

文章编号: 1004-4353(2014)02-0121-04

非惯性系之间相对运动方程的探讨

熊标, 郭振平*

(延边大学理学院 物理系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 从分析非惯性系之间相对运动的特征出发,建立了非惯性系之间的相对运动方程,推导出非惯性系之间相对运动的速度和加速度的变换关系,讨论了两个转动非惯性系之间的相对运动问题,得到了以地球为转动非惯性系的向心加速度表达式.研究表明:计算质点的速度时可以视地球为惯性参考系,但是计算加速度时必须视地球为非惯性参考系.

关键词: 非惯性参考系; 相对运动; 运动学方程; 速度; 加速度

中图分类号: O311.1

文献标识码: A

The exploration of the equation of relative motion between non inertial reference frame

XIONG Biao, GUO Zhenping*

(Department of Physics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: Based on the analysis characteristics of the relative movement between the non inertial system, the equations of relative motion between the non inertial system are set, the transformation relations of the velocity and acceleration between non inertial system are deduced, and the relative motion between two rotating non inertial system is discussed, as also as the centripetal acceleration expression with the earth at the rotating non inertial system is obtained. Research shows that: when calculating the velocity of particle can see earth as inertial reference frame, but when calculating acceleration must see the earth as a non inertial reference frame.

Key words: non inertial reference frame; relative motion; kinematics equation; velocity; acceleration

研究物体的运动规律时通常选取惯性参考系进行描述,但是当物体的运动情况比较复杂时,仅采用惯性参考系难以给出一个清晰且精确的描述,还要借助于一定的非惯性参考系^[1-3]. 近年来,随着航天技术、空间探测技术和自动控制技术的高速发展,人们对机器人、航天器和卫星定位系统的精度要求越来越高,迫切需要研究非惯性系之间的相对运动问题^[4-6]. Alessi 等人^[7]从一个低地球轨道研究了地球-月球非惯性系统的特性;文献[8]基于太阳-地球-月球间的非惯性系统开发了一种用于载人航天任务的训练系统;Alipour 等人^[9]建立了非惯性系统动力学模型,并研究了悬浮的轮式移动机器人的稳定运动问题;Stephan 等人^[10]则根据非惯性系统动力学模型提出了全球定位的测距方程;姜雪洁^[11]研究了地球表面附近相对运动的偏差;王正昌^[12]根据加速度的相对性对伽利略变换进行了推广;梁立孚等人^[13]提出了在非惯性系中研究动力刚化问题;赵培菰和郭振平^[14]研究了非惯性系下的双滑轮运动的特性,指出了常见的分析误区. 基于上述文献研究,本文为进一步研究两个转动非惯性系之间的相对运动规律,将惯性系与非惯性系之间的相对运动方程推广到非惯性系之间,通过非惯性系之间相对运动的分析建

立了非惯性系之间的相对运动方程,并推导出非惯性系之间相对运动的速度和加速度的变换关系,进而讨论了以地球作为惯性参考系来计算转动速度和加速度是否合适.

1 转动非惯性系与惯性系之间的运动关系

如图 1 所示:在静止参考系 S 上建立坐标系 $O-xyz$,运动参考系 S' 以角速度 ω' 绕 z 轴逆时针转动;在运动参考系 S' 上建立坐标系 $O-x'y'z'$ (两坐标系的原点及 z 轴重合).在静止参考系 S 中任一点 P 的位矢 r 与 Ox' 的夹角为 γ_1 , Ox' 与 Ox 的夹角为 φ_1 ,则 r 投影到 S' 系为

$$r = x'i' + y'j', \tag{1}$$

而

$$\frac{di'}{dt} = \omega'j', \quad \frac{dj'}{dt} = -\omega'i', \tag{2}$$

其中 $\omega' = \frac{d\varphi_1}{dt}k$. 将(1)式两端同时对 t 求导,并将(2)式代

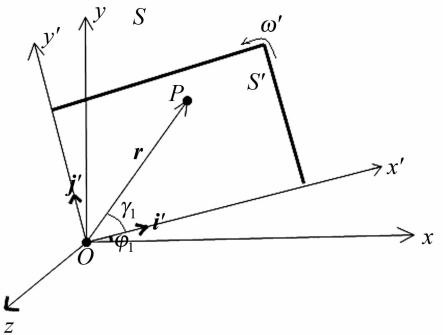


图 1 动参考系相对静止参考系旋转

入得质点 P 对静止参考系 S 的速度 $v = \frac{dr}{dt} = (\dot{x}' - \omega'y')i' + (\dot{y}' + \omega'x')j'$, 即

$$v = v' + \omega' \times r'. \tag{3}$$

(3) 式中右侧的第 1 项为相对速度 $v' = \dot{x}'i' + \dot{y}'j'$, 第 2 项为牵连速度 $\omega' \times r' = \omega'k \times (x'i' + y'j') = \omega'x'j' - \omega'y'i'$. 由于公式中既有 S 系的物理量又有 S' 系的物理量,要得到纯非惯性系之间的相对运动方程,就需消除惯性系 S 下的物理量.

2 两个转动非惯性系之间的速度关系

为消去(3)式中的 v 和 ω' , 本文再引进一个以角速度 ω'' 绕 z 轴逆时针转动的动系 S'' . 在转动参考系 S'' 上建立坐标系 $O-x''y''z''$, 使 r 与 Ox'' 的夹角为 γ_2 , Ox'' 与 Ox 的夹角为 φ_2 (图 2), 则 r 投影到动系 S'' 为 $r = x''i'' + y''j''$.

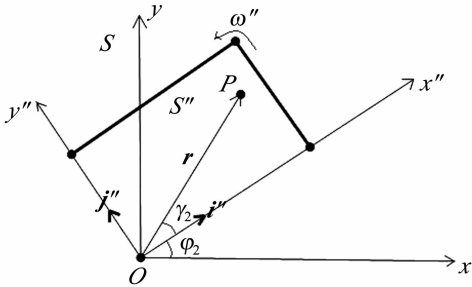


图 2 转动参考系与静止参考系间的关系

同理可以求得

$$v = \frac{dr}{dt} = v'' + \omega'' \times r'', \tag{4}$$

其中 $v'' = \dot{x}''i'' + \dot{y}''j''$, $\omega'' \times r'' = \omega'' \times (x''i'' + y''j'') = \omega''x''j'' - \omega''y''i''$. 将(4)式与(3)式联立,得

$$v' + \omega' \times r' = v'' + \omega'' \times r''. \tag{5}$$

不难证明 $r' = x'i' + y'j' = r'' = x''i'' + y''j''$, 然后将 $r' = r''$ 代入(5)式得

$$v' = v'' + (\omega'' - \omega') \times r''. \tag{6}$$

由 $\omega' = \frac{d\varphi_1}{dt}k$, $\omega'' = \frac{d\varphi_2}{dt}k$ 有

$$\omega'' - \omega' = \left(\frac{d\varphi_2}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right) k = \frac{d(\varphi_2 - \varphi_1)}{dt} k. \quad (7)$$

令 $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$, 将其代入(7)式得

$$\omega'' - \omega' = \frac{d\theta}{dt} k = \dot{\theta} k, \quad (8)$$

将(8)式代入(6)式得

$$v' = v'' + \dot{\theta} k \times r'', \quad (9)$$

(9)式中各量都是非惯性系下的,其中:如果 S' 系与 S'' 系之间无相对转动,则 $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} k \times r'' = 0$, 因此定义 $\dot{\theta} k \times r''$ 为广义牵连速度;如果 P 点相对于 S'' 系不动,则 $v'' = 0$, 故定义 v'' 为广义相对速度.

3 两个转动非惯性系之间的加速度关系

为了求加速度间的关系,将(3)式两端同时对时间 t 求导,得加速度 a 投影到 S' 系为

$$a = \frac{dv}{dt} = a' + 2\omega' \times v' - \omega'^2 r' + \dot{\omega}' \times r', \quad (10)$$

其中 $a' = \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j'$, $2\omega' \times v' = -\omega'^2 x'i' - \omega'^2 y'j'$, $\dot{\omega}' \times r' = -\dot{\omega}' y'i' + \dot{\omega}' x'j'$. (10)式中, a' 为相对加速度, $-\omega'^2 r' + \dot{\omega}' \times r'$ 为牵连加速度(包括切向加速度 $\dot{\omega}' \times r'$ 和向心加速度 $-\omega'^2 r'$), $2\omega' \times v'$ 为科氏加速度. 同理,将(4)式两端同时对 t 求导,可得加速度 a 投影到 S'' 系为

$$a = a'' + 2\omega'' \times v'' - \omega''^2 r'' + \dot{\omega}'' \times r'', \quad (11)$$

其中 $a'' = \ddot{x}''i'' + \ddot{y}''j''$, $2\omega'' \times v'' = 2\omega'' \times (\dot{x}''i'' + \dot{y}''j'')$, $-\omega''^2 r'' = -\omega''^2 (x''i'' + y''j'')$, $\dot{\omega}'' \times r'' = \dot{\omega}'' \times (x''i'' + y''j'')$. 将(11)式与(10)式相减得

$$a' = a'' + 2\omega'' \times v'' - 2\omega' \times v' - (\omega''^2 - \omega'^2) r' + (\dot{\omega}'' - \dot{\omega}') \times r'. \quad (12)$$

由(8)式可得

$$\dot{\omega}'' - \dot{\omega}' = \frac{d\dot{\theta}}{dt} k = \ddot{\theta} k. \quad (13)$$

将(8)、(9)式和(13)式代入(12)式得 $a' = a'' + 2\omega'' \times v'' - 2\omega' \times (v'' + \dot{\theta} k \times r'') - (\omega''^2 - \omega'^2) r' + \ddot{\theta} k \times r' = a'' + 2\dot{\theta} k \times v'' - (\omega''^2 - \omega'^2) r' + \ddot{\theta} k \times r'$, 即

$$a' = a'' + 2\dot{\theta} k \times v'' - (\omega''^2 - \omega'^2) r' + \ddot{\theta} k \times r'. \quad (14)$$

显然,(10)式中的向心加速度是 $-\omega'^2 r'$, 而(14)式中的向心加速度不是 $-\dot{\theta}^2 r''$. 这说明,对于平面转动参考系,加速度公式(10)并不适用于非惯性系之间的相对运动. 以地球为参考系,实际的向心加速度公式应该为

$$a_{\text{向}} = -(\omega''^2 - \omega'^2) r''. \quad (15)$$

4 结论

本文通过两个转动参考系间相对运动的分析,研究了两个非惯性参考系之间的运动关系,推导出非惯性系之间相对运动的速度和加速度表达式,并给出了以地球为非惯性参考系的向心加速度公式. 本文研究表明,对于相对运动的运动学方程,在由一重非惯性系(由一个惯性系和一个非惯性系构成)向二重非惯性系(由两个非惯性系构成)推广的过程中,对于平面转动参考系,只有速度公式能用于二重非惯性系中,而加速度公式不再适用. 因此,以地球为惯性系建立的相对运动方程,只有速度方程可用,而加速度方程必须进行修正. 本文研究仅涉及宏观低速范围,关于高速条件下的相对论效应将另文讨论.

参考文献：

[1] Minguzzi E. The Minkowski metric in non-inertial observer radar coordinates[J]. American Journal of Physics, 2005,73(12):1117-1121.

[2] Baranyi L. Lift and drag evaluation in translating and rotating non-inertial systems[J]. Journal of Fluids & Structures, 2005,20(1):25-34.

[3] Poludnenko A Y, Khokhlov A M. Computation of fluid flows in non-inertial contracting, expanding, and rotating reference frames[J]. Journal of Computational Physics, 2007,220(2):678-711.

[4] Taheri B, Richer E. Equidistance target-following controller for under actuated autonomous underwater vehicles [J]. International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics, 2013,6(2):108-125.

[5] Jayaram S. Fault tolerant autonomous rendezvous and docking architecture for spacecraft in presence of control actuator failures[J]. International Journal of Intelligent Unmanned Systems, 2013,1(1):5-20.

[6] Chahl J. Three biomimetic flight control sensors[J]. International Journal of Intelligent Unmanned Systems, 2014, 2(1):27-39.

[7] Alessi E M, Gómez G, Masdemont J J. Two-manoevres transfers between LEOs and Lissajous orbits in the Earth-Moon system[J]. Advances in Space Research, 2010,45(10):1276-1291.

[8] Renk F, Hechler M, Messerschmid E. Exploration missions in the Sun-Earth-Moon system: a detailed view on selected transfer problems[J]. Acta Astronautica, 2010,67(1/2):82-96.

[9] Alipour K, Moosavian A. How to ensure stable motion of suspended wheeled mobile robots[J]. Industrial Robot, 2011,38(2):139-152.

[10] Stephan J G G. One-way light speed determination using the range measurement equation of the GPS[J]. Applied Physics Research, 2011,3(1):110-114.

[11] 姜雪洁. 地表附近相对运动偏差研究[J]. 延边大学学报:自然科学版,2002,28(4):257-260.

[12] 王正昌. 据加速度的相对性事实对伽利略变换进行推广[J]. 云南民族大学学报:自然科学版,2007,12(4):321-323.

[13] 梁立孚,王鹏,宋海燕. 在非惯性系中研究动力刚化问题[J]. 哈尔滨工程大学学报,2012,33(8):1052-1056.

[14] 赵培蕊,郭振平. 双滑轮运动分析的常见误区[J]. 延边大学学报:自然科学版,2013,39(1):21-23.



科技信息

我国科学家发现全新的视网膜色素变性机制

科技部门户网站报道(2014-04-24) 近日,973 计划“近视发病机理及干预的基础研究”项目研究团队原创性发现了常染色体隐性遗传视网膜色素变性的高发致病基因 SLC7A14,并揭示了 SLC7A14 基因突变的发生率及其生物学机理. 这是第一个由国内科学家独立发现的常染色体隐性视网膜色素变性致病基因,标志着我国在相关研究领域实现了突破.

视网膜色素变性是眼科中最常见的遗传病,由于已知致病基因超过 70 个,因而精确诊断和分型一直是临床上的大难题. 973 计划“近视发病机理及干预的基础研究”项目致力于开展视网膜色素变性相关研究,项目首席科学家温州医科大学瞿佳教授团队通过新一代测序技术,成功地在 2%的视网膜色素变性患者中找到了全新的致病基因 SLC7A14,并深入开展了其致病机制的研究. 由于该基因引起的疾病十分严重且发病较早,因而引起国际上的高度关注,该成果也为后续的疾病基因治疗和药物干预等奠定了基础.