文章编号：1004-4353(2014)02-0100-04

一个最佳常数为 Beta 函数的 Hilbert 型积分不等式

巫伟亮
(嘉应学院 数学学院，广东 梅州 514011)

摘要：运用估算权函数及实分析的方法，建立了一个新的核为 $|x^{\lambda_1}-y^{\lambda_2}|^{-a}(0<a<1)$ 的 Hilbert 型积分不等式及其等价形式. 作为运用，证明了其常数因子为最佳值，并考虑了其含多独立参数的最佳推广形式及逆向的情形.

关键词：权函数；Hilbert 型积分不等式；最佳推广；逆式
中图分类号：O178 **文献标识码：**A

A Hilbert-type integral inequality with the best value of Beta function

WU Weiliang
(*School of Mathematics*, *Jiaying University*, *Meizhou* 514011, *China*)

Abstract: By using the way of weight function and the technique of real analysis, a new Hilbert-type integral inequality with a kernel $|x^{\lambda_1}-y^{\lambda_2}|^{-a}(0<a<1)$ and its equivalent form are established. As application, the constant factor on the plane is the best value and its best extension form with some parameters and the reverse forms are also considered.

Key words: weight function; Hilbert-type integral inequality; best extension; reverse

1925 年 Hilbert[1] 建立了著名的积分不等式

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\pi\left(\int_0^\infty f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^\infty g^2(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

其中 $0<\int_0^\infty f^2(x)\mathrm{d}x<\infty$, $0<\int_0^\infty g^2(y)\mathrm{d}y<\infty$，且常数因子 π 为最佳值. Hilbert 型积分不等式在分析学中有着重要应用[2-3]. 杨必成等[4-7] 通过引入含独立参量和共轭参数的齐次核及非齐次核的 Hilbert 型不等式，对不等式(1) 进行了推广和改进. 文献[8] 得到了如下具有最佳常数因子的双参数的 Hilbert 型积分不等式：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<2B\left(\frac{\lambda}{2},1-\lambda\right)\left(\int_0^\infty x^{1-\lambda}f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^\infty y^{1-\lambda}g^2(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

其中常数因子 $2B(\frac{\lambda}{2},1-\lambda)\ (0<\lambda<1)$ 为最佳值. 本文在此基础上，引入多参数并运用估算权函数及实分析方法，得到一个新的混合核为 $|x^{\lambda_1}-y^{\lambda_2}|^{-a}(0<a<1)$ 的 Hilbert 型积分不等式及其等价形式，

收稿日期：2013－11－21 **作者简介：**巫伟亮(1983—)，男，讲师，研究方向为解析不等式、抛物型偏微分方程.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61370186)；嘉应学院育苗工程项目(2012KJM02)

证明了它的最佳常数因子为 Beta 函数，并考虑了它的逆向情形.

1　引理

引理 1　若 $\lambda_1,\lambda_2>0$，$0<a<1$，$v_1,v_2>0$，$v_1+v_2=a$，$\eta(v_1,v_2,a):=B(v_1,1-a)+B(v_2,1-a)$，定义如下的权函数

$$\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(a,v_1,v_2,y):=\int_0^\infty\frac{1}{|x^{\lambda_1}-y^{\lambda_2}|^a}\frac{y^{\lambda_2 v_2}}{x^{1-\lambda_1 v_1}}\mathrm{d}x,\ y>0,\tag{3}$$

则 $\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(a,v_1,v_2,y)$ 是一个与 y 无关的正数，且 $\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(a,v_1,v_2,y)=\frac{1}{\lambda_1}\eta(v_1,v_2,a)$.

证明　对(3)式中的积分做变换 $u=x^{\lambda_1}/y^{\lambda_2}$，则有

$$\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(a,v_1,v_2,y)=\frac{1}{\lambda_1}\int_0^\infty\frac{1}{|u-1|^a}u^{v_1-1}\mathrm{d}u=$$

$$\frac{1}{\lambda_1}\left[\int_0^1(1-u)^{-a}u^{v_1-1}\mathrm{d}u+\int_1^\infty(u-1)^{-a}u^{v_1-1}\mathrm{d}u\right]=\frac{1}{\lambda_1}\eta(v_1,v_2,a).$$

注 1　由(3)式的计算过程，可得

$$\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(a,v_1,v_2,x):=\int_0^\infty\frac{1}{|x^{\lambda_1}-y^{\lambda_2}|^a}\frac{x^{\lambda_1 v_1}}{y^{1-\lambda_2 v_2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\lambda_2}\eta(v_1,v_2,a),\ x>0.\tag{4}$$

引理 2　若 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\lambda_1,\lambda_2,a>0$，$v_1,v_2$ 和 $\eta(v_1,v_2,a)$ 如引理 1 所设，$f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上非负可测，则有

$$J:=\int_0^\infty y^{p\lambda_2 v_2-1}\left[\int_0^\infty f(x)\frac{1}{|x^{\lambda_1}-y^{\lambda_2}|^a}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y\leqslant\left[\frac{\eta(v_1,v_2,a)}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}\right]^p\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1 v_1)-1}f^p(x)\mathrm{d}x.\tag{5}$$

证明　配方并由 Hölder 不等式[9] 有

$$\int_0^\infty\frac{f(x)}{|x^{\lambda_1}-y^{\lambda_2}|^a}\mathrm{d}x=\int_0^\infty\frac{1}{|x^{\lambda_1}-y^{\lambda_2}|^a}\left[\frac{x^{(1-\lambda_1 v_1)/q}}{y^{(1-\lambda_2 v_2)/p}}f(x)\right]\left[\frac{y^{(1-\lambda_2 v_2)/p}}{x^{(1-\lambda_1 v_1)/q}}\right]\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\left[\int_0^\infty\frac{1}{|x^{\lambda_1}-y^{\lambda_2}|^a}\frac{x^{(1-\lambda_1 v_1)(p-1)}}{y^{1-\lambda_2 v_2}}f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty\frac{1}{|x^{\lambda_1}-y^{\lambda_2}|^a}\frac{y^{(1-\lambda_2 v_2)(q-1)}}{x^{1-\lambda_1 v_1}}\mathrm{d}x\right]^{1/q}=$$

$$y^{1/p-\lambda_2 v_2}\left[\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(a,v_1,v_2,y)\right]^{1/q}\left[\int_0^\infty\frac{1}{|x^{\lambda_1}-y^{\lambda_2}|^a}\frac{x^{(1-\lambda_1 v_1)(p-1)}}{y^{1-\lambda_2 v_2}}f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{1/p}.\tag{6}$$

由引理 1 及 Fubini 定理[10] 有

$$J\leqslant\left[\frac{\eta(v_1,v_2,a)}{\lambda_1}\right]^{p-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{|x^{\lambda_1}-y^{\lambda_2}|^a}\frac{x^{(1-\lambda_1 v_1)(p-1)}}{y^{1-\lambda_2 v_2}}f^p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\left[\frac{\eta(v_1,v_2,a)}{\lambda_1}\right]^{p-1}\int_0^\infty\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(a,v_1,v_2,x)x^{p(1-\lambda_1 v_1)-1}f^p(x)\mathrm{d}x.$$

因此(5)式成立. 证毕.

2　主要结果及其证明

定理 1　若 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\lambda_1,\lambda_2,a>0$，$v_1,v_2$ 和 $\eta(v_1,v_2,a)$ 如引理 1 所设，$f(x),g(y)\geqslant 0$，且 $0<\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1 v_1)-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$，$0<\int_0^\infty y^{q(1-\lambda_2 v_2)-1}g^q(y)\mathrm{d}y<\infty$，则有如下的等价不等式：

$$I:=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{|x^{\lambda_1}-y^{\lambda_2}|^a}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<$$

$$\frac{\eta(v_1,v_2,a)}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}\left[\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1 v_1)-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty y^{q(1-\lambda_2 v_2)-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right]^{1/q},\tag{7}$$

$$J := \int_0^\infty y^{p\lambda_2 v_2 - 1} \left[\int_0^\infty \frac{f(x)}{|x^{\lambda_1} - y^{\lambda_2}|^a} \mathrm{d}x\right]^p \mathrm{d}y \leqslant \left[\frac{\eta(v_1, v_2, a)}{\lambda_1^{1/q} \lambda_2^{1/p}}\right]^p \int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1 v_1)-1} f^p(x) \mathrm{d}x. \tag{8}$$

证明 由定理及 Hölder 严格不等式的条件,(6) 式取严格不等号,(5) 式亦然,因而可得(7) 式. 一方面,配方并由 Hölder 不等式[9] 有

$$I = \int_0^\infty \left[y^{\lambda_2 v_2 - 1/p} \int_0^\infty f(x) \frac{f(x)}{|x^{\lambda_1} - y^{\lambda_2}|^a} \mathrm{d}x\right] y^{-\lambda_2 v_2 + 1/p} g(y) \mathrm{d}y \leqslant J^{1/p} \left[\int_0^\infty y^{q(1-\lambda_2 v_2)-1} g^q(y) \mathrm{d}y\right]^{1/q}, \tag{9}$$

再由(8) 式可得(7) 式. 另一方面,设 $g(y) := y^{p\lambda_2 v_2 - 1}\left[\int_0^\infty \frac{f(x)}{|x^{\lambda_1} - y^{\lambda_2}|^a} \mathrm{d}x\right]^{p-1}$,则 $J = \int_0^\infty y^{q(1-\lambda_2 v_2)-1} g^q(y) \mathrm{d}y$,再由(5) 式有 $J < \infty$. 若 $J = 0$,则(8) 式自然成立;若 $J > 0$,则由(7) 式有

$$0 < \int_0^\infty y^{q(1-\lambda_2 v_2)-1} g^q(y) \mathrm{d}y = J = I <$$

$$\frac{\eta(v_1, v_2, a)}{\lambda_1^{1/q} \lambda_2^{1/p}} \left[\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1 v_1)-1} f^p(x) \mathrm{d}x\right]^{1/p} \left[\int_0^\infty y^{q(1-\lambda_2 v_2)-1} g^q(y) \mathrm{d}y\right]^{1/q}, \tag{10}$$

$$J^{1/p} = \left[\int_0^\infty y^{q(1-\lambda_2 v_2)-1} g^q(y) \mathrm{d}y\right]^{1/p} < \frac{\eta(v_1, v_2, a)}{\lambda_1^{1/q} \lambda_2^{1/p}} \left[\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1 v_1)-1} f^p(x) \mathrm{d}x\right]^{1/p}. \tag{11}$$

将(11) 式两边 p 次方,可知(8) 式成立,且它与(7) 式等价,证毕.

定理 2 在定理 1 成立的条件下,(7) 式与(8) 式的常数因子$\frac{\eta(v_1, v_2)}{\lambda_1^{1/q} \lambda_2^{1/p}}$ 及$\left[\frac{\eta(v_1, v_2)}{\lambda_1^{1/q} \lambda_2^{1/p}}\right]^p$ 都是最佳常数.

证明 任意给定 $0 < \varepsilon < p v_1$,设

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \\ x^{\lambda_1 v_1 - \lambda_1 \varepsilon/p - 1}, & x \in [1, \infty) \end{cases}, \quad \tilde{g}(y) := \begin{cases} 0, & y \in (0,1) \\ y^{\lambda_2 v_2 - \lambda_2 \varepsilon/q - 1}, & y \in [1, \infty) \end{cases},$$

则计算可得 $\tilde{J} := \left[\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1 v_1)-1} \tilde{f}^p(x) \mathrm{d}x\right]^{1/p} \left[\int_0^\infty y^{q(1-\lambda_2 v_2)-1} \tilde{g}^q(y) \mathrm{d}y\right]^{1/q} = \frac{1}{\lambda_1^{1/p} \lambda_2^{1/q} \varepsilon}$. 由 Fubini 定理可得

$$\tilde{I} := \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{|x^{\lambda_1} - y^{\lambda_2}|^a} \tilde{f}(x) \tilde{g}(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y =$$

$$\int_1^\infty y^{\lambda_2 v_2 - \lambda_2 \varepsilon/q - 1} \left[\int_1^\infty \frac{1}{|x^{\lambda_1} - y^{\lambda_2}|^a} x^{\lambda_1 v_1 - \lambda_1 \varepsilon/p - 1} \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \overset{u = (x^{\lambda_1}/y^{\lambda_2})}{=}$$

$$\frac{1}{\lambda_1} \int_1^\infty y^{-\lambda_2 \varepsilon - 1} \left[\int_{y^{-\lambda_2}}^\infty \frac{1}{|1-u|^a} u^{v_1 - \varepsilon/p - 1} \mathrm{d}u\right] \mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{\lambda_1} \left\{\int_1^\infty y^{-\lambda_2 \varepsilon - 1} \left[\int_{y^{-\lambda_2}}^1 (1-u)^{-a} u^{v_1 - \varepsilon/p - 1} + \int_1^\infty (u-1)^{-a} u^{v_1 - \varepsilon/p - 1}\right] \mathrm{d}u \mathrm{d}y\right\} =$$

$$\frac{1}{\lambda_1} \left[\int_0^1 \left(\int_{u^{-1/\lambda_2}}^\infty y^{-\lambda_2 \varepsilon - 1} \mathrm{d}y\right) (1-u)^{-a} u^{v_1 - \varepsilon/p - 1} \mathrm{d}u + \frac{1}{\lambda_2 \varepsilon} \int_1^\infty (u-1)^{-a} u^{v_1 - \varepsilon/p - 1} \mathrm{d}u\right] =$$

$$\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \varepsilon} \left[\int_0^1 (1-u)^{-a} u^{v_1 + \varepsilon/q - 1} \mathrm{d}u + \int_1^\infty (u-1)^{-a} u^{v_1 - \varepsilon/p - 1} \mathrm{d}u\right].$$

若有正数 $k \leqslant \frac{\eta(v_1, v_2, a)}{\lambda_1^{1/q} \lambda_2^{1/p}}$,使其取代(7) 式的常数因子$\frac{\eta(v_1, v_2, a)}{\lambda_1^{1/q} \lambda_2^{1/p}}$ 后仍成立,则代入 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$,由上面的结果有

$$\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \left[\int_0^1 (1-u)^{-a} u^{v_1 + \varepsilon/q - 1} \mathrm{d}u + \int_1^\infty (u-1)^{-a} u^{v_1 - \varepsilon/p - 1} \mathrm{d}u\right] = \varepsilon \tilde{I} < \varepsilon k \tilde{J} = k \frac{1}{\lambda_1^{1/p} \lambda_2^{1/q}}. \tag{12}$$

由 Fatou 引理[10] 及(12) 式有

$$\frac{\eta(v_1, v_2, a)}{\lambda_1^{1/q} \lambda_2^{1/p}} = \frac{1}{\lambda_1^{1/q} \lambda_2^{1/p}} \left[\int_0^1 \lim_{\varepsilon \to 0^+} (1-u)^{-a} u^{v_1 + \varepsilon/q - 1} \mathrm{d}u + \int_1^\infty \lim_{\varepsilon \to 0^+} (u-1)^{-a} u^{v_1 - \varepsilon/p - 1} \mathrm{d}u\right] \leqslant$$

$$\frac{1}{\lambda_1^{1/q} \lambda_2^{1/p}} \varliminf_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_0^1 (1-u)^{-a} u^{v_1 + \varepsilon/q - 1} \mathrm{d}u + \int_1^\infty (u-1)^{-a} u^{v_1 - \varepsilon/p - 1} \mathrm{d}u\right] \leqslant k,$$

故 $k=\frac{\eta(v_1,v_2,a)}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}$ 必为(7) 式的最佳值，同理 $\left[\frac{\eta(v_1,v_2,a)}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}\right]^p$ 必为(8) 式的最佳值. 不然，由(9) 式可导出(7) 式的常数因子不是最佳值，矛盾. 证毕.

定理 3　在定理 1 所设的条件下，若把 $p>1$ 改为 $0<p<1$，则有(7) 式与(8) 式的逆向等价式，且相应的常数因子仍为最佳值.

证明　证法与定理 1 和定理 2 类似. 先由逆向的 Hölder 不等式，得(5) 式及(9) 式的逆式，由此易得(8) 式的逆式. 再利用(9) 式的逆式可得(7) 式的逆式. 反之，设有(7) 式的逆式，置与定理 1 相同的 $g(y)$，则由(5) 式的逆式知 $J>0$. 若 $J=\infty$，则(8) 式的逆式自然成立；若 $J<\infty$，则由(7) 式的逆式易得(10) 式和(11) 式的逆式，故有(8) 式的逆式，且它与(7) 式的逆式等价.

若有正数 $k\geqslant\frac{\eta(v_1,v_2,a)}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}$，使其取代(7) 式的逆式的常数因子 $\frac{\eta(v_1,v_2,a)}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}$ 后仍成立，则由(12) 式的逆式有

$$\frac{1}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}\left[\int_0^1(1-u)^{-a}u^{v_1+\varepsilon/q-1}\,\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}(u-1)^{-a}u^{v_1-\varepsilon/p-1}\,\mathrm{d}u\right]>k. \tag{13}$$

设 $0<\varepsilon_0<|q|v_1$，则当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时，对 $u\in(0,1]$ 有 $u^{\varepsilon/q}\leqslant u^{\varepsilon_0/q}$，且 $\int_0^1(1-u)^{-a}u^{v_1+\varepsilon_0/q-1}\,\mathrm{d}u\leqslant\frac{1}{\varepsilon_0/q+v_1}$. 由 L 控制收敛定理[10] 有

$$\int_0^1(1-u)^{-a}u^{v_1+\varepsilon/q-1}\,\mathrm{d}u=\int_0^1(1-u)^{-a}u^{v_1-1}\,\mathrm{d}u+o(1),\ \varepsilon\to0^+.$$

在(13) 式中，令 $\varepsilon\to0^+$，有 $\frac{\eta(v_1,v_2,a)}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}\geqslant k$，故 $\frac{\eta(v_1,v_2,a)}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}=k$ 为(7) 式逆式的最佳值，且(8) 式的逆式的常数因子 $\left[\frac{\eta(v_1,v_2,a)}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}\right]^p$ 也必为最佳值. 不然，由(9) 式的逆式必能导出矛盾. 证毕.

注 2　取 $p=q=2$，$\lambda_1=\lambda_2=1$，$v_1=v_2=\lambda/2$，$a=\lambda$ 时，由(6) 式可推导出(2) 式，故可知(6) 式是(2) 式的最佳推广式.

参考文献：

[1] Hardy G H. Note on a theorem of Hilbert concerning series of positive terms[J]. Proc London Math Soc, 1925,23(2):XLV-XLVL.

[2] Hardy G H, Littewood J E, Polya G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952:226-236.

[3] Mitrinovic D S, Pecaric J, Fink A M. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991:108-132.

[4] 杨必成. 参量化的 Hilbert 不等式[J]. 数学学报,2006,49(5):1121-1126.

[5] Xu Jingshi. Hardy-Hilbert's inequalities with two parameters[J]. Advancesin Mathematics, 2007,36(2):63-76.

[6] Yang Bicheng. On the norm of an integral operator and applications[J]. J Math Anal Appl, 2006,321:182-192.

[7] 巫伟亮. 一个含多独立参数的新 Hilbert 型积分不等式及其应用[J]. 西北师范大学学报：自然科学版,2012,48(6):26-30.

[8] 杨必成. 一个新的 Hilbert 型不等式及其推广[J]. 吉林大学学报：理学版,2005,43(5):580-584.

[9] 匡继昌. 常用不等式[M]. 济南：山东科学技术出版社,2004:12-19.

[10] 周民强. 实变函数论[M]. 北京：北京大学出版社,2008:156-185.