

文章编号: 1004-4353(2014)02-0142-04

具有预警功能和可修复储备部件的人-机系统

韩筱爽¹, 方明²

(1. 延边大学科学技术学院, 吉林 延吉 133002; 2. 延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 在具有可修复储备部件的人-机系统基础上, 增加一个预警状态, 使其变为预警系统, 利用线性算子半群理论证明了系统非负时间依赖解的存在唯一性、渐进稳定性和指数稳定性, 最后通过数值计算得出在一定条件下预警系统与非预警系统的稳态可用度的相对误差趋近于 0.

关键词: 预警系统; 稳定性; 稳态可用度

中图分类号: O177.2

文献标识码: A

A human-machine system with warning function and general failed system repair time distribution

HAN Xiaoshuang¹, FANG Ming²

(1. *Institute of Science and Technology, Yanbian University, Yanji 133002, China;*

2. Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: Based on a model representing human-machine system with general failed system repair time distribution, we added a warning state and make it into a system with warning function. We proved non-negative time-dependent existence and uniqueness, asymptotic stability and exponential stability of system solution by the linear operator semi-group theory. At last, by using numerical calculation, we concluded that, under certain condition, the steady-state availability's relative error of warning system and non-warning system is tend to be zero.

Key words: warning system; stability; steady-state availability

0 引言

所谓预警^[1-2]是指在灾害或灾难以及其他需要提防的危险发生之前, 根据以往总结的规律或观测得到的可能性前兆, 使系统发出紧急信号报告危险情况, 以避免灾害在不知情或准备不足的情况下发生, 从而最大限度地降低危害所造成的损失的行为. 预警系统是指具备上述功能的系统. 文献[3-7]中作者讨论了一类具有 2 个运行部件和 1 个储备部件、故障修复时间服从一般分布的人-机系统模型, 运用泛函分析中 Banach 空间上的线性算子半群理论, 先后证明了系统解的存在唯一性、半离散化、渐进稳定性、指数稳定性和系统的谱特征, 并分析了其可靠性.

本文在上述模型上, 增加一个新的预警状态, 使之成为具有可修复储备部件和预警功能的人-机系统模型, 使得系统的初值条件属于定义域, 这样原来利用 Banach 空间上线性算子半群方法求得的弱解变成了强解. 在此基础上, 对系统的稳定性、预警与非预警系统(相对于本文的系统状态, 原来所研究的

即为非预警系统)的稳态可用度进行了研究,最后通过数值计算表明,当风险失效率取特定值时,预警与非预警系统稳态可用度的相对误差趋于 0. 这样,在生产生活中,可根据风险系数的实际意义,做出合理的风险预测,建立相应预警系统模式,从而最大限度减少各种危害造成的损失.

1 模型描述

系统的状态转换流程如图 1 所示,其中: $i=0$ 表示 2 个运行部件和 1 个储备部件均处于完好状态; $i=1$ 表示 1 个运行部件因硬件错误而故障,1 个储备部件立即补充运行; $i=2$ 表示系统仅有 1 个部件正常运行而无储备部件; $i=3$ 表示系统由于硬件错误而处于故障状态; $i=4$ 表示系统由于通常错误而处于故障状态; $i=5$ 表示系统由于临界人为错误而处于故障状态; $i=c$ 表示系统由于通常错误而处于故障状态,但系统仍能继续运行(预警状态). 该模型可用如下积分-微分方程描述:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -a_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) + \sum_{j=3}^5 \int_0^\infty p_j(x,t) \mu_j(x) dx, \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= r_0 p_0(t) - a_1 p_1(t) + \mu_2 p_2(t), \\ \frac{dp_2(t)}{dt} &= r_1 p_1(t) - a_2 p_2(t), \\ \frac{dp_c(t)}{dt} &= -\lambda_c p_c(t) + \lambda_{c_0} p_0(t), \\ \frac{\partial p_j(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial p_j(x,t)}{\partial x} &= -\mu_j(x) p_j(x,t), j = 3,4,5. \end{aligned}\right. \quad (1)$$

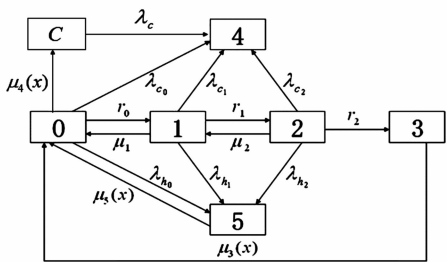


图 1 系统工作流程

其中: $a_0 = r_0 + \lambda_{c_0} + \lambda_{h_0}$, $a_1 = r_1 + \lambda_{c_1} + \lambda_{h_1} + \mu_1$, $a_2 = r_2 + \lambda_{c_2} + \lambda_{h_2} + \mu_2$. 方程(1) 的初始值为 $p_3(0,t) = r_2 p_2(t)$, $p_4(0,t) = \sum_{i=0}^2 \lambda_{c_i} p_i(t)$, $p_5(0,t) = \sum_{i=0}^2 \lambda_{h_i} p_i(t) + \lambda_c p_c(t)$; 边值条件为 $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = p_2(0) = p_c(0) = 0$, $p_3(x,0) = p_4(x,0) = p_5(x,0) = 0$. 其中: i, j 表示系统所处状态数; r_i 表示系统处于状态 i 的定常硬件故障率($i=0,1,2$); μ_i 表示系统处于状态 i 的定常硬件修复率($i=1,2$); $\mu_j(x)$ 表示系统处于状态 j , 修复时间为 x 的系统修复率($j=3,4,5$); λ_c 表示系统从状态 c 到状态 4 的定常通常故障率; λ_{c_i} 表示系统从状态 i 到状态 4 的定常通常故障率($i=0,1,2$); λ_{h_i} 表示系统从状态 i 到状态 5 的定常临界人为故障率($i=0,1,2$); $p_i(t)$ 表示在时刻 t 处于状态 i 的概率($i=0,1,2,c$); $p_j(x,t)$ 表示系统在时刻 t 处于状态 j , 修复时间为 x 的概率($t > 0, j=3,4,5$).

假定: $\forall T > 0, \int_0^T \mu_j(\xi) d\xi < \infty, \int_0^\infty \mu_j(\xi) d\xi = \infty, \int_0^\infty e^{-\int_0^x \mu_j(\xi) d\xi} dx < +\infty, 0 < c_j = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \mu_j(\xi) d\xi, 0 \leq \mu_j(x) < \infty, j=3,4,5$. 取状态空间 $X = C^5 \times (L^1(\mathbf{R}^+))^3$, 显然 X 是一个 Banach 空间. 在 X 上定义算子:

$$A = \text{diag}(-a_0, -a_1, -a_2, -\lambda_c, -\frac{d}{dx} - \mu_3(x), -\frac{d}{dx} - \mu_4(x), -\frac{d}{dx} - \mu_5(x)),$$
$$E = \begin{bmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 \\ r_0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{c_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \omega_j(\cdot) = \int_0^\infty \mu_j(x) dx, j = 3,4,5.$$

取算子 A 的定义域为 $D(A) = \{P \in X \mid \frac{dp_j(x)}{dx} \in L^1(R^+), p_3(0) = r_2 p_2(t), p_4(0) = \sum_{i=0}^2 \lambda_{c_i} p_i(t) (i=0, 1, 2; j=3, 4, 5), p_5(0) = \lambda_c p_c(t) + \sum_{i=0}^2 \lambda_{h_i} p_i(t)\}$, 则系统的积分-微分方程组可描述为 Banach 空间中的一个抽象 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = (A + E)\mathbf{p}(t), t > 0; \\ \mathbf{p}(0) = (1, 0, \dots, 0)^T, t = 0. \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), p_c(t), p_3(x, t), p_4(x, t), p_5(x, t))$.

2 系统解的性质

根据文献[4-7]中的证明方法可得如下结论:

定理 1 ① $\gamma = 0$ 是算子 $A + E$ 的简单本征值; ② $\{\gamma \in C; \operatorname{Re} \gamma > 0\} \subset \rho(A)$ 且 $\|(\gamma I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \gamma + c}$; ③ $D(A)$ 在 X 中稠密; ④ $T(t)$ 为压缩 c_0 半群. 其中函数 $c = \min\{c_i, \lambda_{c_i}, \lambda_c, \lambda_{h_i}\}, i = 3, 4, 5$.

定理 2 柯西问题(2) 具有唯一非负时间依赖弱解 $P(t) = T(t)P(0), t \in [0, \infty)$.

推论 1 设 A 如前定义, 正数 c 如前假设, 则算子 A 生成压缩半群 $S(t)$ 是指指数衰减的, 即对任意 $c > \omega > 0, \|S(t)\| \leq e^{-\omega t}, t \geq 0$.

定理 3 设 A 如前定义, 正数 c 如前假设, 则 $A + E$ 生成的压缩半群 $T(t)$ 具有以下性质:

- 1) 当 $\{\gamma \in C; \operatorname{Re} \gamma > 0\}$ 时, $\gamma \in \sigma(A + E) \Leftrightarrow D(\gamma) = 0$;
- 2) 设 $\gamma_0 = 0$, 对任意的 $\gamma_k = \{\gamma \in C \mid \operatorname{Re} \gamma + c > 0, D(\gamma) = 0\}, \gamma_k \neq \gamma_0$, 其中 γ_k 按照实部递减排序, 即 $\operatorname{Re} \gamma_{k+1} \leq \operatorname{Re} \gamma_k, k = 1, 2, \dots, N$, 则 $\gamma_0 = 0$ 是 $A + E$ 的严格占优本征值;
- 3) 设 $\hat{p}_0 = (\hat{p}_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_c, \hat{p}_3(x), \hat{p}_4(x), \hat{p}_5(x))$ 是系统的稳态解, 且满足条件 $(\hat{p}_0, \theta) = 1$, 设 $\operatorname{Re} \gamma_1 < -\omega < \gamma_0$, 则对任意的 $p \in X, \theta = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, 存在常数 $M(\omega) > 0$, 使得 $\|T(t)p - (p, \theta)\hat{p}_0\| \leq M(\omega)e^{-\omega t}, t \geq 0$.

上述结果表明, 在一定的条件下系统的动态解以指数形式收敛于系统的稳态解.

3 系统解的稳态可用度

首先假设风险失效率 $\lambda_c = \alpha \lambda$, 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, 即系统发出预警提示后不去检查或修理, 使其继续工作, 即预警功能未能起到预警作用, 那么此时的系统模型回归到非预警系统, 由文献[5] 求得非预警系统的稳态可用度为

$$A = \frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2}{\hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \int_0^\infty \hat{p}_3(x)dx + \int_0^\infty \hat{p}_4(x)dx + \int_0^\infty \hat{p}_5(x)dx} = \frac{1+f}{N},$$

其中 $f = \frac{a_0}{\mu_1} + \frac{-r_0\mu_1 + a_0a_1}{\mu_1\mu_2}, N = 1 + \frac{a_0}{\mu_1} + \frac{-r_0\mu_1 + a_0a_1}{\mu_1\mu_2} + \frac{-r_0\mu_1 + a_0a_1}{\mu_1\mu_2}r_0 \int_0^\infty e^{-\int_0^x \mu_3(\xi)d\xi}dx + (\lambda_{c_0} + \frac{a_0}{\mu_1}\lambda_{c_1} + \frac{-r_0\mu_1 + a_0a_1}{\mu_1\mu_2}\lambda_{c_2}) \int_0^\infty e^{-\int_0^x \mu_4(\xi)d\xi}dx + (\lambda_{h_0} + \frac{a_0}{\mu_1}\lambda_{h_1} + \frac{-r_0\mu_1 + a_0a_1}{\mu_1\mu_2}\lambda_{h_2}) \int_0^\infty e^{-\int_0^x \mu_5(\xi)d\xi}dx$. 用同样的方法可以求得预警系统的稳态可用度为

$$A_1 = \frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_c}{\hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_c + \int_0^\infty \hat{p}_3(x)dx + \int_0^\infty \hat{p}_4(x)dx + \int_0^\infty \hat{p}_5(x)dx} = \frac{1+f_1}{N_1},$$

其中 $f_1 = \frac{a_0}{\mu_1} + \frac{-r_0\mu_1 + a_0a_1}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda_{c_0}}{\lambda_c}, N_1 = 1 + \frac{a_0}{\mu_1} + \frac{-r_0\mu_1 + a_0a_1}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda_{c_0}}{\lambda_c} + \frac{-r_0\mu_1 + a_0a_1}{\mu_1\mu_2}r_0 \int_0^\infty e^{-\int_0^x \mu_3(\xi)d\xi}dx +$

$(\lambda_{c_0} + \frac{a_0}{\mu_1}\lambda_{c_1} + \frac{-r_0\mu_1 + a_0a_1}{\mu_1\mu_2}\lambda_{c_2})\int_0^\infty e^{-\int_0^x \mu_4(\xi)d\xi}dx + (\lambda_{h_0} + \frac{a_0}{\mu_1}\lambda_{h_1} + \frac{-r_0\mu_1 + a_0a_1}{\mu_1\mu_2}\lambda_{h_2})\int_0^\infty e^{-\int_0^x \mu_5(\xi)d\xi}dx$. 假设 $r_0 = r_1 = r_2 = \lambda_{c_0} = \lambda_{c_1} = \lambda_{c_2} = \lambda_{h_0} = \lambda_{h_1} = \lambda_{h_2} = \lambda$, $\lambda_c = \alpha\lambda$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3(x) = \mu_4(x) = \mu_5(x) = \mu$, 利用 Mathematica 软件对以上结论进行模拟得到的结果见表 1—表 3. 由结果可以看出, 当其他参数不变时, 随着 $\alpha \rightarrow \infty$, 预警系统与非预警系统的稳态可用度的相对误差趋于 0.

表 1 预警与非预警系统相对误差变化情况 ($\mu = 1$)

	λ	μ	α	A_1	A	Error
1	0.005	1	0.1	0.999 066	0.990 05	0.009 016
2	0.005	1	1	0.994 938	0.990 05	0.004 888
3	0.005	1	10	0.990 926	0.990 05	0.000 876
4	0.005	1	100	0.990 145	0.990 05	0.000 095
5	0.005	1	1 000	0.990 061	0.990 05	0.000 009
6	0.005	1	10 000	0.990 051	0.990 05	0.000 000

表 2 预警与非预警系统相对误差变化情况 ($\mu = 0.1$)

	λ	μ	α	A_1	A	Error
1	0.005	0.1	0.1	0.988 306	0.905 13	0.083 176
2	0.005	0.1	1	0.944 563	0.905 13	0.039 432
3	0.005	0.1	10	0.911 430	0.905 13	0.006 299
4	0.005	0.1	100	0.905 800	0.905 13	0.000 670
5	0.005	0.1	1 000	0.905 198	0.905 13	0.000 067
6	0.005	0.1	10 000	0.905 137	0.905 13	0.000 000

表 3 预警与非预警系统相对误差变化情况 ($\mu = 0.01$)

	λ	μ	α	A_1	A	Error
1	0.005	0.01	0.1	0.998 083	0.980 201	0.017 881
2	0.005	0.01	1	0.989 756	0.980 201	0.009 554
3	0.005	0.01	10	0.981 891	0.980 201	0.001 689
4	0.005	0.01	100	0.980 384	0.980 201	0.000 182
5	0.005	0.01	1 000	0.980 219	0.980 201	0.000 018
6	0.005	0.01	10 000	0.980 203	0.980 201	0.000 000

参考文献:

[1] 曹晋华,程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京: 科学出版社,1986:182-244.

[2] 高超,朱广田. 具有预警功能的可修复系统[J]. 应用泛函分析学报,2011,13(1):19-29.

[3] Nianfu Yang, Dhillon BS. Availability analysis of a repairable standby human-machine system[J]. Microelectron Reliab, 1995,35:1401-1413.

[4] 方明,韩筱爽. 一类具有可修复储备部件的人-机系统的解的存在唯一性[J]. 延边大学学报:自然科学版,2008,34(1):14-17.

[5] 方明,韩筱爽. 一类具有可修复储备部件的人-机系统的解的谱特性[J]. 延边大学学报:自然科学版,2009,35(4):305-308.

[6] 姜英秀,韩筱爽. 一类具有可修复储备部件的人-机系统解的指数稳定性[J]. 延边大学学报:自然科学版,2012,38(2):108-111.

[7] 韩筱爽,程龙. 一类具有可修复储备部件的人-机系统的可靠性分析[J]. 延边大学学报:自然科学版,2013,39(1):9-13.