

文章编号: 1004-4353(2014)02-0134-04

Logistic 映射及其混沌序列特性分析

曹书豪, 徐红梅*

(延边大学工学院 电子信息工程系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 提出了一种基于频谱特征分析 Logistic 映射工作状态的方法. 首先, 对典型 Logistic 迭代映射函数, 在给定初值的情况下随参数 μ 变化得到不同的数值分布序列图和分岔图; 其次, 通过傅立叶变换得到 Logistic 映射的频谱特性, 从频域弥补了时域分析中无法观测到的 Logistic 映射混沌特性; 最后, 通过对比分析表明 Logistic 映射的类随机性适合应用于保密通信领域.

关键词: Logistic 映射; 混沌; 随机性; 保密通信

中图分类号: TN914.42

文献标识码: A

Analysis of Logistic map and chaotic sequence characteristics

CAO Shuhao, XU Hongmei*

(*Department of Electronic Information and Engineering, College of Engineering, Yanbian University, Yanji 133002, China*)

Abstract: A method which is used to analysis the status of the Logistic map based on spectral feature is proposed. Firstly, the different numerical distributions and bifurcation of typical Logistic which varies with parameters in the case of the given initial value are obtained; secondly, the frequency spectrum of Logistic is obtained by Fourier transform, which make up the defect of Logistic chaotic characteristics in the time domain analysis; finally, the genus randomness of Logistic is fit to secure communications by comparison and analysis.

Key words: Logistic map; chaos; genus randomness; secure communications

混沌信号是由确定的非线性系统产生的具有伪随机性、不可逆性和动态特性的信号. 由于混沌信号在传输过程中不易受其他外界因素的影响, 因此混沌通信和混沌加密技术成为国际电子通信领域重要的研究方向, 其研究成果已经被应用到数据安全和保密通信等领域^[1-4]. Logistic 映射是典型的一维非线性映射. 现有数学理论研究证明, 在一维非线性映射中得到的分岔序列和临界点附近的标度性质对于高维映射也同样适用^[5]. 文献[6]研究了 Logistic 混沌系统的信息熵特性, 论证了信息熵值能够区分系统的周期态和混沌态. 文献[7]对 Logistic 模型的均值突变时间序列临界

状态进行了研究, 其结果表明系统状态突变的速度和程度与映射的控制参数有关. 文献[8]研究了噪声相互关联时间对 Logistic 系统亚稳态稳定性的影响. 文献[9]研究了基于 Logistic 映射混沌扩频序列的产生方法. 基于上述研究, 本文提出了基于 Logistic 映射频谱特性, 分析系统周期态和混沌态的方法.

1 Logistic 映射

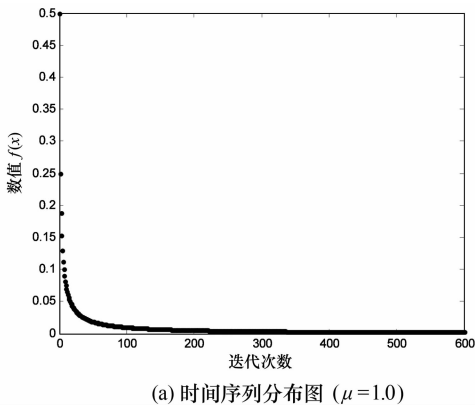
经典的 Logistic 映射描述为

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n) = \mu x_n(1 - x_n), \quad (1)$$

其中参数 $\mu \in (0, 4]$, 对所有的 $x \in [0, 1]$.

在给定参数 μ 以及系统初值 x_0 的情况下,通过对(1)式的迭代计算可以获得任意长度的 Logistic 序列. 当参数 μ 取不同值时, Logistic 映射经过多次迭代以后会出现以下情况:

- 1) 当 $\mu \in (0,1)$ 时,系统稳定于 $x=0$;
- 2) 当 $\mu \in [1,3]$ 时,系统有两个稳定点 $x=0$ 或 $x=1-\frac{1}{\mu}$;
- 3) 当 $\mu \in (3,3.449)$ 时,系统存在两个周期点 $x=\frac{1+\mu \pm \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}$;
- 4) 当 $\mu \in (3.449,3.544)$ 时,系统存在 4 个周期点;
- 5) 当 $\mu \in (3.544,3.564)$ 时,系统存在 8 个周期点;
- 6) 当 $\mu > 3.564$ 时, Logistic 映射进入倍周期分岔状态. 在此过程中,存在一个重要的度量参数 Feigenbaum 常数,即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = 4.669\,201$. 经过多次分岔后,当参数 $\mu > 3.570$ 时,系统进入混沌状态.



2 Logistic 映射混沌序列

分岔图能从总体上反映系统的倍周期运动过程. 根据倍周期分岔定理,以参数 μ 为横坐标、迭代函数值为纵坐标,由(1)式可得到处于不同参数区间的 Logistic 映射分岔图.

- 1) 当 $0 < \mu \leq 1$ 时,由(1)式得到的 Logistic 系统动力学行为很简单,只存在不动点 $x_0=0$,且 x_0 为吸引不动点,此时系统处于静止状态,如图 1 所示.
- 2) 当 $1 < \mu < 3$ 时,由(1)式得到的 Logistic 系统动力学行为相对较为简单,存在两个不动点 0 和 $1-1/\mu$,且 0 为排斥不动点, $1-1/\mu$ 为吸引不动点,如图 2(a) 所示. 对于每一个确定的参数 μ 值,系统只有一个稳定状态,即系统处于稳定的周期 1 状态,而且稳定点的数值随着参数 μ 的增大而增大. 此时 Logistic 映射的分岔图如图 2(b) 所示.
- 3) 当 $3 \leq \mu \leq 4$ 时,由(1)式得到的 Logistic 系统动力学行为变得十分复杂——由倍周期进入弱混沌状态后再进入完全混沌状态,如图 3 所示.

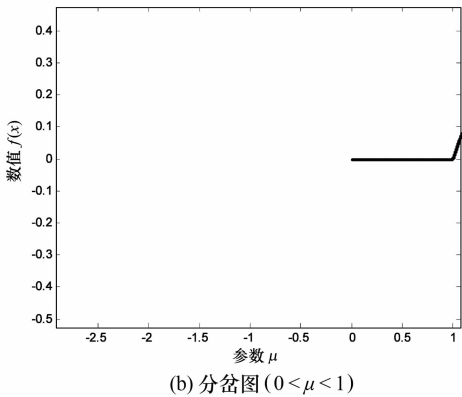


图 1 Logistic 映射分布图

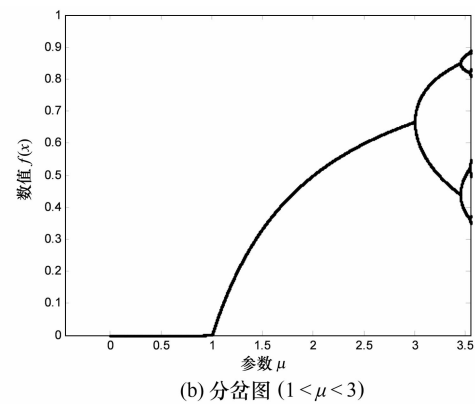
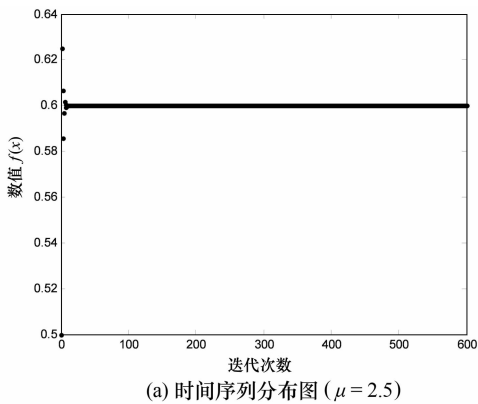
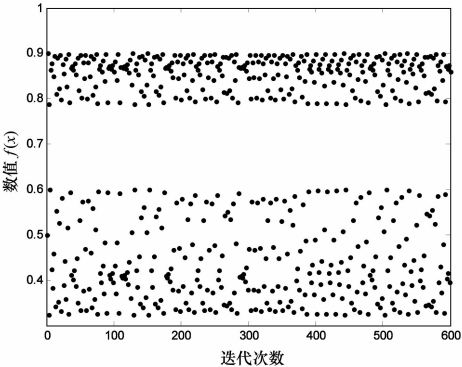
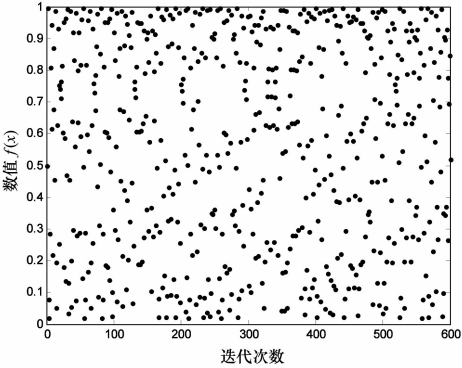


图 2 Logistic 映射分布图

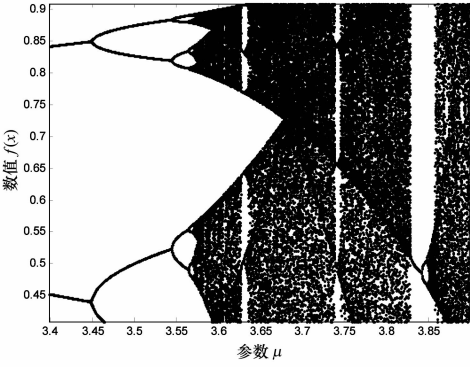
当 $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$ 时, Logistic 映射迭代序列最终稳定在两个交替的状态, 即周期 2 状态; 当 $1 + \sqrt{6} < \mu < 3.54$ 时, Logistic 映射迭代序列最终稳定在 4 个状态, 即周期 4 状态; 当 $3.544 < \mu < 3.5669$ 时, 随着参数 μ 的增大, 迭代序列相继出现周期 8、周期 16 等分岔现象; 当 $\mu > 3.57$ 以后, Logistic 系统进入了混沌状态, 即参数 $\mu = 3.56945673$ 是 Logistic 系统从倍周期分岔进入混沌状态的分界点. 由此可知, Logistic 映射的分岔点依次为: 3.0、3.4494897、3.54409、3.56407、3.568759、3.569692、3.569891 和 3.569934.



(a) 时间序列分布图 ($\mu = 3.6$)



(b) 时间序列分布图 ($\mu = 3.98$)



(c) 分岔图 ($3 \leq \mu \leq 4$)

图 3 Logistic 映射分布图

在图 3 的混沌区域内有一些由若干曲线段组成的空白带, 称做混沌区域中的周期窗口, 即当参数 $\mu = 3.836$ 时, Logistic 映射迭代序列出现了周期 3 的循环, 这表明 Logistic 映射自此进入了完全混沌状态, 系统的动力学行为由此变得更加复杂.

3 Logistic 映射功率谱特性

信号的时域描述和频域描述是一一对应的, 对于时域上不明显的特性, 在频域分析时会表现出显著的变化. 处于混沌态的 Logistic 映射时间序列不规则, 但其功率谱可能呈现出一些独有的特性. 对离散序列采用快速傅氏变换, 得到系数 $a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i \cos \frac{\pi i j}{N}$, $b_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i \sin \frac{\pi i j}{N}$. 然后, 计算 $P'_K = a_k^2 + b_k^2$, 由多组变量计算功率谱后取平均值即得最后的功率谱. 图 4—图 7 给出了初始值 $x_0 = 0.3$ 、数据长度取 600 点时, 参数 μ 分别取不同数值时对应的 Logistic 映射功率谱.

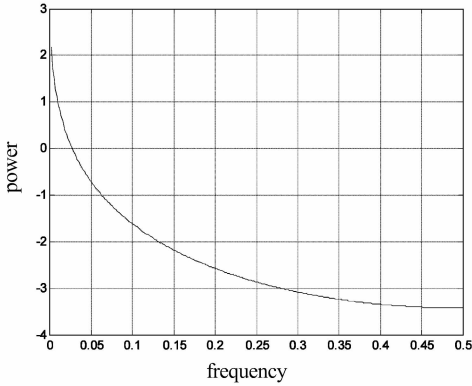


图 4 Logistic 映射功率谱 ($\mu = 1$)

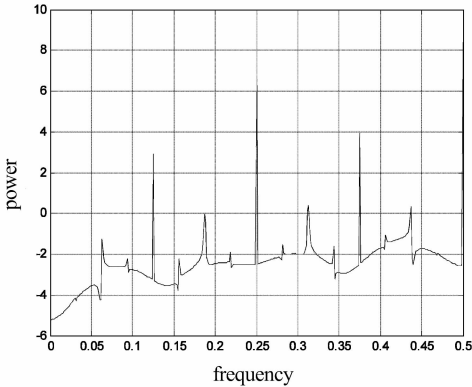


图 5 Logistic 映射功率谱 ($\mu = 3.56$)

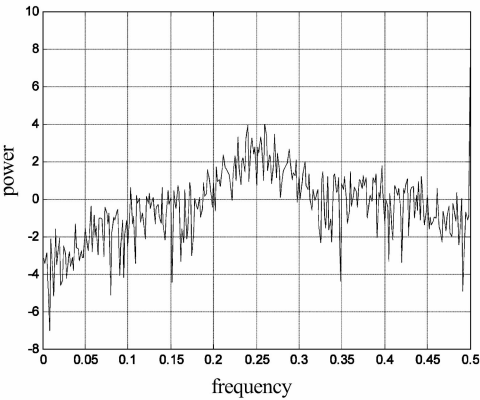


图 6 Logistic 映射功率谱($\mu = 3.6$)

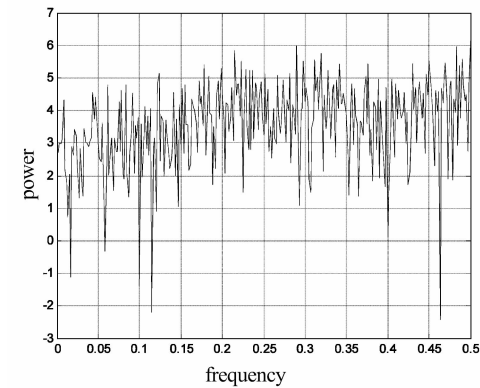


图 7 Logistic 映射功率谱($\mu = 3.98$)

从图 4—图 7 可以看到:当功率谱是单峰或多峰时,Logistic 映射对应于周期态或拟周期态;当 $\mu > 3.569$ 时,功率谱无明显的峰(连成一片),Logistic 映射处于弱混沌状态,且随着参数 μ 的增大功率谱变得更稠密,其对应的 Logistic 映射处于强混沌状态.

由以上分析可以得出,由单一 Logistic 映射产生的混沌序列处于完全混沌状态时,频谱比较平滑,并且对序列长度具有鲁棒性,与保密通信领域所要求的混沌信号具有宽带、连续频谱、对初始条件敏感依赖性的特点相吻合,说明处于混沌状态的 Logistic 映射的部分序列适用于混沌系统的通信领域.

参考文献:

[1] 刘文波. Logistic 映射的电路实现及应用[J]. 数据采集与处理,2001,16(1):129-132.

[2] 许刚,田立新. Logistic 方程中的孤立子及其控制[J]. 江苏大学学报,2004,25(3):228-231.

[3] 范九伦,张雪锋. 分段 Logistic 混沌映射及其性能分析[J]. 电子学报,2009,37(4):720-725.

[4] 邱跃洪,何晨,诸鸿文. 一种无限折叠混沌映射及其量化序列[J]. 上海交通大学学报,2002,36(12):1788-1790.

[5] 施伟锋. Logistic 映射及其混沌特性研究[J]. 光电技术应用,2004,19(2):53-56.

[6] 潘欣裕,赵鹤鸣. Logistic 混沌系统的熵特性研究[J]. 物理学报 2012,61(20):200504-1-200504-7.

[7] 颜鹏程,侯威,胡经国. 基于 Logistic 模型的均值突变时间序列临界预警研究[J]. 物理学报,2012,61(18):189202-1-189202-8.

[8] 杨林静,戴祖诚. 噪声相互关联时间对 Logistic 系统亚稳态稳定性的影响[J]. 物理学报,2012,61(10):100509-1-100509-4.

[9] 柳平,闫川,黄高显. 改进的基于 Logistic 映射混沌扩频序列的产生方法[J]. 通信学报,2007,28(2):130-140.