文章编号: 1004-4353(2014)01-0025-06

一类分数阶差分方程正解的存在性

祝相宇, 孙明哲
(延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 研究了一类有限非线性分数阶差分方程边值问题正解的存在性.首先利用分数阶差分方程及其边值条件给出了 Green 函数,并分析了其性质;然后利用 Krasnosel'skii 不动点定理,建立了这类分数阶差分方程边值问题正解的存在性定理.

关键词: 分数阶差分方程; 边值问题; Green 函数; 解的存在性
中图分类号: O175.6 **文献标识码:** A

Existence of positive solution for a class of fractional difference equations

ZHU Xiangyu, SUN Mingzhe
(*Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We studied the existence of positive solutions of the boundary value problem for a nonlinear finite fractional difference equation. First, according to fractional difference equation and its boundary conditions, we constructed the Green's function and analyzed its properties. Then, by using the Krasnosel'skii fixed point theorem we obtained sufficient conditions for the existence of positive solutions of the boundary value problem for the nonlinear finite difference equation.

Key words: fractional-order difference equations; boundary value problem; Green's function; existence of solutions

近年来,差分方程被广泛应用于机械系统、经济等研究领域中,并逐步成为了一个独立的理论体系.目前为止,关于有限分数阶差分问题的研究成果还较少.其中: Miller 和 Ross[1] 将线性有序的 υ 阶分数阶微分方程作为一般的整数阶线性有序分数阶微分方程的模型来考虑问题,并取得了一些有意义的成果.文献[2]采用一种改进的方法来求解了该类问题;文献[3]研究了上述问题的一种适定的初始值问题,并给出了多种解决算法.本文在借鉴前人研究方法的基础上,对一类有限分数阶非线性差分方程边值问题正解的存在性进行研究,获得了该类问题存在正解的充分性条件.

本文中考虑的有限分数阶差分方程边值问题为:

$$-\Delta^{\upsilon}y(t)=f(t+\upsilon-1,y(t+\upsilon-1)),\ t=1,2,3,\cdots,b+1; \tag{1}$$

$$y(\upsilon-3)=0,\ y(\upsilon+b+1)=0,\ y(\upsilon-2)=g(y). \tag{2}$$

其中 $2<\upsilon\leqslant 3$, b 是整数且满足 $b\geqslant 2$, $f:[\upsilon-1,\upsilon+b]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数. 记

$$H=\{(y(\upsilon-3),y(\upsilon-2),\cdots,y(\upsilon+b+1))^{\mathrm{T}}\mid y(\upsilon+i-3)\in\mathbf{R},i=0,1,2,\cdots,b+4\}.$$

$g:H\to\mathbf{R}$ 是给定的映射.

为方便,本文记 $\mathbf{N}_a=\{a,a+1,a+2,\cdots\}$, $[a,b]_{\mathbf{N}_a}=\{a,a+1,a+2,\cdots,b\}$, 其中 $b-a\in\mathbf{N}_1$.

收稿日期: 2013-09-18 **基金项目:** 延边大学科研基金资助项目(601010027)
作者简介: 祝相宇(1978—),女,讲师,研究方向为微分方程理论.

1 预备知识

定义 1[4] 对于 $\upsilon>0$,定义函数 f 的 υ 阶分数和为

$$\Delta^{-\upsilon}f(t)=\Delta^{-\upsilon}f(t;a)=\frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\sum_{s=a}^{t-\upsilon}(t-s-1)^{(\upsilon-1)}f(s),\ t\in\mathbf{N}_{a+\upsilon}.$$

定义 2[4] 对于 $N\in\mathbf{N}$, $0\leqslant N-1<\upsilon\leqslant N$,定义函数 f 的 υ 阶分数差分为

$$\Delta^{\upsilon}f(t)=\Delta^{N}\Delta^{\upsilon-N}f(t),\ t\in\mathbf{N}_{a+N-\upsilon}.$$

定义 3[4] 定义 $t^{(\upsilon)}=\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\upsilon)}$, $t,\upsilon\in\mathbf{R}$;规定:当 $t+1-\upsilon$ 是 Γ 函数的极点,而 $t+1$ 不是极点时,有 $t^{(\upsilon)}=0$.

引理 1[4] 对于 $\forall\,t,\upsilon\in\mathbf{R}$,如果 $t^{(\upsilon)}$, $t^{(\upsilon-1)}$ 都有定义,那么 $\Delta t^{(\upsilon)}=\upsilon t^{(\upsilon-1)}$.

引理 2[5] 设 f 是定义在 $\mathbf{N}_a$ 上的实函数,令 $\mu,\upsilon>0$,则有

$$\Delta^{-\upsilon}(\Delta^{-\mu}f(t))=\Delta^{-(\upsilon+\mu)}f(t)=\Delta^{-\mu}(\Delta^{-\upsilon}f(t)),\ t\in\mathbf{N}_{a+\mu+\upsilon}.$$

引理 3[5] 令 $\mu\neq-1$,且假设 $\mu+\upsilon+1$ 是正整数,那么有 $\Delta^{-\upsilon}t^{(\mu)}=\dfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\upsilon+1)}t^{(\mu+\upsilon)}$.

引理 4[5] 对于任意的实数 υ 和任意的正整数 P,有

$$\Delta^{-\upsilon}\Delta^{P}h(t)=\Delta^{P}\Delta^{-\upsilon}h(t)-\sum_{k=0}^{P-1}\frac{(t-a)^{(\upsilon-P+k)}}{\Gamma(\upsilon+k-P+1)}\Delta^{k}h(a).$$

特别的,$\Delta^{-\upsilon}\Delta h(t)=\Delta\Delta^{-\upsilon}h(t)-\dfrac{(t-a)^{(\upsilon-1)}}{\Gamma(\upsilon)}h(a)$,其中 h 是定义在 $\mathbf{N}_a$ 上的函数.

引理 5[4] 令 $0\leqslant N-1<\upsilon\leqslant N$, $c_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,3,\cdots,N$,方程 $\Delta^{\upsilon}y(t)=0$ 有 N 个线性无关的解,其解可以表示为 $y(t)=c_1t^{(\upsilon-1)}+c_2t^{(\upsilon-2)}+\cdots+c_Nt^{(\upsilon-N)}$,且有 $\Delta^{-\upsilon}\Delta^{\upsilon}y(t)=y(t)+c_1t^{(\upsilon-1)}+c_2t^{(\upsilon-2)}+\cdots+c_Nt^{(\upsilon-N)}$.

引理 6[6](Krasnosel'skii 不动点定理) 设 E 是一个 Banach 空间,P 是 E 上的一个锥,Ω_1 和 Ω_2 是 E 中的开子集,$\overline{\Omega}_1$ 和 $\overline{\Omega}_2$ 分别是集合 Ω_1 和 Ω_2 的闭包,$\theta\in\Omega_1$, $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$, $A:P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to P$ 为全连续. A 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中至少有一个不动点,如果满足下列条件之一:

(i) $\|Ax\|\leqslant\|x\|,\forall\,x\in P\cap\partial\Omega_1$; $\|Ax\|\geqslant\|x\|,\forall\,x\in P\cap\partial\Omega_2$.

(ii) $\|Ax\|\geqslant\|x\|,\forall\,x\in P\cap\partial\Omega_1$; $\|Ax\|\leqslant\|x\|,\forall\,x\in P\cap\partial\Omega_2$.

引理 7[5] 设 υ 是任意正实数,a 和 b 是两个实数且有 $x<a\leqslant b$,则有:

(i) $\dfrac{1}{x^{(\upsilon)}}$ 是一个关于 x 的递减函数,其中 $x\in(0,\infty)_{\mathbf{N}}$;

(ii) $(a-x)^{(\upsilon)}/(b-x)^{(\upsilon)}$ 是关于 x 的递减函数,其中 $x\in[0,a-\upsilon)_{\mathbf{N}}$.

2 Green 函数及其性质

构造带有边值条件(2) 的分数阶差分方程

$$-\Delta^{\upsilon}y(t)=h(t+\upsilon-1),\ t=1,2,3,\cdots,b+1,\ 2<\upsilon\leqslant3 \tag{3}$$

的 Green 函数,其中 $h:[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}\to\mathbf{R}$ 是连续的.

定理 1 设 $2<\upsilon\leqslant3$, $g:\mathbf{R}^{b+5}\to\mathbf{R}$,则分数阶差分方程(3) 及(2) 式有唯一解:

$$y(t)=\sum_{s=0}^{b+1}G(t,s)h(s+\upsilon-1)-\frac{t^{(\upsilon-1)}}{(b+3)\Gamma(\upsilon-1)}g(y)+\frac{g(y)}{\Gamma(\upsilon-1)}t^{(\upsilon-2)}, \tag{4}$$

其中 $G(t,s)=\dfrac{1}{\Gamma(\upsilon)}\begin{cases}\dfrac{t^{(\upsilon-1)}\ (\upsilon+b-s)^{(\upsilon-1)}}{(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}}-(t-s-1)^{(\upsilon-1)},\ 0\leqslant s<t-\upsilon+1\leqslant b+1;\\ \dfrac{t^{(\upsilon-1)}\ (\upsilon+b-s)^{(\upsilon-1)}}{(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}},\ t-\upsilon+1<s\leqslant b+1.\end{cases}$

定理 2　Green 函数 $G(t,s)$ 具有以下性质:

(i) $G(t,s)>0$, $(t,s)\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}\times[0,b+1]_{\mathbf{N}_0}$;

(ii) $\max_{t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}}G(t,s)=G(s+\upsilon-1,s)$,其中 $s\in[0,b+1]_{\mathbf{N}_0}$;

(iii) 存在 $\gamma\in(0,1)$,使得

$$\min_{t\in[\frac{\upsilon+b+1}{4},\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}]_{\mathbf{N}_{\frac{\upsilon+b+1}{4}}}}G(t,s)\geqslant\gamma\max_{t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}}G(t,s)=\gamma G(s+\upsilon-1,s),\ s\in[0,b+1]_{\mathbf{N}_0}.$$

证明　(i) 当 $0\leqslant t-\upsilon+1\leqslant s\leqslant b+1$ 时,显然有 $G(t,s)>0$;当 $0\leqslant s<t-\upsilon+1\leqslant b+1$ 时,令 $F(t,s)=\dfrac{t^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b-s)^{(\upsilon-1)}}{(t-s-1)^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}}$,由 $\dfrac{(\upsilon+b-s)^{(\upsilon-1)}}{(t-s-1)^{(\upsilon-1)}}=\dfrac{\Gamma(\upsilon+b-s+1)}{\Gamma(b-s+2)}\dfrac{\Gamma(t-s-\upsilon+1)}{\Gamma(t-s)}=\prod_{i=0}^{\upsilon+b-t}\dfrac{\upsilon+b-s-i}{b-s+1-i}$ 知 $\dfrac{(\upsilon+b-s)^{\upsilon-1}}{(t-s-1)^{\upsilon-1}}$ 关于 $s\in[0,b+1]_{\mathbf{N}_0}$ 严格递增,所以有

$$F(t,s)=\frac{t^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b-s)^{(\upsilon-1)}}{(t-s-1)^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}}>\frac{t^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b)^{(\upsilon-1)}}{(t-1)^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}}=\frac{t(b+2)}{(t-\upsilon+1)(\upsilon+b+1)}>1,$$

即 $G(t,s)>0$. 因此,结论(i) 成立.

(ii) 当 $0\leqslant t-\upsilon+1\leqslant s\leqslant b+1$ 时,易知 $\Delta_tG(t,s)=\dfrac{(\upsilon-1)t^{(\upsilon-2)}(\upsilon+b-s)^{(\upsilon-1)}}{\Gamma(\upsilon)(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}}>0$,即 $G(t,s)\leqslant G(s+\upsilon-1,s)$;当 $0\leqslant s<t-\upsilon+1\leqslant b+1$ 时,有 $\Delta_tG(t,s)=\dfrac{1}{\Gamma(\upsilon)}\Big[\dfrac{(\upsilon-1)t^{(\upsilon-2)}(\upsilon+b-s)^{(\upsilon-1)}}{(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}}-(\upsilon-1)(t-s-1)^{(\upsilon-2)}\Big]=\dfrac{(\upsilon-1)}{(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}\Gamma(\upsilon)}\big[t^{(\upsilon-2)}(\upsilon+b-s)^{(\upsilon-1)}-(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}(t-s-1)^{(\upsilon-2)}\big]$.

因为 $\dfrac{t^{(\upsilon-2)}(\upsilon+b-s)^{(\upsilon-1)}}{(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}(t-s-1)^{(\upsilon-2)}}=\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\upsilon+3)}\dfrac{\Gamma(\upsilon+b-s+1)}{\Gamma(b-s+2)}\dfrac{\Gamma(b+3)}{\Gamma(\upsilon+b+2)}\dfrac{\Gamma(t-s-\upsilon+2)}{\Gamma(t-s)}=\dfrac{t\cdots(t-s)}{(t-\upsilon+2)\cdots(t-\upsilon-s+2)}\dfrac{(b+2)\cdots(b-s+2)}{(\upsilon+b+1)\cdots(\upsilon+b+1-s)}=\prod_{i=0}^{s}\dfrac{(t-i)(b+2-i)}{(t-\upsilon+2-i)(\upsilon+b+1-i)}<1$,所以 $\Delta_tG(t,s)<0$. 因此 $G(t,s)\leqslant G(s+\upsilon-1,s)$ 成立,即结论(ii) 成立.

(iii) 易知

$$\frac{G(t,s)}{G(s+\upsilon-1,s)}=\begin{cases}\dfrac{t^{(\upsilon-1)}}{(s+\upsilon-1)^{(\upsilon-1)}}-\dfrac{(t-s-1)^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}}{(s+\upsilon-1)^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b-s)^{(\upsilon-1)}}, & 0\leqslant s<t-\upsilon+1\leqslant b+1;\\[2ex] \dfrac{t^{(\upsilon-1)}}{(s+\upsilon-1)^{(\upsilon-1)}}, & 0\leqslant s<t-\upsilon+1\leqslant b+1.\end{cases}$$

对于 $\dfrac{\upsilon+b+1}{4}\leqslant t\leqslant\dfrac{3(\upsilon+b+1)}{4}$,当 $t-\upsilon+1\leqslant s\leqslant b+1$ 时,有 $\dfrac{G(t,s)}{G(s+\upsilon-1,s)}=\dfrac{t^{(\upsilon-1)}}{(s+\upsilon-1)^{(\upsilon-1)}}\geqslant\dfrac{(\frac{\upsilon+b+1}{4})^{(\upsilon-1)}}{(s+\upsilon-1)^{(\upsilon-1)}}\geqslant\dfrac{(\frac{\upsilon+b+1}{4})^{(\upsilon-1)}}{(b+\upsilon)^{(\upsilon-1)}}$. 当 $s<t-\upsilon+1$ 时,由(ii) 知 $\Delta G_t(t,s)<0$,故有

$$\frac{G(t,s)}{G(s+\upsilon-1,s)}=\frac{t^{(\upsilon-1)}}{(s+\upsilon-1)^{(\upsilon-1)}}-\frac{(t-s-1)^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}}{(s+\upsilon-1)^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b-s)^{(\upsilon-1)}}\geqslant$$

$$\frac{(\frac{3(\upsilon+b+1)}{4})^{(\upsilon-1)}}{(s+\upsilon-1)^{(\upsilon-1)}}-\frac{(\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}-s-1)^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}}{(s+\upsilon-1)^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b-s)^{(\upsilon-1)}}.$$

由引理 7 的(ii) 可知 $\dfrac{(\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}-s-1)^{(\upsilon-1)}}{(\upsilon+b-s)^{(\upsilon-1)}}$ 是关于 s 的减函数,所以有 $\dfrac{G(t,s)}{G(s+\upsilon-1,s)}\geqslant\dfrac{(\frac{3(\upsilon+b+1)}{4})^{(\upsilon-1)}}{(b+\upsilon)^{(\upsilon-1)}}-\dfrac{(\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}-1)^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}}{(b+\upsilon)^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b)^{(\upsilon-1)}}=\dfrac{1}{(b+\upsilon)^{(\upsilon-1)}}\Big[(\dfrac{3(\upsilon+b+1)}{4})^{(\upsilon-1)}-$

$\dfrac{(\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}-1)^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}}{(\upsilon+b)^{(\upsilon-1)}}]$. 设 $\gamma=\min\{\dfrac{(\frac{\upsilon+b+1}{4})^{(\upsilon-1)}}{(b+\upsilon)^{(\upsilon-1)}},\dfrac{1}{(b+\upsilon)^{(\upsilon-1)}}[(\dfrac{3(\upsilon+b+1)}{4})^{(\upsilon-1)}-$ $\dfrac{(\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}-1)^{(\upsilon-1)}(\upsilon+b+1)^{(\upsilon-1)}}{(\upsilon+b)^{(\upsilon-1)}}]\}$, 显然 $\gamma\in(0,1)$, 因此(iii) 成立.

3 正解的存在性

由定理 1 知,求分数阶差分方程(1) 和(2) 的解等价于在(2) 式条件下求解求和方程

$$y(t)=\sum_{s=0}^{b+1}G(t,s)f(s+\upsilon-1,y(s+\upsilon-1))-\frac{t^{(\upsilon-1)}}{(b+3)\Gamma(\upsilon-1)}g(y)+\frac{t^{(\upsilon-2)}}{\Gamma(\upsilon-1)}g(y) \tag{5}$$

的解,其中 $t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}$.

定义 Banach 空间

$$B=\{y:[\upsilon-3,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-3}}\to\mathbf{R}\mid y(\upsilon-3)=y(\upsilon+b+1)=0,y(\upsilon-2)=g(y)\}, \tag{6}$$

并赋范数为 $\|y\|=\max|y(t)|$, $t\in[\upsilon-3,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-3}}$.

定义算子 $A:B\to B$ 如下:$(Ay)(t)=\sum_{s=0}^{b+1}G(t,s)f(s+\upsilon-1,y(s+\upsilon-1))+\varphi(t)g(y)$,其中 $\varphi(t)=\dfrac{1}{\Gamma(\upsilon-1)}(t^{(\upsilon-2)}-\dfrac{t^{(\upsilon-1)}}{b+3})$, $t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}$.

由(5) 式可知 y 是分数阶差分方程(1) 和(2) 的解,当且仅当 y 是 A 的不动点. 由于算子 A 是离散有限集上的和算子,所以 A 是平凡完全连续算子,为证明算子 A 存在不动点,给出 3 个假设:① $f(t,y)\geqslant0$ 且连续, $0\leqslant g(y)\leqslant\dfrac{1}{2M_2}$,其中 $M_2=\max_{t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}}\varphi(t)$, $(t,y)\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}\times[0,\infty)$;
② $f(t,y)=h(t)F(y)$,其中 $h(t)$ 是一个正函数,$F(y)$ 是一个非负函数,且 $\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{F(y)}{y}=0$, $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{F(y)}{y}=\infty$;
③ $f(t,y)=h(t)F(y)$,其中 $h(t)$ 是一个正函数,$F(y)$ 是一个非负函数,且 $\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{F(y)}{y}=\infty$, $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{F(y)}{y}=0$.

引理 8 若 $g(y)\geqslant0$,则存在常数 $\gamma'\in(0,1)$ 使得

$$\min_{t\in[\frac{\upsilon+b+1}{4},\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}]_{\mathbf{N}_{\frac{\upsilon+b+1}{4}}}}\sum_{s=0}^{b+1}G(t,s)f(s+\upsilon-1,y(s+\upsilon-1))+\min_{t\in[\frac{\upsilon+b+1}{4},\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}]_{\mathbf{N}_{\frac{\upsilon+b+1}{4}}}}\varphi(t)g(y)\geqslant$$

$$\gamma'\max_{t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}}\sum_{s=0}^{b+1}G(t,s)f(s+\upsilon-1,y(s+\upsilon-1))+\gamma'\max_{t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}}\varphi(t)g(y).$$

证明 由定理 2 知,存在 $\gamma\in(0,1)$,使得 $\min\limits_{t\in[\frac{\upsilon+b+1}{4},\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}]_{\mathbf{N}_{\frac{\upsilon+b+1}{4}}}}\sum\limits_{s=0}^{b+1}G(t,s)f(s+\upsilon-1,y(s+\upsilon-1))\geqslant$ $\gamma\max\limits_{t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}}\sum\limits_{s=0}^{b+1}G(t,s)f(s+\upsilon-1,y(s+\upsilon-1))$. 由于

$$\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(\upsilon-1)}\left(t^{(\upsilon-2)}-\frac{t^{(\upsilon-1)}}{b+3}\right)=\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(\upsilon-1)\Gamma(t-\upsilon+2)}(\frac{1}{t-\upsilon+2}-\frac{1}{b+3})>0,$$

$$\Delta_t^2\varphi(t)=\Delta_t\left(\frac{1}{\Gamma(\upsilon-1)}[(\upsilon-2)t^{(\upsilon-3)}-\frac{\upsilon-1}{b+3}t^{(\upsilon-2)}]\right)=$$

$$\frac{1}{\Gamma(\upsilon-1)}[(\upsilon-2)(\upsilon-3)t^{(\upsilon-4)}-\frac{(\upsilon-1)(\upsilon-2)}{b+3}t^{(\upsilon-3)}]>0,$$

所以,对于 $t\in[\dfrac{\upsilon+b+1}{4},\dfrac{3(\upsilon+b+1)}{4}]_{\mathbf{N}_{\frac{\upsilon+b+1}{4}}}$, $\exists M_1>0$,有 $\min\limits_{t\in[\frac{\upsilon+b+1}{4},\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}]_{\mathbf{N}_{\frac{\upsilon+b+1}{4}}}}\varphi(t)=M_1$;对于 $t\in[\upsilon-$

$1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}$，$\exists M_2>0$，有 $\max\limits_{t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}}\varphi(t)=M_2$. 设 $\gamma_0=\dfrac{M_1}{M_2}$，则有 $\min\limits_{t\in[\frac{\upsilon+b+1}{4},\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}]_{\mathbf{N}_{\frac{\upsilon+b+1}{4}}}}\varphi(t)g(y)=\gamma_0\max\limits_{t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}}\varphi(t)g(y)$. 令 $\gamma'=\min\{\gamma,\gamma_0\}$，可知引理 8 成立.

定义 B 上的锥 $p=\{y\in B\mid y(t)\geqslant 0,t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}\}$，$p_0=\{y\in p\mid \min\limits_{t\in[\frac{\upsilon+b+1}{4},\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}]_{\mathbf{N}_{\frac{\upsilon+b+1}{4}}}}y(t)\geqslant\gamma'\|y\|\}$，其中 $\gamma'=\min\{\gamma,\gamma_0\}$ 与引理 8 中相同.

引理 9　假设条件 ① 成立，那么对于 $\forall y\in p$ 有 $Ay\in P_0$；特别的，算子 A 是锥 P_0 到 P_0 上的映射.

证明　对于 $\forall y\in p$，由定理 3、引理 7 及假设条件 ①，有 $(Ay)(t)\geqslant 0$，$t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}$. 由引理 8 可知，$\min\limits_{t\in[\frac{\upsilon+b+1}{4},\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}]_{\mathbf{N}_{\frac{\upsilon+b+1}{4}}}}(Ay)(t)\geqslant\gamma'\sum\limits_{s=0}^{b+1}\max G(t,s)f(s+\upsilon-1,y(s+\upsilon-1))+\gamma'\max\limits_{t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}}\varphi(t)g(y)\geqslant\gamma'\|Ay\|$，所以，对于 $\forall y\in P$ 有 $Ay\in P_0$.

定理 3　(i) 假设条件 ① 和 ② 成立，那么分数阶差分方程(1) 和方程(2) 至少有一个非零解 $y\in P_0$；(ii) 假设条件 ① 和 ③ 成立，那么分数阶差分方程(1) 和方程(2) 至少有一个非零解 $y\in P_0$.

证明　(i) 记 $a=\dfrac{3(\upsilon+b+1)}{4}-\dfrac{\upsilon+b+1}{4}+1$，$M_2=\max\varphi(t)$，$M=\max G(t,s)$，$m=\min G(t,s)$，$(t,s)\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}\times[0,b+1]_{\mathbf{N}}$，$h=\min h(t)$，$H=\max h(t)$，$t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}$. 由条件 ② 知，对于 $\dfrac{1}{2(b+2)MH}>0$，$\exists r\geqslant 1$，使得 $0<g(y)<\dfrac{1}{2M_2}\leqslant\dfrac{r}{2M_2}$. 当 $0\leqslant y\leqslant r$ 时，有 $F(y)\leqslant\dfrac{y}{2(b+2)MH}\leqslant\dfrac{r}{2(b+2)MH}$. 对于 $\dfrac{1}{a\gamma' mh}>0$，$\exists R>r>0$，当 $y\geqslant R$ 时，有 $F(y)\geqslant\dfrac{y}{a\gamma' mh}\geqslant\dfrac{R}{a\gamma' mh}$. 对于 $\forall y\in P_0$，且 $\|y\|=r$，有

$$Ay(t)\leqslant M\sum_{s=0}^{b+1}h(s+\upsilon-1)F(y(s+\upsilon-1))+M_2g(y)\leqslant$$

$$MH\,\frac{1}{2(b+2)MH}r\sum_{s=0}^{b+1}1+M_2\,\frac{r}{2M_2}=\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r=\|y\|,\ t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}.\tag{7}$$

设 $\Omega_1=\{y\in B\mid \|y\|<r\}$，则由(7) 式知，对于 $\forall y\in P_0\cap\partial\Omega_1$，有 $\|Ay\|\leqslant\|y\|$. 假设 $R_1=\dfrac{R}{\gamma'}>R$，$\Omega_2=\{y\in B\mid \|y\|<R_1\}$，则对于 $\forall y\in P_0$，且 $\|y\|=R_1$，有 $\min\limits_{t\in[\frac{\upsilon+b+1}{4},\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}]_{\mathbf{N}_{\frac{\upsilon+b+1}{4}}}}y(t)\geqslant\gamma'\|y\|=\gamma' R_1=R$. 因此，对于 $t\in[\dfrac{\upsilon+b+1}{4},\dfrac{3(\upsilon+b+1)}{4}]_{\mathbf{N}_{\frac{\upsilon+b+1}{4}}}$，有 $y(t)\geqslant R$；对于 $\forall t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}$，有 $Ay(t)\geqslant mh\sum\limits_{s=0}^{b+1}F(y(s+\upsilon-1))\geqslant mh\sum\limits_{s=[\frac{\upsilon+b+1}{4}-\upsilon+1]}^{[\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}-\upsilon+1]}F(y(s+\upsilon-1))\geqslant mh\cdot\dfrac{R}{amh\gamma'}\sum\limits_{s=[\frac{\upsilon+b+1}{4}-\upsilon+1]}^{[\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}-\upsilon+1]}1=\dfrac{R}{\gamma'}=R_1=\|y\|$. 特别地，对于 $\forall y\in P_0\cap\partial\Omega_2$，有 $\|Ay\|\geqslant\|y\|$. 所以由引理 6 知算子 A 至少有一个不动点 $y\in P_0\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$，且 $r\leqslant\|y\|\leqslant R_1$，即方程(1) 和方程(2) 至少有一个正解 $y\in P_0$.

(ii) 由假设条件 ③ 知，对于 $\dfrac{1}{a\gamma' mh}>0$，$\exists\tilde{r}>0$，当 $0\leqslant y\leqslant\tilde{r}$ 时，有 $\dfrac{F(y)}{y}\geqslant\dfrac{F(y)}{\tilde{r}}\geqslant\dfrac{1}{a\gamma' mh}$，即 $F(y)\geqslant\dfrac{\tilde{r}}{a\gamma' mh}$. 设 $\Omega_3=\{y\in B\mid \|y\|<\dfrac{\tilde{r}}{\gamma'}\}$，则对于 $\forall y\in P_0$ 且 $\|y\|=\dfrac{\tilde{r}}{\gamma'}$，有 $(Ay)(t)\geqslant mh\cdot$

$\sum_{s=0}^{b+1}F(y(s+\upsilon-1))\geqslant mh\sum_{s=[\frac{\upsilon+b+1}{4}-\upsilon+1]}^{[\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}-\upsilon+1]}F(y(s+\upsilon-1))\geqslant mh\frac{\tilde{r}}{a\gamma' mh}\sum_{s=[\frac{\upsilon+b+1}{4}-\upsilon+1]}^{[\frac{3(\upsilon+b+1)}{4}-\upsilon+1]}1=\frac{\tilde{r}}{\gamma'}=\|y\|$, $t\in[\upsilon-1,\upsilon+b-1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}$. 因此,对于 $\forall y\in P_0\cap\partial\Omega_3$,有 $\|Ay\|\geqslant\|y\|$.

对于 Ω_4 的构造,按以下两种情况来考虑:

1) 设 $F(y)$ 存在上界 $\frac{K}{2}>0$,则有 $0<g(y)<\frac{1}{2M_2}<\frac{MHK(b+2)}{2M_2}$. 选择实数 $R_2>0$,使得 $R_2>\max\left\{\frac{\tilde{r}}{\gamma},KMH(b+2)\right\}$,那么对于 $\forall y\in P_0$ 且 $\|y\|=R_2$,有

$$Ay(t)\leqslant M\sum_{s=0}^{b+1}h(s+\upsilon-1)g(y(s+\upsilon-1))+M_2g(y)\leqslant MH\frac{K}{2}\sum_{s=0}^{b+1}1+M_2\frac{MKH(b+2)}{2M_2}= MKH(b+2)<R_2=\|y\|,\ t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}. \tag{8}$$

设 $\Omega_4=\{y\in B\mid\|y\|<R_2\}$,$\overline{\Omega}_4$ 是 Ω_4 的闭包,则由(8)式知,对于 $\forall y\in P_0\cap\partial\Omega_4$,有 $\|Ay\|\leqslant\|y\|$.

2) 假设 $F(y)$ 无界. 由假设条件 ③ 知,对于 $\frac{1}{2(b+2)MH}>0$,$\exists R_3>0$,当 $y\geqslant R_3$ 时,有 $F(y)\leqslant\frac{y}{2(b+2)MH}$. 取实数 $R_4\geqslant R_3$,使得 $R_4>\max\left\{\frac{\tilde{r}}{\gamma'},KMH(b+2)\right\}$,并且当 $0<y\leqslant R_4$ 时,有 $F(y)\leqslant F(R_4)\leqslant\frac{R_4}{2(b+2)MH}$,由此易知 $0<g(y)<\frac{1}{2M_2}<\frac{R_4}{2M_2}$. 于是对 $\forall y\in P_0$,并且 $\|y\|=R_4$,有

$$Ay(t)\leqslant MH\sum_{s=0}^{b+1}F(y(s+\upsilon-1))+M_2g(y)\leqslant MH\sum_{s=0}^{b+1}F(R_4)+M_2g(y)\leqslant MH(b+2)\frac{R_4}{2MH(b+2)}+M_2\frac{R_4}{2M_2}=R_4=\|y\|,\ t\in[\upsilon-1,\upsilon+b+1]_{\mathbf{N}_{\upsilon-1}}. \tag{9}$$

设 $\Omega_4=\{y\in B:\|y\|<R_4\}$,则由(9)式知,对于 $\forall y\in P_0\cap\partial\Omega_4$,有 $\|Ay\|\leqslant\|y\|$.

由引理 6 知,算子 A 至少有一个不动点 $y\in P_0\cap(\overline{\Omega}_4\backslash\Omega_3)$,并且 $\frac{\tilde{r}}{\gamma'}\leqslant\|y\|\leqslant R$,即方程(1)和方程(2)至少有一个正解 $y\in P_0$.

参考文献:

[1] Miller K S, Ross B. Fractional difference calculus[C]//Procedings of the internations symposium on univalent functions. Koriyama: Fractional Calculus and Their Applications Nihon University, 1988:139-152.

[2] Atici F M, Eloe P W. A transform method in discrete fractional calculus[J]. Int J Difference Equ, 2007,2(2):165-176.

[3] Atici F M, Eloe P W. Initial value problems in discrete fractional calculus[J]. Proc Amer Math Soc, 2009,137:981-989.

[4] Goodrich C S. Existence and uniqueness of solutions to a fractional difference equation with nonlocal conditions[J]. J Comput Math Appl, 2011,61(21):191-202.

[5] Atici F M, Eloe P W. Two-point boundary value problems for finite fractional difference equations[J]. J Difference Equ Appl, 2011,17(4):445-456.

[6] Zhao Yige, Sun Shurong, Han Zhenlai. The existence of multiple positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations[J]. J Commun Nonlinear Sci Number Simulat, 2011(16):2086-2097.

[7] 时宝,张德存,盖久明. 微分方程理论及其应用[M]. 北京:国防工业出版社,2005:13.

[8] 程金发. 分数阶差分方程理论[M]. 厦门:厦门大学出版社,2010.

[9] Chen F Q. Extreme solutions of initial value problems for nonlinear second order integrodifferential equations in Banach spaces[J]. Acta Math Appl Sinica, 2001,17:289-298.