文章编号：1004-4353(2014)02-0114-03

自然数方幂和公式的一种新推法

朴元俊，　廉晓龙
（延边大学师范分院，吉林 延吉 133000）

摘要：通过建构自然数方幂 n^k 的一组排列数线性组合解析式及其系数表(类杨辉三角)，用相对简捷的方法推导出一个比较新颖的自然数方幂和公式.

关键词：母函数；排列数；类杨辉三角；自然数方幂和
中图分类号：O241　　　　**文献标识码**：A

A new method on formula of power sum of natural numbers

PIAO Yuanjun，　LIAN Xiaolong
(*Branch Normal College*，*Yanbian University*，*Yanji* 133000，*China*)

Abstract：We deduce the formula of the square sum of natural numbers by giving the coefficients of the linear expression of some arrangement numbers for each n^k (similar with Pascal's triangle). This gives a simpler way than the traditional one to deduce this formula.

Key words：generating function；permutation；similar with Pascal's triangle；sums of powers of natural numbers

求自然数方幂和既是一个古典的数学问题，也是当今数学研究的热点问题之一. 文献[1-5]的作者分别采用逐差法、贝努利数的性质、递推方法等得到了许多有益的研究结果，但其推导过程和结果较为复杂. 本文利用组合数学中的母函数理论[6]和排列组合知识，用相对简捷的方法推导出一种比较新颖的自然数方幂和公式.

容易知道 n^2 和 n^3 都能解析成一组排列数的线性组合，如 $n^2=A_{n+1}^2-A_n^1$，$n^3=A_{n+2}^3-3A_{n+1}^2+A_n^1$. 更一般地，自然数方幂 $n^i\,(i\in\mathbf{N})$ 亦能解析成一组排列数 $A_{n+i-j}^{i-j+1}\,(j=1,2,\cdots,i)$ 的线性组合. 于是，可以把求自然数方幂和的问题转化成求数列 $\{A_{n+m}^{m+1}\}$ 的前 n 项和的问题来加以解决.

1　预备定理及其证明

引理 1[6]　数列 $\{1,1,1,\cdots\}$ 的母函数为 $\dfrac{1}{1-x}$，即 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}x^{i-1}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-x}$.

引理 2[6]　$(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots)^n=\dfrac{1}{(1-x)^n}$ 的展开式中，x^k 的系数为 C_{n-1+k}^{n-1}.

定理 1　数列 $\{A_{n+m}^{m+1}\}\,(m\in\mathbf{N})$ 的前 n 项和为

$$\sum_{i=1}^{n}A_{i+m}^{m+1}=A_{1+m}^{m+1}+A_{2+m}^{m+1}+A_{3+m}^{m+1}+\cdots+A_{n-1+m}^{m+1}+A_{n+m}^{m+1}=\frac{1}{m+2}A_{n+m+1}^{m+2}. \tag{1}$$

收稿日期：2014-02-20
作者简介：朴元俊(1960—)，男，副教授，研究方向为组合数学.

证明　在引理 1 中,设 $G(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x^{i-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\cdots$. 令 $G_1(x)=G'(x)$, $G_{m+1}(x)=[G_m(x)]'$, $m=1,2,3,\cdots$, 则易知 $G_{m+1}(x)$ 恰好是数列 $\{A_{n+m}^{m+1}\}$ 的母函数,且 $G_{m+1}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}A_{i+m}^{m+1}x^{i-1}=\frac{(m+1)!}{(1-x)^{m+2}}$, $m=0,1,2,3,\cdots$. 根据引理 1 有

$$\frac{(m+1)!}{(1-x)^{m+3}}=\sum_{i=1}^{\infty}x^{i-1}\sum_{i=1}^{\infty}A_{i+m}^{m+1}x^{i-1}=\sum_{i=1}^{1}A_{i+m}^{m+1}+(\sum_{i=1}^{2}A_{i+m}^{m+1})x+(\sum_{i=1}^{3}A_{i+m}^{m+1})x^2+\cdots+$$
$$(\sum_{i=1}^{n-1}A_{i+m}^{m+1})x^{n-2}+(\sum_{i=1}^{n}A_{i+m}^{m+1})x^{n-1}+\cdots.$$

根据引理 2,并比较上式两边 x^{n-1} 的系数,得 $\sum_{i=1}^{n}A_{i+m}^{m+1}=(m+1)!\,C^{m+2}{}_{n+m+1}=\frac{1}{m+2}A_{n+m+1}^{m+2}$. 证毕.

定理 2　设自然数方幂 $n^i(i\in\mathbf{N})$ 关于排列数 $A_{n+i-j}^{i-j+1}(j=1,2,\cdots,i)$ 的线性组合解析式为

$$n^i=\sum_{j=1}^{i}T_{ij}A_{n+i-j}^{i-j+1}=T_{i1}A_{n+i-1}^{i}+T_{i2}A_{n+i-2}^{i-1}+\cdots+T_{ij}A_{n+i-j}^{i-j+1}+\cdots+T_{ii-1}A_{n+1}^{2}+T_{ii}A_{n}^{1},\tag{2}$$

则系数(T_{ij})有递推关系:

$$T_{ij}=-(i-j+1)T_{i-1\,j-1}+T_{i-1\,j},\ 1<j<i,\ T_{i1}=1,\ T_{ii}=-T_{i-1\,i-1}.\tag{3}$$

证明　观察排列恒等式 $A_{n+i-j}^{i-j+1}=A_{n+i-j+1}^{i-j+1}-(i-j+1)A_{n+i-j}^{i-j}$, $nA_{n+i-j}^{i-j}=A_{n+i-j}^{i-j+1}$, $i-j\geqslant 1$, $j=1,2,\cdots,i-1$, 再结合(2)式的意义,有:

$n=T_{11}A_n^1$, 此时有 $T_{11}=1$;

$n^2=T_{21}A_{n+1}^2+T_{22}A_n^1=nT_{11}A_n^1=T_{11}n^2=T_{11}[(n+1)n-n]=A_{n+1}^2-A_n^1$, 此时有 $T_{21}=T_{11}=1$, $T_{22}=-T_{11}=-1$;

$n^3=T_{31}A_{n+2}^3+T_{32}A_{n+1}^2+T_{33}A_n^1=n(T_{21}A_{n+1}^2+T_{22}A_n^1)=nT_{21}(A_{n+2}^2-2A_{n+1}^1)+T_{22}(A_{n+2}^2-A_n^1)=T_{21}A_{n+2}^3+(-2T_{21}+T_{22})A_{n+1}^2+(-T_{22})A_n^1=A_{n+2}^3-3A_{n+1}^2+A_n^1$, 此时有 $T_{31}=T_{21}=1$, $T_{32}=-2T_{21}+T_{22}=-3$, $T_{33}=-T_{22}=1$;

$\cdots$.

依此类推,令 $n^{i-1}=T_{i-1\,1}A_{n+i-2}^{i-1}+T_{i-1\,2}A_{n+i-3}^{i-2}+\cdots+T_{i-1\,j-1}A_{n+i-j}^{i-j+1}+T_{i-1\,j}A_{n+i-j-1}^{i-j}+\cdots+T_{i-1\,i-2}A_{n+1}^2+T_{i-1\,i-1}A_n^1$, 则有

$$\begin{aligned}n^i&=n[T_{i-1\,1}A_{n+i-2}^{i-1}+T_{i-1\,2}A_{n+i-3}^{i-2}+\cdots+T_{i-1\,j-1}A_{n+i-j}^{i-j+1}+T_{i-1\,j}A_{n+i-j-1}^{i-j}+\cdots+T_{i-1\,i-2}A_{n+1}^2+\\&T_{i-1\,i-1}A_n^1]=nT_{i-1\,1}[A_{n+i-1}^{i-1}-(i-1)A_{n+i-2}^{i-2}]+nT_{i-1\,2}[A_{n+i-2}^{i-2}-(i-2)A_{n+i-3}^{i-3}]+\cdots+\\&nT_{i-1\,j-1}[A_{n+i-j+1}^{i-j+1}-(i-j+1)A_{n+i-j}^{i-j}]+nT_{i-1\,j}[A_{n+i-j}^{i-j}-(i-j)A_{n+i-j-1}^{i-j-1}]+\cdots+\\&nT_{i-1\,i-2}[A_{n+2}^2-2A_{n+1}^1]+T_{i-1\,i-1}(A_{n+1}^2-A_n^1)=\\&T_{i-1\,1}A_{n+i-1}^{i}+[-(i-1)T_{i-1\,1}+T_{i-1\,2}]A_{n+i-2}^{i-1}+[-(i-2)T_{i-1\,2}+T_{i-1\,3}]A_{n+i-3}^{i-2}+\cdots+\\&[-(i-j+1)T_{i-1\,j-1}+T_{i-1\,j}]A_{n+i-j}^{i-j+1}+\cdots+(-2T_{i-1\,i-2}+T_{i-1\,i-1})A_{n+1}^2+(-T_{i-1\,i-1})A_n^1.\end{aligned}\tag{4}$$

由(2)式和(4)式,得递推关系 $T_{ij}=-(i-j+1)T_{i-1\,j-1}+T_{i-1\,j}$, $1<j<i$, $T_{i1}=1$, $T_{ii}=-T_{i-1\,i-1}$. 证毕.

将方幂 $n^i(i\in\mathbf{N})$ 的系数(T_{ij})逐次排列成图 1 所示的"金字塔"形,不难发现:在类似于杨辉三角的"金字塔三角形"状态排列中,每个数都是整数,T_{ij} 表示第 i 行第 j 个数(i 代表行号,j 代表排列序号);从第 2 行起,每一行数的"符号"交替变换,奇数行的首位数和末数都是 1,偶数行的首位数是1、末位数是−1,其他每个数都等于它的左上方的

1
1　−1
1　−3　1
1　−6　7　−1
1　−10　25　−15　1
1　−15　65　−90　31　−1
……………………………

图 1　类杨辉三角

数的相反数乘以自己的倒数序号加上右上方的数.依据递推关系(3),整个"金字塔三角形"图表可以继续写下去.本文称此图表为"类杨辉三角".

2　主要公式的推导

根据定理2的意义,自然数方幂为

$$n^k=\sum_{j=1}^{k}T_{kj}A_{n+k-j}^{k-j+1}=T_{k1}A_{n+k-1}^{k}+T_{k2}A_{n+k-2}^{k-1}+T_{k3}A_{n+k-3}^{k-2}+\cdots+$$
$$T_{kj}A_{n+k-j}^{k-j+1}+\cdots+T_{kk-1}A_{n+1}^{2}+T_{kk}A_{n}^{1},\ k\in\mathbf{N}\,(T_{kj},\ j=1,2,\cdots,k\text{ 从图 1 中索取}),$$

则自然数的 k 次方幂和(数列 $\{n^k\}$ 的前 n 项和)为

$$\sum_{i=1}^{n}i^k=T_{k1}\sum_{i=1}^{n}A_{i+k-1}^{k}+T_{k2}\sum_{i=1}^{n}A_{i+k-2}^{k-1}+T_{k3}\sum_{i=1}^{n}A_{i+k-3}^{k-2}+\cdots+T_{kj}\sum_{i=1}^{n}A_{i+k-j}^{k-j+1}+\cdots+$$
$$T_{kk-1}\sum_{i=1}^{n}A_{i+1}^{2}+T_{kk}\sum_{i-1}^{n}A_{i}^{1}.$$

根据定理1有 $\sum_{i=1}^{n}A_{i+k-j}^{k-j+1}=(k-j+1)!\,C^{k-j+2}{}_{n+k-j+1}=\dfrac{1}{k-j+2}A_{n+k-j+1}^{k-j+2}$, $j=1,2,\cdots,k$,所以

$$\sum_{i=1}^{n}i^k=\sum_{j=1}^{k}(k-j+1)!\,T_{kj}C_{n+k-j+1}^{k-j+2}=\sum_{j=1}^{k}T_{kj}\ \frac{A_{n+k-j+1}^{k-j+2}}{k-j+2}.\tag{5}$$

基于系数图表(类杨辉三角)的上述求自然数方幂和的公式,仅利用初等排列组合计算即可,这既简捷、新颖,又便于实现计算机编程.

3　实例

例1　计算前 n 个自然数的平方和 $\sum_{i=1}^{n}i^2$ 与立方和 $\sum_{i=1}^{n}i^3$.

解　由(5)式可知:

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\sum_{j=1}^{2}T_{2j}\frac{A_{n+3-j}^{4-j}}{4-j}=T_{21}\frac{A_{n+2}^{3}}{3}+T_{22}\frac{A_{n+1}^{2}}{2}=\frac{(n+2)(n+1)n}{3}-\frac{(n+1)n}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^3=\sum_{j=1}^{3}(4-j)!\,T_{3j}C_{n+4-j}^{5-j}=3!\,T_{31}C_{n+3}^{4}+2!\,T_{32}C_{n+2}^{3}+T_{33}C_{n+1}^{2}=$$
$$\frac{3!\,(n+3)(n+2)(n+1)n}{4!}+\frac{2!\,(-3)(n+2)(n+1)n}{3!}+\frac{(n+1)n}{2!}=\left[\frac{1}{2}(n+1)n\right]^2.$$

参考文献:

[1]　杨志强.用逐差法求解自然数方幂之和[J].数学的实践与认识,2003,33(11):136-137.
[2]　沈明鸣.关于自然数 K 次幂和的讨论[J].宁波高等专科学校学报,2003,15(4):12-15.
[3]　王维芳.自然数次方幂和的一种简捷算法[J].数学教学研究,2008,27(5):49-50.
[4]　朱伟义.有关自然数方幂和公式系数的一个新的递推公式[J].数学的实践与认识,2004,34(10):170-173.
[5]　朴元俊,廉晓龙.求自然数幂和的一种新方法[J].中国校外教育,2014(4):120.
[6]　田秋成.组合数学[M].北京:电子工业出版社,2006.