

文章编号: 1004-4353(2014)02-0095-05

## 2-度量空间上两个膨胀映射的 重合点和公共不动点

王亭, 袁玉娇, 杜慧宇, 金月曦, 朴勇杰\*

( 延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002 )

**摘要:** 推广和改进了一个已知的 2-度量空间上满足第二膨胀条件的两个映射的公共不动点存在定理, 然后利用新的方法研究了满足另一类膨胀条件的两个映射的公共不动点存在问题, 结果表明, 本文所用方法明显优于文献[6,9-10]中的方法.

**关键词:** 膨胀条件; 弱相容的; 重合点; 公共不动点

**中图分类号:** O177.91

**文献标识码:** A

## Coincidence points and common fixed points for two expansive mappings on 2-metric spaces

WANG Ting, YUAN Yujiao, DU Huiyu, JIN Yuexi, PIAO Yongjie\*

( *Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China* )

**Abstract:** We generalize and improve a known existence theorem of common fixed points for two mappings satisfying II-expansive conditions in 2-metric spaces, and use a new method to discuss the existence problems of common fixed points for mappings with another type expansive condition. The results show that our method is very better than that in references [6,9-10].

**Key words:** expansion condition; weakly compatible; coincidence point; common fixed point

### 0 引言

文献[1-3]的作者在度量空间上讨论了第 I、第 II、第 III 膨胀映射以及弱膨胀映射的不动点存在问题. 文献[4-6]的作者在锥度量空间<sup>[7-8]</sup>上讨论了膨胀映射与其相关联的映射的重合点或公共不动点存在问题, 同时给出了膨胀映射的不动点存在定理, 推广和改进了文献[1-3]中关于第 I、第 II 膨胀映射具有不动点定理的结论. 文献[9]的作者把文献[8]中的收缩条件改成相应的膨胀条件后讨论了公共不动点问题. 文献[10]的作者利用文献[4-6]中的思路在 2-度量空间<sup>[11-13]</sup>上得到了满足第 I 和第 II 膨胀型条件的映射族的重合点和公共不动点以及不动点存在定理, 引进了第 III\* 型膨胀的概念并在没有连续的框架下证明了映射族的重合点和不动点的存在定理, 推广和改进了第 III 型膨胀映射在连续条件下具有不动点的定理<sup>[1-3]</sup>. 本文采用新的方法在较弱的条件下更简便地得到了文献[10]中讨论的相应结果, 并讨论了另一类膨胀的两个映射的公共不动点存在问题.

## 1 基本概念

**定义 1**<sup>[14-15]</sup> 设  $X$  是非空集合,  $f, g: X \rightarrow X$  是两个映射. 如果存在  $x, w \in X$  使得  $w = fx = gx$ , 则称  $x$  是  $f$  和  $g$  的重合点, 而  $w$  是  $f$  和  $g$  的重合的点.

**定义 2**<sup>[16]</sup> 称两个映射  $f, g: X \rightarrow X$  是弱相容的是指如果  $x \in X$  且  $fx = gx$ , 则  $fgx = gfx$ .

**定义 3**<sup>[11-13]</sup> 2-度量空间  $(X, d)$  是由集合  $X$  和映射  $d: X \times X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  组成, 使得:

- (i) 对任何不同的  $x, y \in X$ , 存在一个  $u \in X$  满足  $d(x, y, u) \neq 0$ ;
- (ii)  $d(x, y, z) = 0$  当且仅当  $x, y, z$  中至少有两个是相同的;
- (iii)  $d(x, y, z) = d(u, v, w)$ , 其中  $\{u, v, w\}$  是  $\{x, y, z\}$  的任意排列;
- (iv) 对任何  $x, y, z, u \in X$ ,  $d(x, y, z) \leq d(x, y, u) + d(x, u, z) + d(u, y, z)$ .

**定义 4**<sup>[11-13]</sup> 称 2-度量空间  $(X, d)$  中的序列  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  是柯西的是指对任何  $\epsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n, m > N$  时成立  $d(x_n, x_m, a) < \epsilon, \forall a \in X$ . 称  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  收敛于  $x \in X$  是指对任何  $a \in X, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x, a) = 0$ . 用  $x_n \rightarrow x$  表示  $x_n$  收敛于  $x$ , 并称  $x$  是  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  的极限. 称 2-度量空间  $(X, d)$  是完备的是指  $X$  中的每个柯西序列都收敛.

**引理 1**<sup>[11-13]</sup> 设  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  是 2-度量空间  $(X, d)$  中的序列. 如果存在  $h \in [0, 1)$  满足对任何  $a \in X$  及任何  $n \in \mathbb{N}$ , 成立  $d(x_{n+2}, x_{n+1}, a) \leq h d(x_{n+1}, x_n, a)$ , 则  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  是柯西序列.

**引理 2**<sup>[11-13]</sup> 设  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  是 2-度量空间  $(X, d)$  中收敛于  $x$  的序列, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, b, c) = d(x, b, c), \forall b, c \in X$ .

**引理 3**<sup>[12-13]</sup> 设  $f, g: X \rightarrow x$  是弱相容的. 如果  $f$  和  $g$  有唯一的重合的点  $w = fx = gx$ , 则  $w$  是  $f$  和  $g$  的唯一公共不动点.

## 2 公共不动点存在定理

**定理 1** 设  $(X, d)$  是 2-度量空间,  $f, g: X \rightarrow X$  是两个映射使得  $fX \supset gX$  且满足对任何  $x, y, a \in X, x \neq y$ ,

$$d(fx, fy, a) \geq \alpha d(gx, fx, a) + \beta d(gy, fy, a) + \gamma d(gx, gy, a), \quad (1)$$

其中  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \geq -1$ . 如果 (i)  $fX$  或  $gX$  是完备的, (ii)  $\alpha + \beta + \gamma > 1$ , 则  $f$  和  $g$  有重合点.

**证明** 首先, 根据 (ii) 易知  $\alpha + \gamma > 0$  或  $\beta + \gamma > 0$ . 否则, 若  $\alpha + \gamma \leq 0$  且  $\beta + \gamma \leq 0$ , 则  $\alpha + \beta + 2\gamma \leq 0$ , 于是  $\alpha + \beta + \gamma \leq -\gamma \leq 1$ . 矛盾.

任取  $x_0 \in X$ , 根据  $fX \supset gX$  可构造两个序列  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  满足条件  $y_n = gx_n = fx_{n+1}, n = 0, 1, \dots$ . 如果存在  $n$  使得  $x_n = x_{n+1}$ , 则  $x_n$  就是  $f$  和  $g$  的重合点. 于是可假设  $x_n \neq x_{n+1}, \forall n = 0, 1, 2, \dots$ . 假如  $\beta + \gamma > 0$ , 取  $x = x_{n+1}, y = x_{n+2}$ , 将其代到 (1) 式并整理得到对任何  $a \in X$ , 有  $d(y_n, y_{n+1}, a) \geq \alpha d(y_n, y_{n+1}, a) + (\beta + \gamma) d(y_{n+1}, y_{n+2}, a)$ . 于是

$$(1 - \alpha) d(y_n, y_{n+1}, a) \geq (\beta + \gamma) d(y_{n+1}, y_{n+2}, a), \forall a \in X, n = 0, 1, 2, \dots$$

由于  $\beta + \gamma > 0$ , 因此有  $(1 - \alpha) d(y_n, y_{n+1}, a) \geq 0$ . 如果  $1 - \alpha < 0$ , 则有  $d(y_n, y_{n+1}, a) = d(y_{n+1}, y_{n+2}, a) = 0, \forall n, a$ , 故  $\{y_n\}$  是常序列, 所以它是柯西序列. 基于上述, 可假设  $1 - \alpha \geq 0$ , 此时  $0 \leq \frac{1 - \alpha}{\beta + \gamma} < 1$

且有

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}, a) \leq \frac{1 - \alpha}{\beta + \gamma} d(y_n, y_{n+1}, a), \forall a \in X, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

假如  $\alpha + \gamma > 0$ , 取  $x = x_{n+2}, y = x_{n+1}$ , 将其代到 (1) 式并整理得到对任何  $a \in X$ , 有  $d(y_n, y_{n+1}, a) \geq (\alpha + \gamma) d(y_{n+1}, y_{n+2}, a) + \beta d(y_n, y_{n+1}, a)$ . 于是

$$(1-\beta)d(y_n, y_{n+1}, a) \geq (\alpha + \gamma)d(y_{n+1}, y_{n+2}, a), \forall a \in X, n=0, 1, 2, \dots.$$

因为  $\alpha + \gamma > 0$ , 因此类似地可假设  $1-\beta \geq 0$ , 此时  $0 \leq \frac{1-\beta}{\alpha + \gamma} < 1$  且有

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}, a) \leq \frac{1-\beta}{\alpha + \gamma} d(y_n, y_{n+1}, a), \forall a \in X, n=0, 1, 2, \dots. \quad (3)$$

令  $h = \max\{\frac{1-\beta}{\alpha + \gamma}, \frac{1-\alpha}{\beta + \gamma}\}$ , 则  $0 \leq h < 1$  且综合(2)式和(3)式得到

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}, a) \leq h d(y_n, y_{n+1}, a), \forall a \in X, n=0, 1, 2, \dots.$$

因此, 根据引理1知  $\{y_n\}$  是柯西序列.

假设  $fX$  是完备的. 因为  $y_n = gx_n = fx_{n+1} \in fX$ , 因此存在  $u, p \in X$  使得  $y_n \rightarrow u = fp$ . 当  $\beta + \gamma > 0$  时, 取  $x = x_{n+1}$ ,  $y = p$ , 将其代到(1)式并整理得到对任何  $a \in X$ , 有

$$d(y_n, fp, a) \geq \alpha d(y_n, y_{n+1}, a) + \beta d(gp, fp, a) + \gamma d(y_{n+1}, gp, a).$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 则根据引理2和  $\{y_n\}$  是柯西序列, 上式变成  $0 \geq (\beta + \gamma)d(fp, gp, a)$ ,  $\forall a \in X$ , 因此  $d(fp, gp, a) = 0$ ,  $\forall a \in X$ , 于是  $fp = gp = u$ . 如果  $\alpha + \gamma > 0$  时, 取  $x = p$ ,  $y = x_{n+1}$ , 将其代到(1)式并整理得到对任何  $a \in X$ , 有

$$d(fp, y_n, a) \geq \alpha d(gp, fp, a) + \beta d(y_{n+1}, y_n, a) + \gamma d(gp, y_{n+1}, a).$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 则根据引理2和  $\{y_n\}$  是柯西序列, 上式变成  $0 \geq (\alpha + \gamma)d(fp, gp, a)$ ,  $\forall a \in X$ , 因此  $d(fp, gp, a) = 0$ ,  $\forall a \in X$ , 于是  $fp = gp = u$ . 总之, 无论何种情况下,  $u$  总是  $f$  和  $g$  的重合的点,  $p$  是  $f$  和  $g$  的重合点.

如果  $gX$  是完备的, 则存在  $u, p, q \in X$  使得  $y_n = gx_n \rightarrow u = gq = fp$ . 余下的证明与  $fX$  是完备时相同, 故省略.

**注1** 如果  $\alpha, \beta, \gamma$  是非负实数且满足  $\alpha + \beta + \gamma > 1$  和  $\alpha < 1$  或  $\beta < 1$ , 则定理1变成文献[10]中的相应结果, 也是文献[6]中相应结果在2-度量空间上的表现形式, 因此定理1的条件明显弱于文献[6, 10]中的条件. 另外, 虽然定理1的条件更弱, 但是定理1的证明方法与文献[6, 10]的方法有较大不同, 而且证明过程更简洁易懂. 文献[6, 10]中分  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$  3种情况讨论了重合点的存在性.

**定理2** 设  $(X, d)$  是2-度量空间,  $f, g: X \rightarrow X$  是两个映射, 使得  $fX \supset gX$  且满足(1)式, 其中  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ . 如果(i)  $fX$  或  $gX$  是完备的, (ii)  $\min\{\alpha + \beta + \gamma, \gamma\} > 1$ , (iii)  $f$  和  $g$  是弱相容的, 则  $f$  和  $g$  有唯一公共不动点.

**证明** 首先, 根据定理1, 存在  $u, p \in X$  使得  $u = fp = gp$ . 再假设存在  $v, z \in X$  使得  $v = fz = gz$ , 并且取  $x = p$ ,  $y = z$ , 将其代到(1)式整理得

$$d(u, v, a) = d(fp, fz, a) \geq \gamma d(gp, gz, a) = \gamma d(u, v, a), \forall a \in X.$$

因此必有  $d(u, v, a) = 0$ ,  $\forall a \in X$ , 所以  $u = v$ . 这说明  $f$  和  $g$  有唯一重合的点  $u$ , 于是根据引理3知  $u$  是  $f$  和  $g$  的唯一公共不动点.

**注2** 如果  $\alpha, \beta \geq 0$ , 则定理2的条件(ii)变成  $\gamma > 1$ . 满足该条件的定理2正是文献[10]中的定理2.3, 因此本文定理2推广和改进了文献[10]的相关定理.

根据定理1和定理2, 模仿文献[10]中的方法可给出很多(公共)不动点定理. 现给出两个特殊结果:

**推论1** 设  $(X, d)$  是2-度量空间,  $f: X \rightarrow X$  是映射, 使得对任何  $x, y, a \in X$ ,  $x \neq y$ , 有

$$d(fx, fy, a) \geq \alpha d(f^2x, fx, a) + \beta d(f^2y, fy, a) + \gamma d(f^2x, f^2y, a),$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ . 如果(i)  $fX$  是完备的, (ii)  $\min\{\alpha + \beta + \gamma, \gamma\} > 1$ , 则  $f$  有唯一不动点.

**证明** 令  $g = f^2$ , 则  $f$  和  $g$  显然是弱相容的且满足定理2的所有条件, 于是  $f$  有唯一不动点.

**推论2** 设  $(X, d)$  是2-度量空间,  $f: X \rightarrow X$  是映射, 使得  $f^2X = fX$  且对任何  $x, y, a \in X$ ,  $x \neq y$  有

$$d(f^2x, f^2y, a) \geq \alpha d(fx, f^2x, a) + \beta d(fy, f^2y, a) + \gamma d(fx, fy, a),$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ . 如果 (i)  $fX$  是完备的, (ii)  $\min\{\alpha + \beta + \gamma, \gamma\} > 1$ , 则  $f$  有唯一不动点.

**证明** 令  $F = f^2$ ,  $G = f$ , 则  $F$  和  $G$  是弱相容的且满足定理 2 的所有条件, 于是  $G = f$  和  $F = f^2$  有唯一公共不动点  $u$ , 显然  $u$  是  $f$  的唯一不动点.

**定理 3** 设  $(X, d)$  是完备的 2-度量空间,  $f, g: X \rightarrow X$  是两个满映射且使得对任何  $x, y, a \in X$ , 有

$$d(fx, gy, a) \geq Ad(x, y, a) + Bd(x, fx, a) + Cd(y, gy, a), \quad (4)$$

其中  $A, B, C$  是实数, 满足  $A + B > 0$ ,  $A + C > 0$ ,  $A + B + C > 1$ , 则  $f$  和  $g$  有公共不动点. 进一步, 若  $A > 1$ , 则  $f$  和  $g$  有唯一的公共不动点.

**证明** 任取  $x_0 \in X$ , 然后根据  $f$  和  $g$  的满射性构造一个序列  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  满足  $x_{2k} = fx_{2k+1}$ ,  $x_{2k+1} = gx_{2k+2}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . 对任何  $k = 0, 1, 2, \dots$  和  $a \in X$ , 利用 (4) 式可推出

$$\begin{aligned} d(x_{2k+1}, x_{2k+2}, a) &= d(fx_{2k+3}, gx_{2k+2}, a) \geq \\ &Ad(x_{2k+3}, x_{2k+2}, a) + Bd(x_{2k+3}, fx_{2k+3}, a) + Cd(x_{2k+2}, gx_{2k+2}, a) \geq \\ &(A+B)d(x_{2k+3}, x_{2k+2}, a) + Cd(x_{2k+2}, x_{2k+1}, a), \end{aligned}$$

于是得到  $[1 - C]d(x_{2k+1}, x_{2k+2}, a) \geq [A + B]d(x_{2k+2}, x_{2k+3}, a)$ . 若  $1 - C < 0$ , 则由  $A + B > 0$  可推出  $d(x_{2k+1}, x_{2k+2}, a) = d(x_{2k+2}, x_{2k+3}, a) = 0$ ,  $\forall k, a$ , 所以  $\{y_k\}$  是常序列, 因此它是柯西序列. 于是不妨设

$1 - C \geq 0$ , 此时  $0 \leq \frac{1 - C}{A + B} < 1$  且有

$$d(x_{2k+2}, x_{2k+3}, a) \leq \frac{1 - C}{A + B} d(x_{2k+1}, x_{2k+2}, a), \quad \forall k \in \mathbf{N}, a \in X. \quad (5)$$

类似地, 对任何  $k = -1, 0, 1, 2, \dots$  和  $a \in X$ , 利用 (4) 式可推出

$$\begin{aligned} d(x_{2k+2}, x_{2k+3}, a) &= d(fx_{2k+3}, gx_{2k+4}, a) \geq \\ &Ad(x_{2k+3}, x_{2k+4}, a) + Bd(x_{2k+3}, fx_{2k+3}, a) + Cd(x_{2k+4}, gx_{2k+4}, a) \geq \\ &(A+C)d(x_{2k+3}, x_{2k+4}, a) + Bd(x_{2k+2}, x_{2k+3}, a), \end{aligned}$$

于是得到  $[1 - B]d(x_{2k+2}, x_{2k+3}, a) \geq [A + C]d(x_{2k+3}, x_{2k+4}, a)$ . 由于  $A + C > 0$ , 因此类似地可假设

$1 - B \geq 0$ , 此时  $0 \leq \frac{1 - B}{A + C} < 1$  且有

$$d(x_{2k+3}, x_{2k+4}, a) \leq \frac{1 - B}{A + C} d(x_{2k+2}, x_{2k+3}, a), \quad \forall k \in \mathbf{N}, a \in X. \quad (6)$$

令  $h = \max\{\frac{1 - B}{A + C}, \frac{1 - C}{A + B}\}$ , 则根据条件知  $0 \leq h < 1$ . 综合 (5) 式和 (6) 式可得

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}, a) \leq h d(x_k, x_{k+1}, a), \quad \forall a \in X, k = 0, 1, 2, \dots.$$

于是根据引理 1 可知  $\{x_k\}$  是柯西序列.

由  $X$  的完备性. 存在  $u \in X$  满足  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = u$ , 由  $f$  和  $g$  的满射性存在  $v, w \in X$  满足  $fv = gw = u$ . 对任何  $a \in X$ , 根据 (4) 式有

$$d(x_{2k}, u, a) = d(fx_{2k+1}, gw, a) \geq Ad(x_{2k+1}, w, a) + Bd(x_{2k+1}, x_{2k}, a) + Cd(w, u, a).$$

令  $k \rightarrow \infty$ , 则根据  $\{x_k\}$  的柯西性以及引理 2, 上式变成  $0 = d(u, u, a) \geq (A + C)d(u, w, a)$ ,  $\forall a \in X$ , 因此根据  $A + C > 0$  得到  $d(u, w, a) = 0$ ,  $\forall a \in X$ , 由此推出  $w = u = gw$ . 类似地,

$$d(u, x_{2k+1}, a) = d(fv, gx_{2k+2}, a) \geq Ad(v, x_{2k+2}, a) + Bd(v, u, a) + Cd(x_{2k+2}, x_{2k+1}, a).$$

令  $k \rightarrow \infty$ , 则上式变成  $0 = d(u, u, a) \geq (A + B)d(u, v, a)$ ,  $\forall a \in X$ , 因此根据  $A + B > 0$ , 得到  $d(u, v, a) = 0$ ,  $\forall a \in X$ , 由此推出  $v = u = fv$ . 于是  $u = fu = gu$ , 说明  $u$  是  $f$  和  $g$  的公共不动点.

如果  $u'$  也是  $f$  和  $g$  的公共不动点, 则根据 (4) 式, 对任何  $a \in X$  有

$$d(u, u', a) = d(fu, gu', a) \geq Ad(u, u', a) + Bd(u, fu, a) + Cd(u', gu', a) = Ad(u, u', a),$$

于是根据  $A > 1$  必有  $u = u'$ . 这说明  $u$  是  $f$  和  $g$  的唯一的公共不动点.

**注 3** ① 利用定理 3 可给出一些特殊形式的结果,本文在此省略. ② 如果采用文献[9]中的方法证明定理 3,不仅证明过程复杂,而且要求  $A, B, C > 0$  且  $B, C < 1$ ; 另外,还要求  $X$  是有界的,即存在  $M > 0$  使得  $\sup_{x, y, z \in X} d(x, y, z) < M$ . 因此定理 3 的条件相比相关定理的条件更弱一些,而且其证明方法也更简洁.

## 参考文献:

- [1] 王尚志,李伯渝,高智民. 膨胀算子及其不动点定理[J]. 数学进展,1982,11(2):149-153.
- [2] 何松年. 第 II,III 型膨胀映射的不动点定理[J]. 中国民航学院学报,2004,22(5):50-52.
- [3] 何松年. 若干膨胀映射及其不动点定理[J]. 南京大学数学半年刊,2006,23(2):334-340.
- [4] Sahin I, Telci M. A theorem on common fixed points of expansion type mappings in cone metric spaces[J]. An St Univ Ovidius Constanta, 2010,18(1):329-336.
- [5] Kadelburg Z, Murthy P P, Radenovic S. Common fixed points for expansive mappings in cone metric spaces[J]. Int Journal of Math Analysis, 2011,5(27):1309-1319.
- [6] Shatanawi W, Awawdeh F. Some fixed and coincidence point theorems for expansive maps in cone metric spaces [J]. Fixed Point Theory and Applications, 2012, doi:10.1186/1687-1812-2012-19.
- [7] Huang L G, Zhang X. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings[J]. J Math Anal Appl, 2007,332(2):1468-1476.
- [8] 张宪. 锥度量空间中 Lipschitz 型映射的公共不动点定理[J]. 数学学报,2010,53A(6):1139-1148.
- [9] Han Y, Xu S Y. Some new theorems of expanding mappings without continuity in cone metric spaces[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2013, doi:10.1186/1687-1812-2013-3.
- [10] 朴勇杰. 2-度量空间上满足若干个膨胀条件的两个映射的公共不动点[J]. 系统科学与数学,2013,33(11):1370-1379.
- [11] Piao Y J. Unique common fixed point for a family of self-maps with same type contractive condition in 2-metric spaces[J]. Analysis in Theory and Applications, 2008,24(4):316-320.
- [12] Piao Y J. Uniqueness of common fixed point for a family of mappings with  $\phi$ -contractive condition in 2-metric spaces[J]. Applied Mathematics, 2012,3(1):73-77.
- [13] Piao Y J, Jin Y F. New unique common fixed results for four mappings with  $\phi$ -contractive type in 2-metric spaces [J]. Applied Mathematics, 2012,3(7):734-737.
- [14] Abbas M, Jungck G. Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces[J]. J Math Anal Appl, 2008,341(1):416-420.
- [15] Han Y, Xu S Y. New common fixed point results for four maps on cone metric spaces[J]. Applied Mathematics, 2011,2:1114-1118.
- [16] Bari C D, Vetro P.  $\phi$ -Pairs and common fixed points in cone metric spaces[J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2008,57:279-285.