文章编号: 1004-4353(2014)02-0109-05

2×3 量子系统中互不偏的不可扩展最大纠缠基

李玮, 林平, 郑鸿楠, 秦川棋, 杨强, 陶元红*
(延边大学理学院 数学系,吉林 延吉 133002)

摘要: 讨论了 2×3 量子系统中不可扩展的最大纠缠基和互不偏基. 首先证明一组由 4 个彼此规范正交的最大纠缠态可以构成 2×3 量子系统中不可扩展的最大纠缠基;其次通过变换 C^3 空间的基底,构造另一组 2×3 量子系统中不可扩展的最大纠缠基,并证明这两组基是互不偏的;最后,在保证互不偏的前提下,将这两组不可扩展的最大纠缠基进行完备化.

关键词: 量子系统; 最大纠缠态; 不可扩展的最大纠缠基; 互不偏基
中图分类号: O177.3　　**文献标识码:** A

Mutually unbiased and unextendible maximally entangled bases in 2×3 quantum system

LI Wei, LIN Ping, ZHENG Hongnan, QIN Chuanqi, YANG Qiang, TAO Yuanhong*
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: The unextendible maximally entangled basis and mutually unbiased basis in 2×3 quantum system were discussed. Firstly, 4 orthonormal maximally entangled states were proved to construct an unextendible maximally entangled basis in 2×3 quantum system; secondly, through changing the bases of space C^3, another unextendible maximally entangled basis was established, which was proved to be unbiased with the first one; finally, the two unextendible maximally entangled bases were unbiasedly completed.

Key words: quantum system; maximally entangled states; unextendible maximally entangled basis; mutually unbiased bases

量子纠缠作为一种重要的物理资源,广泛应用于量子处理过程中,如量子计算、量子编码、量子隐形传态等[1]. 1999 年,文献[2]引入多体量子系统中的不可扩展的直积基(UPB)的概念以来,已取得大量的具有实际应用的理论成果[3]. 2011 年,UPB 的概念被推广到不可扩展的最大纠缠基(UMEB)[4]. 2013 年,陈斌等[5]将 UMEB 的概念进一步推广到了由不同维数空间构成的两体系统中,建立了一种在任意两体空间 $C^d \otimes C^{d'}$ ($\frac{d'}{2} \leqslant d \leqslant d'$) 上含有 d^2 个成员的 UMEB 的构造方法,并在 $C^2 \otimes C^3$ 中构造了两组彼此互不偏的完备 UMEB. 互不偏基在量子信息处理中有着许多重要的应用,例如量子态层析、加密协议和均值王氏问题[6-11].

本文主要讨论了 2×3 量子系统中彼此互不偏的不可扩展的最大纠缠基. 通过变换 C^3 空间的基底,构造了彼此无偏的两组均由 4 个彼此规范正交的最大纠缠态构成的 2×3 量子系统中不可扩展的最大纠缠基,并在保证无偏的前提下,将这两组不可扩展的最大纠缠基进行了完备化.

收稿日期: 2013-12-26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11361065);吉林省自然科学基金资助项目(201215239)

* **通信作者:** 陶元红(1973—),女,博士,副教授,研究方向为泛函分析及应用.

1 $C^2 \otimes C^3$ 中不可扩展的最大纠缠基

定义 1[5] 设 $|\varphi\rangle$ 为两体系统 $C^d \otimes C^{d'}(d \leqslant d')$ 中的任意态. 称 $|\varphi\rangle$ 为 $d \otimes d'$ 最大纠缠态,是指对子系统 $A(\dim A = d)$ 的任意规范正交完备基 $\{|i_A\rangle\}$,都存在子系统 $B(\dim B = d')$ 的规范正交基 $\{|i_B\rangle\}$,使得 $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i=0}^{d-1} |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle$.

定义 2[4] 由态 $\{|\varphi_i\rangle \in C^d \otimes C^{d'}: i = 1,2,\cdots,n, n < dd'\}$ 构成的集合称为含有 n 个成员的不可扩展的最大纠缠基(UMEB),当且仅当如下条件成立:

1) $|\varphi_i\rangle$, $i = 1,2,\cdots,n$ 均为最大纠缠态;

2) $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$;

3) 若对任意 $i = 1,2,\cdots,n$, 均有 $\langle\varphi_i|\varphi\rangle = 0$, 则 φ 必不是最大纠缠的.

首先构造 2×3 量子系统中的不可扩展的最大纠缠基. 考虑 $C^2 \otimes C^3$ 中如下 4 个彼此规范正交的最大纠缠态:

$$\begin{cases} |\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00'\rangle + |11'\rangle), \\ |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00'\rangle - |11'\rangle), \\ |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10'\rangle + |01'\rangle), \\ |\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10'\rangle - |01'\rangle). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, $\{|0'\rangle, |1'\rangle, |2'\rangle\}$ 分别为 C^2 和 C^3 中的标准正交基.

定理 1 (1) 式中的 4 个最大纠缠态构成了 $C^2 \otimes C^3$ 中一组不可扩展的最大纠缠基.

证明 显然(1) 式中的每个态都是 $C^2 \otimes C^3$ 中的最大纠缠态,且彼此规范正交.

下证若存在态 $|\psi\rangle$,使得 $\langle\varphi_i|\psi\rangle = 0$, $i = 0,1,2,3$, 则 $|\psi\rangle$ 必是直积态. 若 $|\psi\rangle$ 是纠缠的,则可将 $|\psi\rangle$ Schmidt 分解为 $|\psi\rangle = (\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V})(\sqrt{\lambda_0}\ |00'\rangle + \sqrt{\lambda_1}\ |11'\rangle)$,其中 $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, $\boldsymbol{U} = (u_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{V} = (v_{ij})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$ 均为幺正矩阵. 由已知 $\langle\varphi_0|\psi\rangle = 0$ 可得

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 00'| + \langle 11'|)(\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V})(\sqrt{\lambda_0}\ |00'\rangle + \sqrt{\lambda_1}\ |11'\rangle) = \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{2}}\langle 0|\boldsymbol{U}|0\rangle\langle 0'|\boldsymbol{V}|0'\rangle + \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{2}}\langle 1|\boldsymbol{U}|1\rangle\langle 1'|\boldsymbol{V}|1'\rangle + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{2}}\langle 1|\boldsymbol{U}|0\rangle\langle 1'|\boldsymbol{V}|0'\rangle + \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{2}}\langle 0|\boldsymbol{U}|1\rangle\langle 0'|\boldsymbol{V}|1'\rangle,$$

即

$$\sqrt{\lambda_0}\,u_{11}v_{11} + \sqrt{\lambda_1}\,u_{12}v_{12} + \sqrt{\lambda_0}\,u_{21}v_{21} + \sqrt{\lambda_1}\,u_{22}v_{22} = 0. \tag{2}$$

同理由 $\langle\varphi_1|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 00'| - \langle 11'|)(\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V})(\sqrt{\lambda_0}\ |00'\rangle + \sqrt{\lambda_1}\ |11'\rangle) = 0$ 可得

$$\sqrt{\lambda_0}\,u_{11}v_{11} + \sqrt{\lambda_1}\,u_{12}v_{12} - \sqrt{\lambda_0}\,u_{21}v_{21} - \sqrt{\lambda_1}\,u_{22}v_{22} = 0. \tag{3}$$

由 $\langle\varphi_2|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 10'| + \langle 01'|)(\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V})(\sqrt{\lambda_0}\ |00'\rangle + \sqrt{\lambda_1}\ |11'\rangle) = 0$ 可得

$$\sqrt{\lambda_0}\,u_{21}v_{11} + \sqrt{\lambda_1}\,u_{22}v_{12} + \sqrt{\lambda_0}\,u_{11}v_{21} + \sqrt{\lambda_1}\,u_{12}v_{22} = 0. \tag{4}$$

由$\langle\varphi_3|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 10'|-\langle 01'|)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{V})(\sqrt{\lambda_0}\;|00'\rangle+\sqrt{\lambda_1}\;|11'\rangle)=0$ 可得

$$\sqrt{\lambda_0}\,u_{21}v_{11}+\sqrt{\lambda_1}\,u_{22}v_{12}-\sqrt{\lambda_0}\,u_{11}v_{21}-\sqrt{\lambda_1}\,u_{12}v_{22}=0. \tag{5}$$

显然，(2)—(5) 式可写成

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{21} & u_{22} \\ u_{21} & u_{22} & u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} & -u_{11} & -u_{12} \\ u_{11} & u_{12} & -u_{21} & -u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_0} & & & \\ & \sqrt{\lambda_1} & & \\ & & \sqrt{\lambda_0} & \\ & & & \sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}=0, \tag{6}$$

即为齐次方程组

$$A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}. \tag{7}$$

其中 $A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \sigma_x\boldsymbol{U} \\ \sigma_x\boldsymbol{U} & -\boldsymbol{U} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ W \end{pmatrix}$；$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$；$W=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_0} & \\ & \sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix}$；$\sigma_x=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$；$\boldsymbol{v}=(v_{11}\;v_{12}\;v_{21}\;v_{22})^{\mathrm{T}}$，T 表示转置. 显然 $\det A=\lambda_0\lambda_1\cdot\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \sigma_x\boldsymbol{U} \\ \sigma_x\boldsymbol{U} & -\boldsymbol{U} \end{pmatrix}=\lambda_0\lambda_1\cdot\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \sigma_x\boldsymbol{U} \\ 0 & -2\boldsymbol{U} \end{pmatrix}=4\lambda_0\lambda_1(\det\boldsymbol{U})^2\neq 0$，否则 $\det\boldsymbol{U}=0$，这与 $\boldsymbol{U}$ 是幺正矩阵矛盾，所以齐次方程组(7) 只有零解，即 $\boldsymbol{v}=(v_{11}\;v_{12}\;v_{21}\;v_{22})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$，从而 $v_{11}=v_{12}=v_{21}=v_{22}=0$，于是 $\det\boldsymbol{V}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & v_{13} \\ 0 & 0 & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix}=0$，这与 $\boldsymbol{V}$ 是幺正矩阵矛盾. 因此，关于 $|\psi\rangle$ 是纠缠的假设不真，$|\psi\rangle$ 必是直积态.

综上，(1) 式中的 4 个向量构成了 $C^2\otimes C^3$ 中的一组不可扩展的最大纠缠基.

2　2×3 量子系统中互不偏的不可扩展最大纠缠基

首先在 C^3 中选取与$\{|0'\rangle,|1'\rangle,|2'\rangle\}$不同的另一个标准正交基(此组基与文献[5] 中的完全不同)：

$$\begin{cases} |x'\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|0'\rangle+\frac{\sqrt{3}+i}{2}\,|1'\rangle+|2'\rangle), \\ |y'\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}i-1}{2}\,|0'\rangle-i\,|1'\rangle+|2'\rangle), \\ |z'\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(i\,|0'\rangle+|1'\rangle-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\,|2'\rangle). \end{cases} \tag{8}$$

然后利用定理 1，构造 $C^2\otimes C^3$ 中的第 2 组不可扩展的最大纠缠基

$$\begin{cases} |\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0x'\rangle+|1y'\rangle), \\ |\psi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0x'\rangle-|1y'\rangle), \\ |\psi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1x'\rangle+|0y'\rangle), \\ |\psi_3\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1x'\rangle-|0y'\rangle). \end{cases} \tag{9}$$

容易证得，(1) 式和(9) 式这两组不可扩展的最大纠缠基是互不偏的，即

$$|\langle\varphi_i|\psi_j\rangle|=\frac{1}{\sqrt{6}},\ i,j=0,1,2,3. \tag{10}$$

事实上,由于

$$\langle\varphi_0|\psi_0\rangle=\langle\varphi_1|\psi_0\rangle=\langle\varphi_2|\psi_2\rangle=\langle\varphi_1|\psi_1\rangle=\langle\varphi_3|\psi_3\rangle=\frac{1}{2}(\langle 0'|x'\rangle+\langle 1'|y'\rangle),$$

$$\langle\varphi_3|\psi_2\rangle=\langle\varphi_2|\psi_3\rangle=\langle\varphi_0|\psi_1\rangle=\frac{1}{2}(\langle 0'|x'\rangle-\langle 1'|y'\rangle),$$

$$\langle\varphi_2|\psi_0\rangle=\langle\varphi_0|\psi_2\rangle=-\langle\varphi_1|\psi_3\rangle=-\langle\varphi_3|\psi_1\rangle=\frac{1}{2}(\langle 0'|y'\rangle+\langle 1'|x'\rangle),$$

$$\langle\varphi_3|\psi_0\rangle=\langle\varphi_1|\psi_2\rangle=-\langle\varphi_0|\psi_3\rangle=-\langle\varphi_2|\psi_1\rangle=\frac{1}{2}(\langle 0'|y'\rangle-\langle 1'|x'\rangle),$$

易得$\langle 1'|x'\rangle=\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}$, $\langle 1'|y'\rangle=\frac{-i}{\sqrt{3}}$, $\langle 0'|x'\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\langle 0'|y'\rangle=\frac{\sqrt{3}i-1}{2\sqrt{3}}$,所以(10)式显然成立.

最后在保证无偏性的前提下,将如上两组不完备的不可扩展的最大纠缠基(1)和(9)分别完备化,即分别再增加2个保证彼此均规范正交的直积态,从而分别构造出两组由6个态构成的完备的规范正交基.首先增补向量$|\varphi_4\rangle=|02'\rangle$和$|\varphi_5\rangle=|12'\rangle$到(1)式中,然后再增补向量$|\psi_4\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0z'\rangle+|1z'\rangle)$和$|\psi_5\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0z'\rangle-|1z'\rangle)$到(9)式中,则得到$C^2\otimes C^3$空间中如下两组完备的规范正交基:

$$\begin{cases}|\varphi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00'\rangle+|11'\rangle),\\ |\varphi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00'\rangle-|11'\rangle),\\ |\varphi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|10'\rangle+|01'\rangle),\\ |\varphi_3\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|10'\rangle-|01'\rangle),\\ |\varphi_4\rangle=|02'\rangle,\\ |\varphi_5\rangle=|12'\rangle.\end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases}|\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0x'\rangle+|1y'\rangle),\\ |\psi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0x'\rangle-|1y'\rangle),\\ |\psi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1x'\rangle+|0y'\rangle),\\ |\psi_3\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1x'\rangle-|0y'\rangle),\\ |\psi_4\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0z'\rangle+|1z'\rangle),\\ |\psi_5\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0z'\rangle-|1z'\rangle).\end{cases} \tag{12}$$

为了证明这两组基是互不偏的,只需证明如下两组等式即可:

$$|\langle\varphi_i|\psi_j\rangle|=\frac{1}{\sqrt{6}},\ i=4,5,\ j=0,1,2,3,4,5;\ |\langle\varphi_i|\psi_j\rangle|=\frac{1}{\sqrt{6}},\ i=0,1,2,3,\ j=4,5. \tag{13}$$

事实上，由于

$$\langle\varphi_4|\psi_0\rangle=\langle\varphi_4|\psi_1\rangle=\langle\varphi_5|\psi_2\rangle=\langle\varphi_5|\psi_3\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 2'|x'\rangle,$$

$$\langle\varphi_4|\psi_2\rangle=-\langle\varphi_4|\psi_3\rangle=\langle\varphi_5|\psi_0\rangle=-\langle\varphi_5|\psi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 2'|y'\rangle,$$

$$\langle\varphi_0|\psi_4\rangle=\langle\varphi_2|\psi_4\rangle=\langle\varphi_1|\psi_5\rangle=-\langle\varphi_3|\psi_5\rangle=\frac{1}{2}(\langle 0'|z'\rangle+\langle 1'|z'\rangle),$$

$$\langle\varphi_1|\psi_4\rangle=\langle\varphi_3|\psi_4\rangle=\langle\varphi_0|\psi_5\rangle=-\langle\varphi_2|\psi_5\rangle=\frac{1}{2}(\langle 0'|z'\rangle-\langle 1'|z'\rangle),$$

$$\langle\varphi_4|\psi_4\rangle=\langle\varphi_5|\psi_4\rangle=\langle\varphi_4|\psi_5\rangle=-\langle\varphi_5|\psi_5\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 2|z'\rangle,$$

易得$\langle 0'|z'\rangle=\frac{i}{\sqrt{3}}$，$\langle 1'|z'\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\langle 2'|x'\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\langle 2'|y'\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\langle 2'|z'\rangle=\frac{-(\sqrt{3}+i)}{2\sqrt{3}}$，所以(13)式显然成立.

综上可知，(11)式和(12)式构成了 2×3 量子系统中一对完备的互不偏的不可扩展的最大纠缠基.

参考文献：

[1] Nielsen M A，Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information[M]. London：Cambridge University Press，2000：98-106.

[2] Bennett C H，DiVincenzo D P，Fuchs C A，et al. Quantum nonlocality without entanglement[J]. Physical Review A，1999，59：1070-1091.

[3] DiVincenzo D P，Mor T，Shor P W，et al. Unextendible product bases，uncompletable product bases and bound entanglement[J]. Communication in Math Phys，2003，238：379-410.

[4] Bravyi S，Smolin J A. Unextendible maximally entangled bases[J]. Phys Rev A，2011，84：042306.

[5] Chen Bin，Fei Shaoming. Unextendible maximally entangled bases and mutually unbiased bases[J]. Phys Rev A，2013，88：034301.

[6] Wootters W K，Fields B D. Optimal state-determination by mutually unbiased measurements[J]. Ann Phys，1989，191：363-381.

[7] Englert B G，Aharonov Y. The mean king's problem：prime degrees of freedom[J]. Phys Lett A，2001，1：284.

[8] Fernandez-Perez A，Klimov A B，Saavedra C. Quantum process reconstruction based on mutually unbiased basis [J]. Phys Rev A，2011，83：052332.

[9] Adamson R B A，Steinberg A M. Improving quantum state estimation with mutually unbiased bases[J]. Phys Rev Lett，2010，105：030406.

[10] Yu L C，Lin F，Huang C Y. Quantum secret sharing with multilevel mutually (un)biased bases[J]. Phys Rev A，2008，78：012344.

[11] Cerf N J，Bourennane M，Karlsson A，et al. Security of quantum key distribution using d-level systems[J]. Phys Rev Lett，2002，88：127902.