解.

参考文献:

- [1] Benjamin T B, Mahony J J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1972, 272: 47-78.
- [2] Korteweg D J, de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves[J]. Philosophical Magazine, 1895, 39: 422-433.
- [3] Ewing R E. Time-stepping Galerkin methods for nonlinear Sobolev partial differential equation[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1978, 15: 1125-1150.
- [4] Omrani K. The convergence of the fully discrete Galerkin approximations for the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation[J]. Appl Math Comput, 2006, 180: 614-621.
- [5] Raupp M A. Galerkin methods applied to the Benjamin-Bona-Mahony equation[J]. Boletim da Sociedade Brasileira Mathematical, 1975, 6: 65-77.
- [6] Wahlblin L. Error estimates for a Galerkin methods for a class of model equations for long waves[J]. Numerische Mathematic, 1975, 23: 289-303.
- [7] Achouri T, Khiari N, Omrani K. On the convergence of difference schemes for the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation[J]. Appl Math Comput, 2006, 182: 999-1005.
- [8] Kannan R, Chung S K. Finite difference approximate solutions for the two-dimensional Burgers system[J]. Comput Math Appl, 2002, 44: 194-200.
- [9] Omrani K, Ayadi M. Finite difference discretization of the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation[J]. Numer Meth Part Differ Equat, 2008, 24: 239-248.
- [10] Al-Khaled K, Momani S, Alawneh A. Approximate wave solutions for generalized Benjamin-Bona-Mahony (BBMB) equations[J]. Appl Math Comput, 2005, 171: 281-292.
- [11] Kaya D. A numerical simulation of solitary-wave solutions of the generalized regularized long-wave equation[J]. Appl Math Comput, 2004, 149: 833-841.
- [12] Aksan E N. Quadratic B-spline finite element method for numerical solution of the Burgers equation[J]. Appl Math Comput, 2006, 174: 884-896.
- [13] Özis T, Esen A, Kutluay S. Numerical solution of Burgers equation by quadratic B-spline finite element[J]. Appl Math Comput, 2005, 165: 237-249.
- [14] Zarebnia M, Parvaz R. Cubic B-spline collocation method for numerical solution of the Benjamin-Bona-Mahony (BBMB) equation[J]. International Journal of Mathematical Sciences, 2013, 7: 34-37.